宜宾七年级下册数学期末试卷达标检测卷（Word版 含解析）

一、解答题

1．如图，直线$PQ//MN$，一副直角三角板$\Delta ABC,\Delta DEF$中，

$\angle ACB=\angle EDF=90^{\circ},\angle ABC=\angle BAC=45^{\circ},\angle DFE=30^{\circ},\angle DEF=60^{\circ}$．

（1）若ΔDEF如图1摆放，当ED平分$\angle PEF$时，证明：FD平分$\angle EFM$．

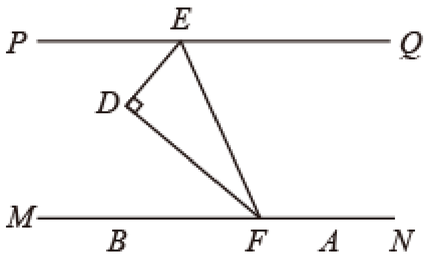


图1

（2）若$\Delta ABC,\Delta DEF$如图2摆放时，则$\angle PDE=$

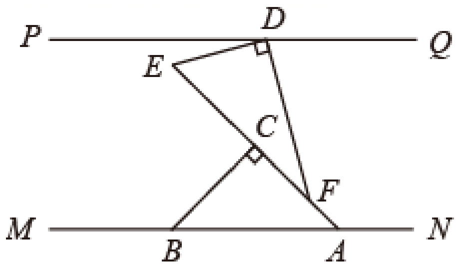


图2

（3）若图2中ΔABC固定，将ΔDEF沿着AC方向平移，边DF与直线PQ相交于点G，作$\angle FGQ$和$\angle GFA$的角平分线GH、FH相交于点H（如图3），求$\angle GHF$的度数.

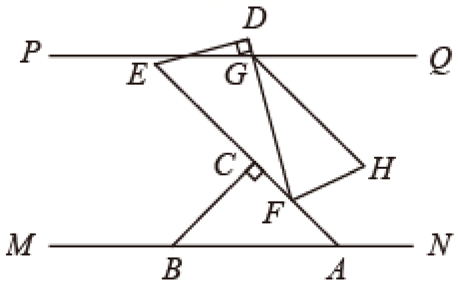


图3

（4）若图2中ΔDEF的周长$35cm,AF=5cm$，现将ΔABC固定，将ΔDEF沿着CA方向平移至点F与A重合，平移后的得到$\Delta D'E'A$，点D、E的对应点分别是D'、E'，请直接写出四边形$DEAD'$的周长.

（5）若图2中ΔDEF固定，（如图4）将ΔABC绕点A顺时针旋转，1分钟转半圈，旋转至AC与直线AN首次重合的过程中，当线段BC与ΔDEF的一条边平行时，请直接写出旋转的时间.

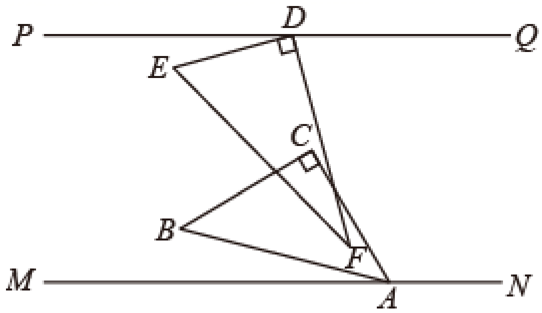
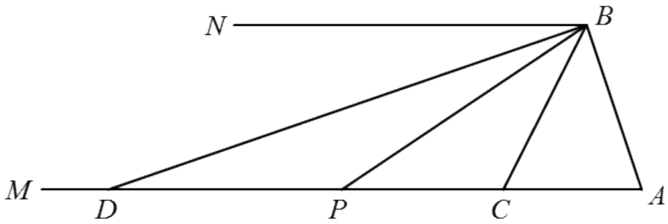


图4

2．如图，已知 $AM // BN$，点 P 是射线 AM 上一动点（与点A不重合），BC、BD 分别平分 $\angle ABP$ 和 $\angle PBN$，分别交射线 AM 于点 C,D．



（1）当 $\angle A=60°$ 时，$\angle ABN$ 的度数是________；

（2）当 $\angle A=x°$，求 $\angle CBD$ 的度数（用 x 的代数式表示）；

（3）当点 P 运动时，$\angle ADB$ 与 $\angle APB$ 的度数之比是否随点 P 的运动而发生变化?若不变化，请求出这个比值；若变化，请写出变化规律.

（4）当点 P 运动到使 $\angle ACB=\angle ABD$ 时，请直接写出 $\angle DBN+\frac{1}{4}\angle A$ 的度数.

