结构不良题-数列（三）

一、解答题（本大题共25小题）

1. 将① $a_1=1$，$a_n+a_{n+1}=4n$，② $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\cdots+\sqrt{S_n}=\dfrac{n(n+1)}{2}$，③ $a_n>0$，$4S_n-1=a_n^2+2a_n$之一填入空格中（只填番号），并完成该题.

已知S_n是数列$\{a_n\}$前n项和，__________.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)证明：对一切$n\in\mathbf{N}^*$，$2^{2n+1}-2$能被3整除.

2. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_2=2$.

从下面①②③中选取两个作为条件，剩下一个作为结论．如果该命题为真，请给出证明；如果该命题为假，请说明理由.

① $a_3=3a_1$；② $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$为等差数列；③ $a_{n+2}-a_n=2$.

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分.

3. 在① $b_n=2^{|a_n|}$，② $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，③ $b_n=(-1)^nS_n$这三个条件中任选一个，补充到下面的问题中，并解答.

设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_5=5$，$S_5=5$.

(1)求S_n的最小值；

(2)若数列$\{b_n\}$满足__________，求数列$\{b_n\}$的前10项和.

4. 已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，记S_n为$\{a_n\}$的前n项和，从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个成立.

① $a_2=2a_1$；②数列$\{\ln a_n\}$是等差数列；③数列$\{S_n+a_1\}$是等比数列；

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分.

5. 在① $a_3=5$，$a_5+a_7=22$；② $a_1=1$，$S_5=25$；③ $S_n=n^2$，这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，然后解答补充完整的题目.

已知S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若____.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$C_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$.

6. ① $S_1=5$；② $S_6=315$．在这两个条件中任选一个，补充在下面的问题中并求解.

等比数列$\{a_n\}$中，已知$S_3=35$，____，求a_n.

7. 已知数列$\{a_n\}$，其前n项和为S_n，满足

请你从① $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+4$；② $S_n=2a_n-1$；③ $a_1=1$，$a_{n+1}+a_n=2$中选择一个，补充在下面的问题中并作答.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 通项公式：

(2) 当 $S_n \leq 100$ 时，求 n 的最大值．

8．在 $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ 的展开式中，_____．给出下列条件：

①前三项的系数成等差数列；

②第三项的系数为7；

③奇数项的二项式系数之和为128．

请在上面的三个条件中选择一个补充在横线上，并且完成下列问题：

(1) 求 n 的值；

(2) 求展开式中二项式系数最大的项．注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

9．这三个条件中任选一个，补充在下面题目条件中，并解答．

① $a_2=5$，$S_{n+1}-2S_n+S_{n-1}=3\left(n\geq 2, n\in\mathbf{N}^*\right)$；

② $a_2=5$，$S_{n+1}=3S_n-2S_{n-1}-a_{n-1}\left(n\geq 2, n\in\mathbf{N}^*\right)$；③ $\dfrac{S_n}{n}-\dfrac{S_{n-1}}{n-1}=\dfrac{3}{2}\left(n\geq 2, n\in\mathbf{N}^*\right)$．

问题：已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=2$，且__________．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 已知 b_n 是 a_n、a_{n+1} 的等比中项，求数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n^2}\right\}$ 的前 n 项和 T_n．

10．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足_____，_____，请在① $S_{n+1}=2S_n+1$，② $a_2=2$，③ $S_n=a_{n+1}-1$ 这三个条件中选择两个，补充在前面的两条横线处，并给出下列问题的解答．

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 又知递增的等差数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=2$，且 b_1，b_2，b_5 成等比数列，设 $c_n=a_n\cdot b_n$，

①求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式．

②求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

11．已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为互不相等的正数，且 $a_1=1$，记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，从下面①②③中选取两个作为条件，证明另一个成立．