3．如图，$MN//PQ$，直线 AD 与 MN、PQ 分别交于点A、D，点 B 在直线 PQ 上，过点 B 作 $BG\perp AD$，垂足为点 G．

（1）如图1，求证：$\angle MAG+\angle PBG=90°$；

（2）若点 C 在线段 AD 上（不与A、D、G 重合），连接 BC，$\angle MAG$ 和 $\angle PBC$ 的平分线交于点 H 请在图2中补全图形，猜想并证明 $\angle CBG$ 与 $\angle AHB$ 的数量关系；

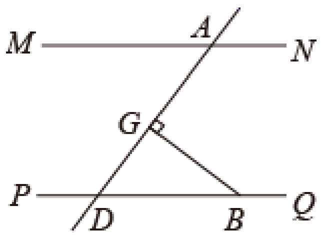


图1

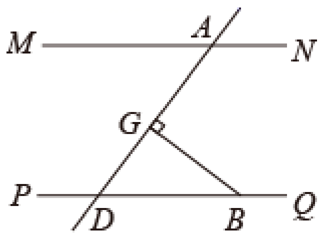
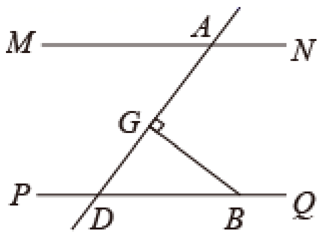
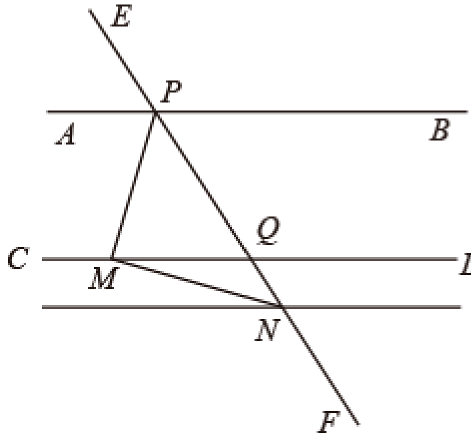


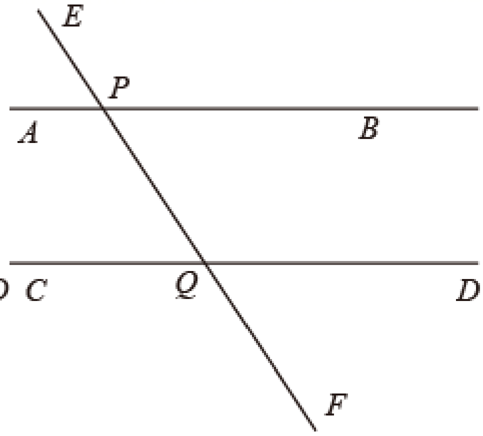
图2



备用图

4．已知：如图，直线 $AB//CD$，直线 EF 交 AB，CD 于 P，Q 两点，点 M，点 N 分别是直线 CD，EF 上一点（不与 P，Q 重合），连接 PM，MN．





备用图

（1）点 M，N 分别在射线 QC，QF 上（不与点 Q 重合），当$\angle APM+\angle QMN=90°$时，

①试判断 PM 与 MN 的位置关系，并说明理由；

②若 PA 平分$\angle EPM$，$\angle MNQ=20°$，求$\angle EPB$ 的度数．（提示：过 N 点作 AB 的平行线）

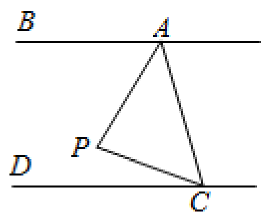
（2）点 M，N 分别在直线 CD，EF 上时，请你在备用图中画出满足 $PM\perp MN$ 条件的图形，并直接写出此时$\angle APM$ 与$\angle QMN$ 的关系．（注：此题说理时不能使用没有学过的定理）

5．直线 $AB\parallel CD$，点 P 为平面内一点，连接 AP，CP．

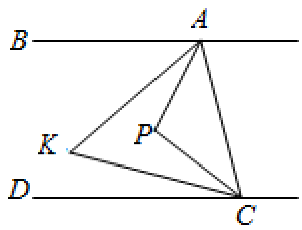
（1）如图①，点 P 在直线 AB，CD 之间，当$\angle BAP=60°$，$\angle DCP=20°$时，求$\angle APC$ 的度数；

（2）如图②，点 P 在直线 AB，CD 之间，$\angle BAP$ 与$\angle DCP$ 的角平分线相交于 K，写出$\angle AKC$ 与$\angle APC$ 之间的数量关系，并说明理由；

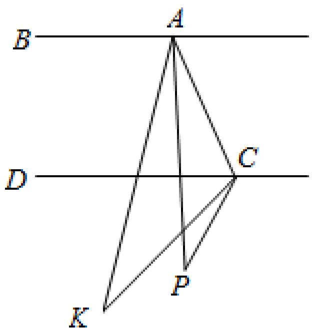
（3）如图③，点 P 在直线 CD 下方，当$\angle BAK=\dfrac{2}{3}\angle BAP$，$\angle DCK=\dfrac{2}{3}\angle DCP$ 时，写出$\angle AKC$ 与$\angle APC$ 之间的数量关系，并说明理由．