①数列 $\{a_n\}$ 是等比数列；②数列 $\{S_n+1\}$ 是等比数列；③ $a_5=4a_3$

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分．

12．已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，其前 n 项和为 S_n，$a_1=7$，并在下列在三个条件中任选一个：① $S_4=2S_7+2$，② $\dfrac{S_3}{3}-\dfrac{S_5}{5}=2$，③ $\dfrac{a_5^2-a_1^2}{a_7^2-a_3^2}=-3$（解答时注明所选条件）．

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 解不等式 $S_n\leq 0$．

13. 在① $q=d$；② $2q-d=2$；③ $q+d=4$ 这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中并完成解答. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，公差为 d，$\{b_n\}$ 是等比数列，公比为 q，已知 $a_1=b_1=1$，$a_3+b_2=7$，__________.

(1) 请写出你的选择，并求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=\dfrac{a_n}{b_{n+1}}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，求 $\sum\limits_{i=1}^{n}c_i$；

(3) 设 $d_n=\dfrac{a_n+3}{\left(a_n^2-1\right)b_n}\left(n\geq 2\right)$，求证：$\sum\limits_{i=2}^{n}d_i<\dfrac{1}{2}$.

14. 存在条件：① $a_2=10$，$d=-3$；② $a_3=7$，$a_7=-5$；③ $a_1+a_3=20$，$a_2+a_4=14$. 在这三个条件中任选一个，回答下列问题，已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足_____. 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

15. 在① $\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{n}{n+1}$；② $a_1=2$，$na_{n+1}=2S_n$；③ $4S_n=a_n^2+2a_n$ 这三个条件中任选一个，补充到下面横线处，并作答.

已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，____________，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=2^{\frac{a_n}{2}}$，记 $\Omega(x)$ 表示 x 除以3的余数，求 $\Omega\left(\sum\limits_{i=1}^{2n+1}b_i\right)$.

注：如果选择多个条件分别进行解答，按第一个解答进行计分.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_2=4$，$\dfrac{S_n-n}{n}=\dfrac{1}{2}a_n$.

(1) 求证：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列；

(2) 从下面两个条件中选一个，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和 T.

① $b_n=\left|a_n-11\right|$；

② $b_n=a_{2n-1}a_{2n}-a_{2n}a_{2n+1}$.

17. 问题：已知 $n\in\mathbf{N}^*$，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，是否存在数列 $\{a_n\}$，满足 $S_1=1,a_{n+1}\geq 1+a_n$，_________？若存在. 求通项公式 a_n；若不存在，说明理由.

在① $a_{n+1}=2(\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n})$；② $a_n=S_{n-1}+n\left(n\geq 2\right)$；③ $a_{n+1}=2a_n+n-1$ 这三个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，前 n 项的和 S_n，且 $a_{n+1}+a_n=3\times 2^n$.

(1) 写出 a_2,a_3，并求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 在① $b_n=\log_2\left(a_na_{n+1}+\lambda\right)$；② $b_n=\log_2\left(S_n+\lambda\right)$ 这两个条件中任选一个补充在下面横线中，并加以解答. 若数列 $\{b_n\}$ 满足__________，求实数 λ 使得数列 $\{b_n\}$ 是等差数列.

（注：如果求解了两个问题，则按照第一个问题解答给分）

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

(1)从① $S_1=1$，② $2S_{n+1}=S_n+2$，③ $S_n+a_n=2a_1$ 这三个条件中任选两个作为条件，证明另一个成立，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)在第（1）问的前提下，若 $b_n=a_n+\dfrac{1}{a_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

注：如果选择多种情况分别解答，按第一种解答计分.

20．已知数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列，前3项和为13，且 a_1+3，$3a_2$，a_3+5 成等差数列.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)数列 $\{b_n\}$ 的首项 $b_1=1$，其前 n 项和为 S_n，且____，若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=a_nb_n$，$\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求 T_n 的最小值.

在如下两个条件中任意选择一个，填入上面横线处，并根据题意解决问题. ① $3S_n+b_n=4$；② $5b_n=-b_{n-1}\left(n\geq 2\right)$.