图①



图②



图③

二、解答题

6．如图 1，由线段 AB, AM, CM, CD 组成的图形像英文字母 M，称为“M 形 $BAMCD$”．

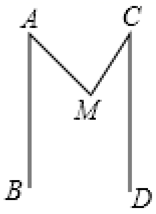


图1

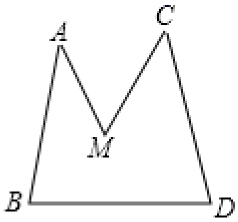


图2

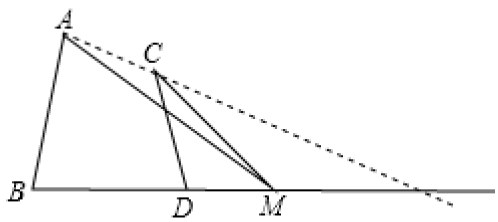


图3

（1）如图 1，M 形 $BAMCD$ 中，若 $AB//CD,\angle A+\angle C=50^\circ$，则 $\angle M=$______；

（2）如图 2，连接 M 形 $BAMCD$ 中 B,D 两点，若 $\angle B+\angle D=150^\circ,\angle AMC=\alpha$，试探求 $\angle A$ 与 $\angle C$ 的数量关系，并说明理由；

（3）如图 3，在（2）的条件下，且 AC 的延长线与 BD 的延长线有交点，当点 M 在线段 BD 的延长线上从左向右移动的过程中，直接写出 $\angle A$ 与 $\angle C$ 所有可能的数量关系．

7．为了安全起见在某段铁路两旁安置了两座可旋转探照灯．如图 1 所示，灯 A 射线从 AM 开始顺时针旋转至 AN 便立即回转，灯 B 射线从 BP 开始顺时针旋转至 BQ 便立即回转，两灯不停交叉照射巡视．若灯 A 转动的速度是每秒 2 度，灯 B 转动的速度是每秒 1 度．假定主道路是平行的，即 $PQ//MN$，且 $\angle BAM:\angle BAN=3:2$．

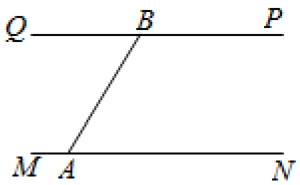


图 1

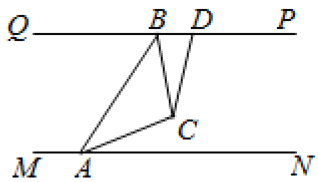


图 2

（1）填空：$\angle BAN=$________；

（2）若灯 B 射线先转动 30 秒，灯 A 射线才开始转动，在灯 B 射线到达 BQ 之前，A 灯转动几秒，两灯的光束互相平行？

（3）如图 2，若两灯同时转动，在灯 A 射线到达 AN 之前．若射出的光束交于点 C，过 C 作 $\angle ACD$ 交 PQ 于点 D，且 $\angle ACD=126^\circ$，则在转动过程中，请探究 $\angle BAC$ 与 $\angle BCD$ 的数量关系是否发生变化？若不变，请求出其数量关系；若改变，请说明理由．

8．已知 $PQ//MN$，将一副三角板中的两块直角三角板如图 1 放置，
$\angle ACB=\angle EDF=90^\circ$，$\angle ABC=\angle BAC=45^\circ$，$\angle DFE=30^\circ$，$\angle DEF=60^\circ$．

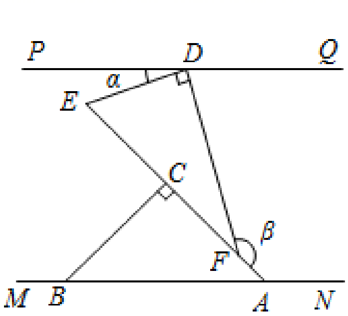


图1

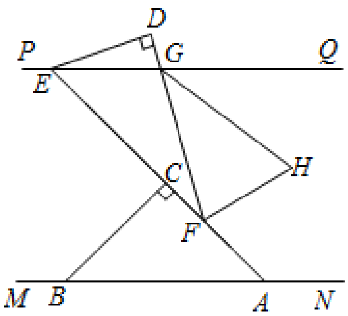


图2

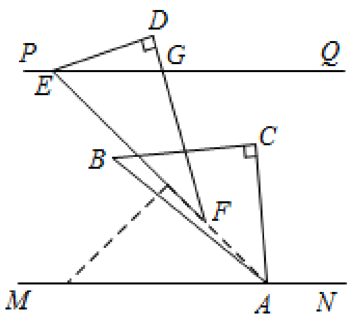


图3

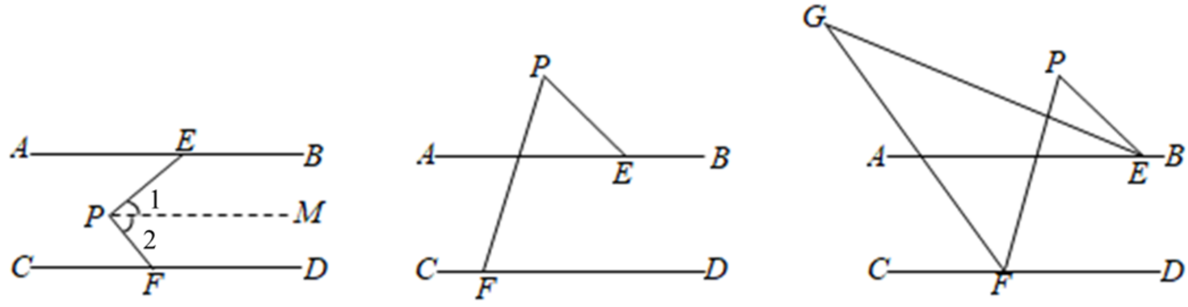
（1）若三角板如图 1 摆放时，则 $\angle\alpha=$______，$\angle\beta=$______．

（2）现固定 $\triangle ABC$ 的位置不变，将 $\triangle DEF$ 沿 AC 方向平移至点 E 正好落在 PQ

上，如图 2 所示，DF 与 PQ 交于点 G，作 $\angle FGQ$ 和 $\angle GFA$ 的角平分线交于点 H，求 $\angle GHF$ 的度数；

（3）现固定 $\triangle DEF$，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转至 AC 与直线 AN 首次重合的过程中，当线段 BC 与 $\triangle DEF$ 的一条边平行时，请直接写出 $\angle BAM$ 的度数．

9．（感知）如图①，$AB//CD,\angle AEP=40^{\circ},\angle PFD=130^{\circ}$，求 $\angle EPF$ 的度数．小明想到了以下方法：



图①　　图②　　图③

解：如图①，过点 P 作 $PM//AB$，

$\therefore \angle 1=\angle AEP=40^{\circ}$（两直线平行，内错角相等）

$\because AB//CD$（已知），

$\therefore PM//CD$（平行于同一条直线的两直线平行），

$\therefore \angle 2+\angle PFD=180^{\circ}$（两直线平行，同旁内角互补）．

$\because \angle PFD=130^{\circ}$（已知），

$\therefore \angle 2=180^{\circ}-130^{\circ}=50^{\circ}$（等式的性质）．

$\therefore \angle 1+\angle 2=40^{\circ}+50^{\circ}=90^{\circ}$（等式的性质）．

即 $\angle EPF=90^{\circ}$（等量代换）．

（探究）如图②，$AB//CD$，$\angle AEP=50^{\circ},\angle PFC=120^{\circ}$，求 $\angle EPF$ 的度数．

（应用）如图③所示，在（探究）的条件下，$\angle PEA$ 的平分线和 $\angle PFC$ 的平分线交于点 G，则 $\angle G$ 的度数是_______________$^{\circ}$．

10．问题情境

（1）如图 1，已知 $AB//CD$，$\angle PBA=125^{\circ}$，$\angle PCD=155^{\circ}$，求 $\angle BPC$ 的度数．佩佩同学的思路：过点 P 作 $PG//AB$，进而 $PG//CD$，由平行线的性质来求 $\angle BPC$，求得 $\angle BPC=$________．

问题迁移

（2）图 2．图 3 均是由一块三角板和一把直尺拼成的图形，三角板的两直角边与直尺的两边重合，$\angle ACB=90^{\circ}$，$DF//CG$，AB 与 FD 相交于点 E，有一动点 P 在边 BC 上运动，连接 PE，PA，记 $\angle PED=\angle\alpha$，$\angle PAC=\angle\beta$．

①如图 2，当点 P 在 C，D 两点之间运动时，请直接写出 $\angle AOE$ 与 $\angle\alpha$，$\angle\beta$ 之间的数量关系；

②如图 3，当点 P 在 B，D 两点之间运动时，$\angle APE$ 与 $\angle\alpha$，$\angle\beta$ 之间有何数量关系？请判断并说明理由；拓展延伸

（3）当点P在C，D两点之间运动时，若$\angle PED$，$\angle PAC$的角平分线EN，AN相交于点

N，请直接写出$\angle ANE$与$\angle\alpha$，$\angle\beta$之间的数量关系．

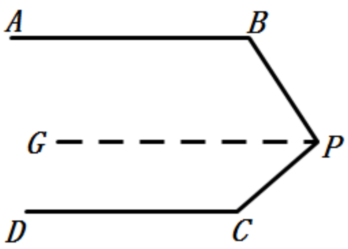


图 1

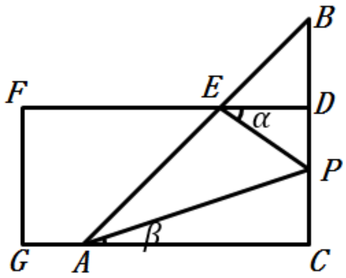


图 2

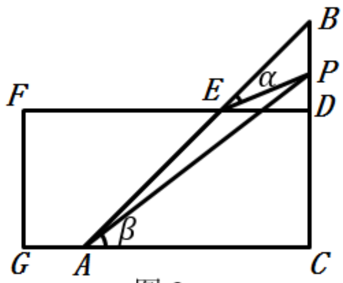
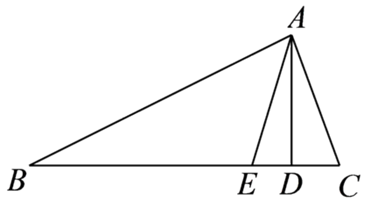


图 3

三、解答题

11．如图，在$\triangle ABC$中，AD是高，AE是角平分线，$\angle B=20^\circ$，$\angle C=60^\circ$．



（1）求$\angle CAD$、$\angle AEC$和$\angle EAD$的度数．

（2）若图形发生了变化，已知的两个角度数改为：当$\angle B=30^\circ$，$\angle C=60^\circ$，则$\angle EAD=$__________$^\circ$．