21．①{2nan}为等差数列，且 a_1，a_3，$\dfrac{1}{3}a_2$ 成递减的等比数列；

②{（-1）n+1n+an}为等比数列，且 $4a_1$，a_3，a_2 成递增的等差数列.

从①②两个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解答.

已知 Sn 为数列{an}的前 n 项和，$a_1=1$，______.

(1)求{an}的通项公式;

(2)求{an}的前 n 项和 Sn.

22．在等比数列 $\{a_n\}$ 中，公比 $q>0$，其前 n 项和为 S_n，且 $S_2=6$，____．从① $S_4=30$，② $S_6-S_4=96$，③ a_3 是 S_3 与2的等差中项这三个条件中任选一个，补充到上面问题中的横线上，并作答.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=\log_{a_n}2$，且数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1=1$，$c_{n+1}-c_n=b_{n+1}b_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的通项公式.

23．已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_1=1$，_________.

① $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n+a_{n+1}=4n$；②数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，且 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 的前3项和为6．从以上两个条件中任选一个补充在横线处，并求解：

(1)求 a_n；

(2)设 $b_n=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{\left(a_n\cdot a_{n+1}\right)^2}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

24．在① $na_{n+1}=3\left(n+1\right)a_n$，② $a_{n+1}=3a_n-2$，③ $a_{n+1}-3a_n=3^{n+1}$ 这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解答该问题.

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3$，____，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

25．在① $a_4=b_4$，② $a_2+b_5=2$，③ $S_6=-24$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的正整数 k 存在，求 k 的值；若 k 不存在，请说明理由.

设S_n为等差数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和，$\left\{b_n\right\}$是等比数列，____，$b_1=a_5$，$b_3=-9$，$b_6=243$．是否存在k，使得$S_k>S_{k-1}$且$S_{k+1}<S_k$？

参考答案

1.【答案】(1) $a_n=2n-1$

(2)证明见解析

【分析】

（1）若选①，类比作差证明数列是隔项等差数列即可；

若选②，利用类比作差和阶差法可以求解；

若选③，利用公式作差后因式分解，找出a_n与a_{n-1}的关系，再根据等差数列的定义和通项公式即可求出$a_n=2n-1$.

（2）利用数学归纳法证明结论即可.

【详解】

(1)

若选①：

因为$a_n+a_{n+1}=4n$

所以$a_{n-1}+a_n=4(n-1)(n\geq 2)$，

两式相减得$a_{n+1}-a_{n-1}=4$，

所以$\{a_n\}$是隔项等差数列，

$a_1+a_2=4$且$a_1=1$，

所以$a_n=a_1+(\frac{n-1}{2})d=2n-1$ (n为奇数)，

$a_n=a_2+(\frac{n-2}{2})d=2n-1$ (n为偶数)，

所以$a_n=2n-1$.

若选②：$\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\cdots+\sqrt{S_n}=\frac{n(n+1)}{2}$，

所以$\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\cdots+\sqrt{S_{n-1}}=\frac{(n-1)n}{2}$，

两式相减得，$\sqrt{S_n}=n$，

所以$S_n=n^2$，

所以$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1$.

若选③：

因为$4S_n-1=a_n^2+2a_n$①，

所以$4S_{n-1}-1=a_{n-1}^2+2a_{n-1}(n\geq 2)$②，

所以$4(S_n-S_{n-1})=a_n^2+2a_n-a_{n-1}^2-2a_{n-1}$，

即$4a_n=a_n^2+2a_n-a_{n-1}^2-2a_{n-1}$，

所以$a_n^2-2a_n-a_{n-1}^2-2a_{n-1}=0$，

所以$\left(a_n+a_{n-1}\right)\left(a_n-a_{n-1}\right)-2\left(a_n+a_{n-1}\right)=0$，

所以$\left(a_n+a_{n-1}\right)\left(a_n-a_{n-1}\right)-2\left(a_n+a_{n-1}\right)=0$，

所以$\left(a_n+a_{n-1}\right)\left(a_n-a_{n-1}-2\right)=0$，

因为$a_n>0$，所以$a_n+a_{n-1}\neq 0$，

所以$a_n-a_{n-1}-2=0$，

所以$a_n-a_{n-1}=2$，

又$4a_1-1=a_1^2+2a_1$，

所以$a_1^2-2a_1+1=0$，

所以$\left(a_1-1\right)^2=0$，

所以$a_1=1$，

所以$\left\{a_n\right\}$是首项为1，公差为2的等差数列，

所以$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$，

所以$\left\{a_n\right\}$的通项公式$a_n=2n-1$.

(2)

当$n=1$时，$2^{2n+1}-2=2^3-2=6$，能够被3整除；

假设当$n=k$时，$2^{2n+1}-2$能被3整除，则有$2^{2k+1}-2=3m$ $(m\in Z)$，所以$2^{2k+1}=3m+2$，

则当$n=k+1$时，$2^{2n+1}-2=2^{2(k+1)+1}-2=2^{2k+3}-2=2^2\times 2^{2k+1}-2=4(3m+2)-2=12m+6$，

所以当$n=k+1$时$2^{2n+1}-2$能被3整除.

综上所述，对一切$n\in\mathbf{N}^*$，$2^{2n+1}-2$能被3整除.

2.【答案】答案见解析

【分析】

选①②作为条件，可得$S_3=6$，即可求出S_n和$a_n=n$，进而得到③.

选①③作为条件，可得$a_n=n$，即可得到$\frac{S_n}{n}=\frac{n+1}{2}$，进而得到②

选②③作为条件，可得$a_3-a_1=2$，$a_1=1,a_3=3$，进而得到①

【详解】

解：选①②作为条件，③作为结论

由$a_2=2$，$a_3=3a_1$，$S_2=\frac{S_3}{3}+S_1$，

所以$S_3=6$，则有$a_1=1$，$a_3=3$，

所以可知$\frac{S_2}{2}-S_1=\frac{1}{2}$，

则有$\frac{S_n}{n}=\frac{n-1}{2}+S_1=\frac{n+1}{2}$，得$S_n=\frac{n\left(n+1\right)}{2}$

故可知$a_n=S_n-S_{n-1}=n$，

又$a_1=1$符合，

所以$a_n=n$，

则有$a_{n+2}-a_n=2$.

选①③作为条件，②作为结论

$$\begin{cases}a_3=3a_1\\a_{n+2}-a_n=2\\a_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=1\\a_2=2\\a_3=3\end{cases}$$

由 $a_{n+2}-a_n=2$

当 n 为奇数，$a_n=a_1+2(\frac{n+1}{2}-1)=n$

当 n 为偶数，$a_n=a_2+2(\frac{n}{2}-1)=n$

故 $a_n=n$

$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$

$\frac{S_n}{n}=\frac{n+1}{2}$

$\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n-1}=\frac{1}{2}$，$\frac{S_1}{1}=1$

$\therefore\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是以公差为$\frac{1}{2}$，首项为$1$的等差数列

选②③作为条件，①作为结论

$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，$a_{n+2}-a_n=2$，即 $a_3-a_1=2$

$2\frac{S_2}{2}=\frac{S_3}{3}+S_1\Rightarrow a_1+a_3=4$

$\therefore a_1=1,a_3=3$

$\therefore a_3=3a_1$

3.【答案】(1) -4

(2)答案见解析

【分析】

（1）结合等差数列的通项公式和前 n 项和公式求得 a_1，d，利用二次函数的性质即可求解；

（2）选①，判断 $b_n=\begin{cases}2^{5-2n},n\le 2\\2^{2n-5},n\ge 3\end{cases}$，进而求解；选②，利用裂项相消法即可求解；选③ $b_n=(-1)^n\left(n^2-4n\right)=\begin{cases}-n^2+4n,n=2k-1\\n^2-4n,n=2k\end{cases}$，$k\in\mathbf{N}^*$，利用分组求和法即可求解.