当$\angle B=50^\circ$，$\angle C=60^\circ$时，则$\angle EAD=$__________$^\circ$．

当$\angle B=60^\circ$，$\angle C=60^\circ$时，则$\angle EAD=$__________$^\circ$．

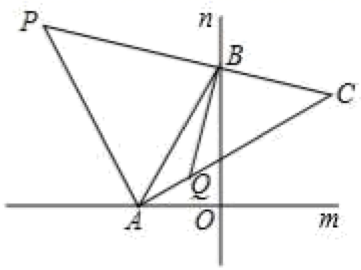
当$\angle B=70^\circ$，$\angle C=60^\circ$时，则$\angle EAD=$__________$^\circ$．

（3）若ÐB和$\angle C$的度数改为用字母α和β来表示，你能找到$\angle EAD$与α和β之间的关系吗？请直接写出你发现的结论．

12．如图，直线 m 与直线 n 互相垂直，垂足为 O、A、B 两点同时从点 O 出发，点 A 沿直线 m 向左运动，点 B 沿直线 n 向上运动．

(1)若∠BAO 和∠ABO 的平分线相交于点 Q，在点 A，B 的运动过程中，∠AQB 的大小是否会发生变化？若不发生变化，请求出其值，若发生变化，请说明理由．

(2)若 AP 是∠BAO 的邻补角的平分线，BP 是∠ABO 的邻补角的平分线，AP、BP 相交于点 P，AQ 的延长线交 PB 的延长线于点 C，在点 A，B 的运动过程中，∠P 和∠C 的大小是否会发生变化？若不发生变化，请求出∠P 和∠C 的度数；若发生变化，请说明理由．

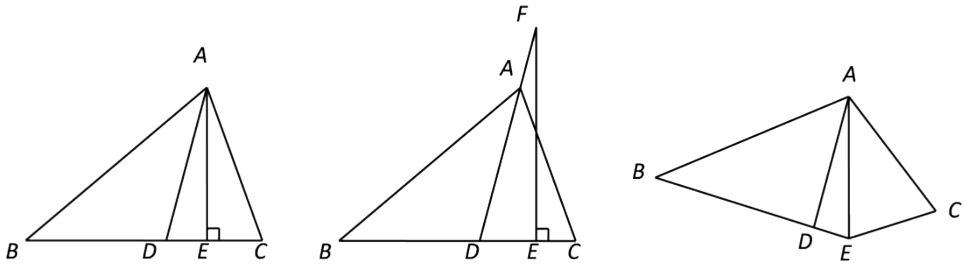


13．如图①，AD平分$\angle BAC$，$AE\perp BC$，∠B=45^0,∠C=73^0．

（1）求$\angle DAE$的度数；

（2） 如图②，若把“$AE\perp BC$”变成“点 F 在 DA 的延长线上，$FE\perp BC$”，其它条件不变，求$\angle DFE$ 的度数；

（3） 如图③，若把“$AE\perp BC$”变成“AE 平分$\angle BEC$”，其它条件不变，$\angle DAE$ 的大小是否变化，并请说明理由．



①　　　　②　　　　③

14． 如图，△ABC 和△ADE 有公共顶点 A，∠ACB＝∠AED＝90°，∠BAC=45°，∠DAE=30°．

（1）若 DE//AB，则∠EAC＝_____；

（2）如图 1，过 AC 上一点 O 作 OG⊥AC，分别交 AB、AD、AE 于点 G、H、F．

①若 AO＝2，$S_{\triangle AGH}$＝4，$S_{\triangle AHF}$＝1，求线段 OF 的长；

②如图 2，∠AFO 的平分线和∠AOF 的平分线交于点 M，∠FHD 的平分线和∠OGB 的平分线交于点 N，∠N+∠M 的度数是否发生变化？若不变，求出其度数；若改变，请说明理由．

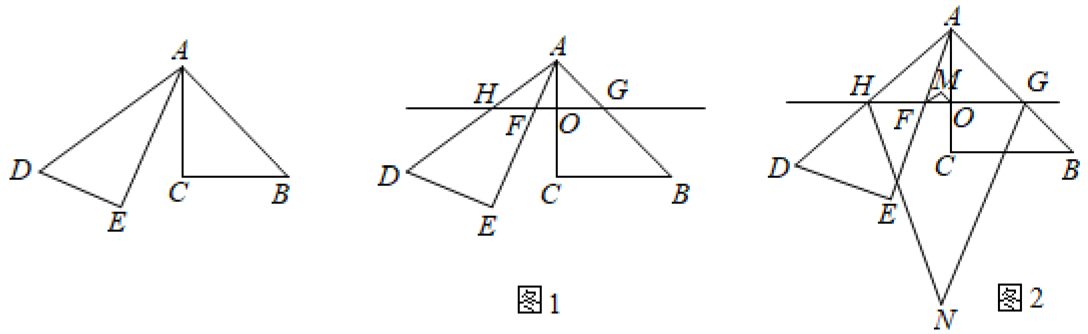


图1　　图2

15． 如图，直线$PQ//MN$，一副直角三角板$\Delta ABC,\Delta DEF$ 中，

$\angle ACB=\angle EDF=90^{\circ},\angle ABC=\angle BAC=45^{\circ},\angle DFE=30^{\circ},\angle DEF=60^{\circ}$．