【详解】

（1）由题，$\begin{cases}a_5=a_1+4d=5\\S_5=5a_1+\frac{5\times 4}{2}d=5\end{cases}$，$\begin{cases}a_1=-3\\d=2\end{cases}$，所以 $a_n=-3+2(n-1)=2n-5$，则

$S_n=-3n+n(n-1)=n^2-4n$，所以当 $n=2$ 时，S_n 的最小值为 -4.

（2）设数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，选①，由（1），$b_n=2^{|2n-5|}$，令$2n-5>0$，即$n>\frac{5}{2}$，所以$b_n=\begin{cases}2^{5-2n},n\le 2\\2^{2n-5},n\ge 3\end{cases}$，所以$T_{10}=2^3+2^1+2^1+2^3+\cdots+2^{15}=10+\frac{2\times\left(1-4^8\right)}{1-4}=43700$；选②，由（1），$b_n=\frac{1}{(2n-5)(2n-3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-5}-\frac{1}{2n-3}\right)$，所以

$T_{10}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{-3}-\frac{1}{-1}+\frac{1}{-1}-\frac{1}{1}+\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{15}-\frac{1}{17}\right)=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{17}\right)=-\frac{10}{51}$；选③，由（1），

$b_n=(-1)^n\left(n^2-4n\right)=\begin{cases}-n^2+4n,n=2k-1\\n^2-4n,n=2k\end{cases}$，$k\in\mathbf{N}^*$，所以

$T_{10}=\left(-1^2+4\times1+2^2-4\times2\right)+\left(-3^2+4\times3+4^2-4\times4\right)+\cdots+\left(-9^2+4\times9+10^2-4\times10\right)$

$=(1+2-4)+(3+4-4)+\cdots+(9+10-4)=\frac{(1+10)\times10}{2}-4\times5=35$

4.【答案】答案见解析

【分析】

选①②证明③：由已知求得$\{\ln a_n\}$的公差$d=\ln 2$，进而有$\{a_n\}$为等比数列并写出S_n，构造$b_n=S_n+a_1$结合等比数列定义判断等比数列；

选①③证明②：由已知求得$\{S_n+a_1\}$的公比为$q=2$并写出通项公式，根据a_n,S_n的关系求$\{a_n\}$通项公式，结合等差数列的定义判断$\{\ln a_n\}$为等差数列；

选②③证明①：由$\{\ln a_n\}$为等差数列，设$\frac{a_2}{a_1}=q\left(q\neq 0\right)$写出$\{a_n\}$通项公式，根据等比中项的性质有$\left(S_2+a_1\right)^2=\left(S_1+a_1\right)\left(S_3+a_1\right)$，化简求$q$即可证$a_2=2a_1$.

【详解】

选①②证明③：

设等差数列$\{\ln a_n\}$的公差是d，则$d=\ln a_2-\ln a_1$，又$a_2=2a_1$，

所以$d=\ln\frac{a_2}{a_1}=\ln 2$，即$\ln a_n-\ln a_{n-1}=\ln 2$，$n\ge 2$，

所以$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2$，$n\ge 2$，故$\{a_n\}$是首项为a_1，公比为2的等比数列，

所以$S_n=\frac{a_1\left(1-2^n\right)}{1-2}=a_1 2^n-a_1$，即$S_n+a_1=a_1 2^n$.

设$b_n=S_n+a_1$，则$\frac{b_n}{b_{n-1}}=2$，$n\ge 2$，又$b_1=2a_1>0$，

所以$\{S_n+a_1\}$是首项是$2a_1$，公比为2的等比数列.