（1）若ΔDEF 如图 1 摆放，当ED 平分$\angle PEF$ 时，证明：FD 平分$\angle EFM$．

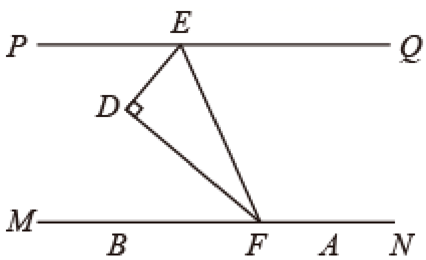


图1

（2）若$\Delta ABC,\Delta DEF$ 如图 2 摆放时，则$\angle PDE=$

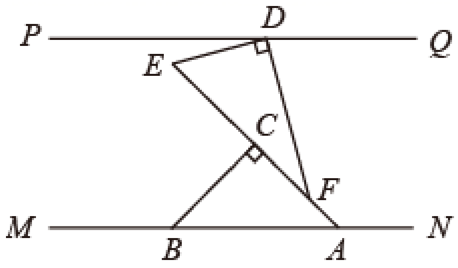


图2

（3）若图 2 中 ΔABC 固定，将 ΔDEF 沿着 AC 方向平移，边 DF 与直线 PQ 相交于点 G，作 $\angle FGQ$ 和 $\angle GFA$ 的角平分线 GH、FH 相交于点 H（如图 3），求 $\angle GHF$ 的度数.

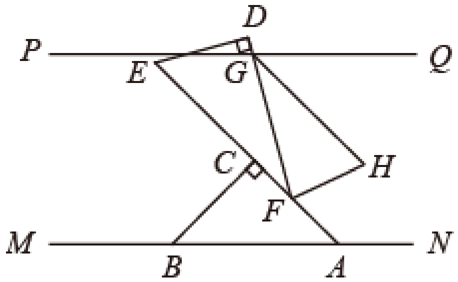


图3

（4）若图 2 中 ΔDEF 的周长 $35cm, AF=5cm$，现将 ΔABC 固定，将 ΔDEF 沿着 CA 方向平移至点 F 与 A 重合，平移后的得到 $\Delta D'E'A$，点 D、E 的对应点分别是 D'、E'，请直接写出四边形 $DEAD'$ 的周长.

（5）若图 2 中 ΔDEF 固定，（如图 4）将 ΔABC 绕点 A 顺时针旋转，1分钟转半圈，旋转至 AC 与直线 AN 首次重合的过程中，当线段 BC 与 ΔDEF 的一条边平行时，请直接写出旋转的时间.

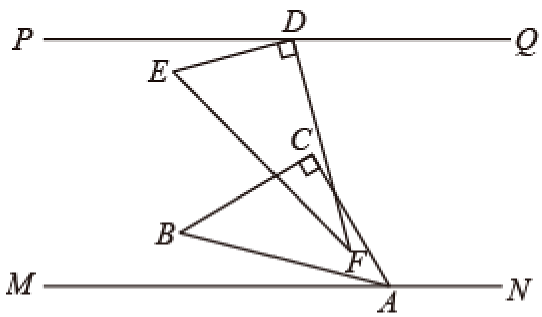


图4

【参考答案】

一、解答题

1. （1）见详解；（2）15°；（3）67.5°；（4）45cm；（5）10s 或 30s 或 40s

【分析】

（1）运用角平分线定义及平行线性质即可证得结论；

（2）如图 2，过点 E 作 EK∥MN，利用平行线性

解析：（1）见详解；（2）15°；（3）67.5°；（4）45cm；（5）10s 或 30s 或 40s

【分析】

（1）运用角平分线定义及平行线性质即可证得结论；
（2）如图 2，过点 E 作 $EK\parallel MN$，利用平行线性质即可求得答案；
（3）如图 3，分别过点 F、H 作 $FL\parallel MN$，$HR\parallel PQ$，运用平行线性质和角平分线定义即可得出答案；
（4）根据平移性质可得 $D'A=DF$，$DD'=EE'=AF=5$cm，再结合 $DE+EF+DF=35$cm，可得出答案；
（5）设旋转时间为 t 秒，由题意旋转速度为 1 分钟转半圈，即每秒转 3°，分三种情况：①当 $BC\parallel DE$ 时，②当 $BC\parallel EF$ 时，③当 $BC\parallel DF$ 时，分别求出旋转角度后，列方程求解即可．

【详解】

（1）如图 1，在△DEF 中，$\angle EDF=90°$，$\angle DFE=30°$，$\angle DEF=60°$，

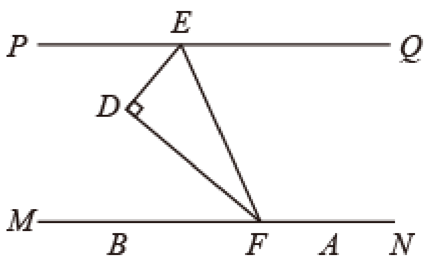


图1

$\because ED$ 平分$\angle PEF$，
$\therefore \angle PEF=2\angle PED=2\angle DEF=2\times60°=120°$，
$\because PQ\parallel MN$，
$\therefore \angle MFE=180°-\angle PEF=180°-120°=60°$，
$\therefore \angle MFD=\angle MFE-\angle DFE=60°-30°=30°$，
$\therefore \angle MFD=\angle DFE$，
$\therefore FD$ 平分$\angle EFM$；
（2）如图 2，过点 E 作 $EK\parallel MN$，

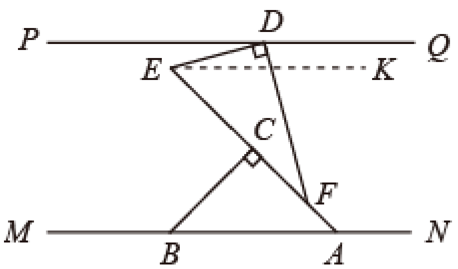


图2

$\because \angle BAC=45°$，
$\therefore \angle KEA=\angle BAC=45°$，
$\because PQ\parallel MN$，$EK\parallel MN$，
$\therefore PQ\parallel EK$，

$\therefore \angle PDE = \angle DEK = \angle DEF - \angle KEA$，

又$\because \angle DEF = 60°$.

$\therefore \angle PDE = 60° - 45° = 15°$，

故答案为：15°；

（3）如图 3，分别过点 F、H 作 $FL \parallel MN$，$HR \parallel PQ$，

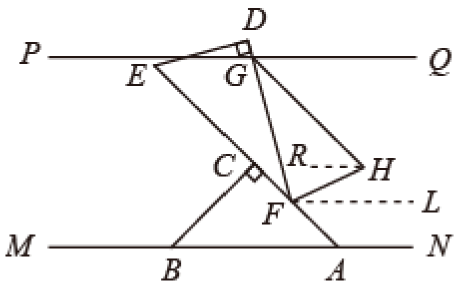


图3

$\therefore \angle LFA = \angle BAC = 45°$，$\angle RHG = \angle QGH$，

$\because FL \parallel MN$，$HR \parallel PQ$，$PQ \parallel MN$，

$\therefore FL \parallel PQ \parallel HR$，

$\therefore \angle QGF + \angle GFL = 180°$，$\angle RHF = \angle HFL = \angle HFA - \angle LFA$，

$\because \angle FGQ$ 和$\angle GFA$ 的角平分线 GH、FH 相交于点 H，

$\therefore \angle QGH = \frac{1}{2}\angle FGQ$，$\angle HFA = \frac{1}{2}\angle GFA$，

$\because \angle DFE = 30°$，

$\therefore \angle GFA = 180° - \angle DFE = 150°$，

$\therefore \angle HFA = \frac{1}{2}\angle GFA = 75°$，

$\therefore \angle RHF = \angle HFL = \angle HFA - \angle LFA = 75° - 45° = 30°$，

$\therefore \angle GFL = \angle GFA - \angle LFA = 150° - 45° = 105°$，

$\therefore \angle RHG = \angle QGH = \frac{1}{2}\angle FGQ = \frac{1}{2}$（$180° - 105°$）$= 37.5°$，

$\therefore \angle GHF = \angle RHG + \angle RHF = 37.5° + 30° = 67.5°$；

（4）如图 4，$\because$将$\triangle DEF$ 沿着 CA 方向平移至点 F 与 A 重合，平移后的得到$\triangle D'E'A$，