选①③证明②：

设等比数列$\{S_n+a_1\}$的公比是$q\left(q\neq 0\right)$，

所以$q=\frac{S_2+a_1}{S_1+a_1}=\frac{2a_1+a_2}{2a_1}$，又$a_2=2a_1$，则$q=2$，又$S_1+a_1=2a_1$，

所以数列$\{S_n+a_1\}$的通项公式为$S_n+a_1=2a_1\cdot 2^{n-1}=a_1\cdot 2^n$，则$S_n=a_1\cdot 2^n-a_1$.

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=a_1 2^n-a_1 2^{n-1}=a_1 2^{n-1}$，又 $n=1$ 时，$a_1=a_1 2^{1-1}$ 符合上式，

所以 $a_n=a_1 2^{n-1}$，$n\in \mathbf{N}$，故 $\ln a_{n+1}-\ln a_n=\ln\left(a_1 2^n\right)-\ln\left(a_1 2^{n-1}\right)=\ln 2$，

所以 $\left\{\ln a_n\right\}$ 是等差数列.

选②③证明①：

因为数列 $\left\{\ln a_n\right\}$ 是等差数列，则 $\ln a_n-\ln a_{n-1}$ 为常数，$n\geq 2$，

所以 $\ln\frac{a_n}{a_{n-1}}$ 为常数，$n\geq 2$，即 $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ 为常数，$n\geq 2$，

令 $\frac{a_2}{a_1}=q\left(q\neq 0\right)$，则 $\left\{a_n\right\}$ 为首项为 a_1，公比为 q 的等比数列，

此时 $a_n=a_1q^{n-1}$.

因为数列 $\left\{S_n+a_1\right\}$ 是等比数列，则 $\left(S_2+a_1\right)^2=\left(S_1+a_1\right)\left(S_3+a_1\right)$，

故 $\left[a_1\left(2+q\right)\right]^2=2a_1\cdot\left[a_1\left(2+q+q^2\right)\right]$，即 $\left(2+q\right)^2=2\left(2+q+q^2\right)$，

化简得 $q^2-2q=0$，因为 $q\neq 0$，解得 $q=2$，

所以 $\frac{a_2}{a_1}=2$，即 $a_2=2a_1$.

5.【答案】(1) $a_n=2n-1$

(2) $T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

【分析】

（1）选①②，用基本量法即可求出通项公式，选③，根据 a_n 和 S_n 的关系即可求解.

(2)利用裂项相消法，即可求解.

【详解】

(1)

解：若选① $a_3=5$，$a_5+a_7=22$，则 $\begin{cases}a_1+2d=5\\2a_1+10d=22\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}$，所以 $a_n=2n-1$；

若选② $a_1=1$，$S_5=25$，则 $\begin{cases}a_1=1\\5a_1+\frac{5\left(5-1\right)}{2}d=25\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}$，所以 $a_n=2n-1$；

若选③ $S_n=n^2$，当 $n=1$ 时 $a_1=S_1=1^2=1$，当 $n\geq 2$ 时 $S_{n-1}=\left(n-1\right)^2$，所以

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-\left(n-1\right)^2=2n-1$，当 $n=1$ 时 $a_n=2n-1$ 也成立，所以 $a_n=2n-1$

(2)

因为 $C_{\mathrm{n}}=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

所以 $T_{\mathrm{n}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

6.【答案】答案见解析

【分析】

选①，根据前n项和求得等比数列的公比，即可得答案；选②，根据前n项和公式求得等比数列的首项和公比，即可得答案；

【详解】

选①：等比数列$\{a_n\}$中，设公比为q, $S_1=a_1=5$，

又$S_3=a_1+a_2+a_3=35$，即$5+5q+5q^2=35$，

解得$q=2$ 或$q=-3$，

故$a_n=5\times2^{n-1}$或$a_n=5\times(-3)^{n-1}$；

选②：$S_6=315$，设公比为q, 若$q=1$，则$a_1=\frac{315}{6}=\frac{105}{2}$，

则$S_3=\frac{315}{2}$，与$S_3=35$矛盾，故$q\neq1$；

故$S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=315, S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=35$，

解得$q=2, a_1=5$，故$a_n=5\times2^{n-1}$；

7.【答案】(1)若选①．$a_n=4n-3$；若选②．$a_n=2^{n-1}$；若选③．$a_n=1$

(2)若选①．n的最大值为7；若选②．n的最大值为6；若选③．n的最大值为100

【分析】

（1）若选①可得$\{a_n\}$是以1为首项，4为公差的等差数列，从而得出通项公式；若选②．先求出首项a_1，然后由递推关系得出$a_n=2a_{n-1}(n\geq2)$，从而可得$\{a_n\}$为等比数列，得出答案；若选③．由递推关系可得$a_{n+1}=a_{n-1}(n\geq2)$，结合条件可得出$\{a_n\}$为常数列，从而得出答案.

（2）根据（1）中选择的条件得出的$\{a_n\}$通项公式，求出S_n，结合$S_n\leq100$通过解不等式可得答案.

【详解】

(1)

若选①．由$a_{n+1}=a_n+4$，即$a_{n+1}-a_n=4$，则$\{a_n\}$是以1为首项，4为公差的等差数列.

所以$a_n=a_1+(n-1)d=1+4\times(n-1)=4n-3$

若选②．由$S_n=2a_n-1$，则当$n=1$时，$S_1=2a_1-1=a_1$，则$a_1=1$

当$n\geq2$时，由$S_n=2a_n-1$，则由$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$

两式相减可得：$a_n=2a_{n-1}(n\geq2)$

所以$\{a_n\}$是以1为首项公比为2的等比数列．则$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$

若选③．由$a_{n+1}+a_n=2$，则$a_n+a_{n-1}=2$，所以$a_{n+1}=a_{n-1}(n\geq2)$

由$a_2+a_1=2$，则$a_2=a_1=1$

所以$\{a_n\}$为常数列，且$a_n=1$

(2)

若选①. $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n(2n-1)$

由$S_n\le 100$，即$n(2n-1)\le 100$，解得$n\le 7$

所以n的最大值为7.

若选②. $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$

由$S_n\le 100$，即$2^n-1\le 100$，解得$n\le 6$

所以n的最大值为6.

若选③. 由$a_n=1$，则$S_n=n$

由$S_n\le 100$，即$n\le 100$，所以n的最大值为100.

8.【答案】(1) $n=8$；

(2) $\frac{35}{8}x$.

【分析】

（1）写出二项式展开式通项公式，根据所选的条件列方程求n值.

（2）由（1）所得n及展开式通项公式判断确定最大项，进而写出最大项.

【详解】

(1)

展开式第$r+1$项为$T_{r+1}=C_n^r\left(\sqrt{x}\right)^{n-r}\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^r=\left(\frac{1}{2}\right)^r C_n^r x^{\frac{2n-3r}{4}}$，$r=0,1,2\cdots,n$，

选①：展开式前三项的系数为1，$\frac{1}{2}C_n^1$，$\frac{1}{4}C_n^2$，

据题意得：$2\times\frac{1}{2}C_n^1=1+\frac{1}{4}C_n^2$，可得$n=8$；

选②：展开式第三项的系数为$\frac{1}{4}\times C_n^2=7$，可得$\frac{n(n-1)}{8}=7$，所以$n=8$；

选③：令$2^{n-1}=128=2^7$，所以$n=8$.

(2)

展开式一共有9项，二项式系数最大的项为第5项，则$T_5=T_{4+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^4 C_8^4 x^{\frac{16-3\times 4}{4}}=\frac{35}{8}x$.

9.【答案】(1)条件选择见解析，$a_n=3n-1$

(2) $T_n=\frac{n}{2(3n+2)}$

【分析】

（1）选①，可推导出数列$\{a_n\}$为等差数列，确定该数列的首项和公差，即可求得数列$\{a_n\}$的通项公式；