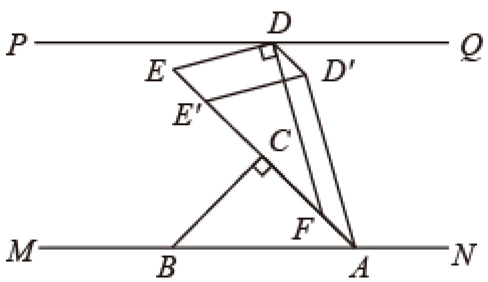


图4

$\therefore D'A = DF$，$DD' = EE' = AF = 5$cm，

$\because DE + EF + DF = 35$cm，

$\therefore DE + EF + D'A + AF + DD' = 35 + 10 = 45$（cm），

即四边形 $DEAD'$的周长为 45cm；

（5）设旋转时间为 t 秒，由题意旋转速度为 1 分钟转半圈，即每秒转 3°，

分三种情况：

$BC \parallel DE$ 时，如图 5，此时 $AC \parallel DF$，

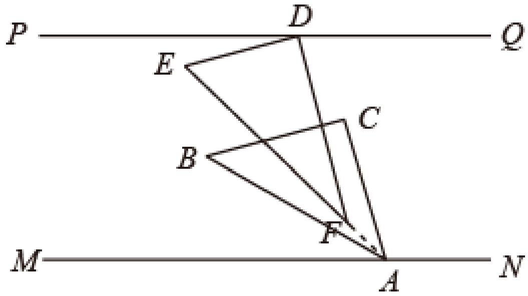


图5

∴∠CAE＝∠DFE＝30°，

∴$3t$＝30，

解得：t＝10；

$BC \parallel EF$ 时，如图 6，

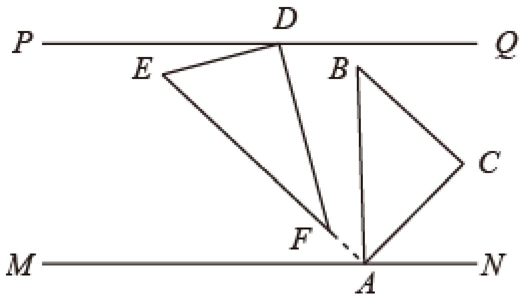


图6

∵$BC \parallel EF$，

∴∠BAE＝∠B＝45°，

∴∠BAM＝∠BAE＋∠EAM＝45°＋45°＝90°，

∴$3t$＝90，

解得：t＝30；

$BC \parallel DF$ 时，如图 7，延长 BC 交 MN 于 K，延长 DF 交 MN 于 R，

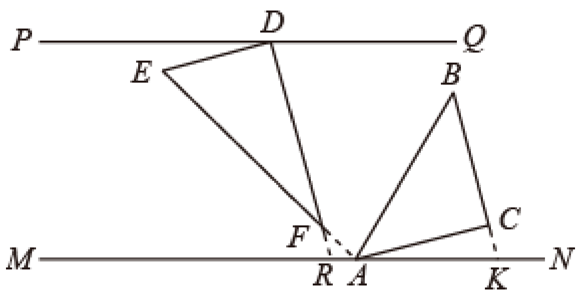


图7

∵∠DRM＝∠EAM＋∠DFE＝45°＋30°＝75°，

∴∠BKA＝∠DRM＝75°，

∵$\angle ACK=180°-\angle ACB=90°$，

∴$\angle CAK=90°-\angle BKA=15°$，

∴$\angle CAE=180°-\angle EAM-\angle CAK=180°-45°-15°=120°$，

∴$3t=120$，

解得：$t=40$，

综上所述，△*ABC* 绕点 *A* 顺时针旋转的时间为 10s 或 30s 或 40s 时，线段 *BC* 与△*DEF* 的一条边平行．

【点睛】

本题主要考查了平行线性质及判定，角平分线定义，平移的性质等，添加辅助线，利用平行线性质是解题关键．

2．（1）120°；（2）90°-x°；（3）不变，；（4）45°

【分析】

（1）由平行线的性质：两直线平行同旁内角互补可得；

（2）由平行线的性质可得∠ABN=180°-x°，根据角平分线的定义知∠

解析：（1）120°；（2）$90°-\frac{1}{2}x°$；（3）不变，$\frac{1}{2}$；（4）45°

【分析】

（1）由平行线的性质：两直线平行同旁内角互补可得；

（2）由平行线的性质可得$\angle ABN=180°-x°$，根据角平分线的定义知$\angle ABP=2\angle CBP$、$\angle PBN=2\angle DBP$，可得 $2\angle CBP+2\angle DBP=180°-x°$，即$\angle CBD=\angle CBP+\angle DBP=90°-\frac{1}{2}x°$；

（3）由 $AM\parallel BN$ 得$\angle APB=\angle PBN$、$\angle ADB=\angle DBN$，根据 *BD* 平分$\angle PBN$ 知$\angle PBN=2\angle DBN$，从而可得$\angle APB$：$\angle ADB=2$：1；

（4）由 $AM\parallel BN$ 得$\angle ACB=\angle CBN$，当$\angle ACB=\angle ABD$ 时有$\angle CBN=\angle ABD$，得$\angle ABC+\angle CBD=\angle CBD+\angle DBN$，即$\angle ABC=\angle DBN$，根据角平分线的定义可得$\angle ABP=\angle PBN=\frac{1}{2}\angle ABN=2\angle DBN$，由平行线的性质可得$\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle ABN=90°$，即可得出答案．

【详解】

解：（1）∵$AM\parallel BN$，$\angle A=60°$，

∴$\angle A+\angle ABN=180°$，

∴$\angle ABN=120°$；

（2）∵$AM\parallel BN$，

∴$\angle ABN+\angle A=180°$，

∴$\angle ABN=180°-x°$，

∴$\angle ABP+\angle PBN=180°-x°$，

∵*BC* 平分$\angle ABP$，*BD* 平分$\angle PBN$，

∴$\angle ABP=2\angle CBP$，$\angle PBN=2\angle DBP$，

∴$2\angle CBP+2\angle DBP=180°-x°$，

∴$\angle CBD=\angle CBP+\angle DBP=\frac{1}{2}$（$180°-x°$）$=90°-\frac{1}{2}x°$；

（3）不变，$\angle ADB$：$\angle APB=\frac{1}{2}$．

∵$AM\parallel BN$，

∴$\angle APB=\angle PBN$，$\angle ADB=\angle DBN$，

∵BD 平分$\angle PBN$，

∴$\angle PBN=2\angle DBN$，

∴$\angle APB$：$\angle ADB=2$：1，

∴$\angle ADB$：$\angle APB=\frac{1}{2}$；

（4）∵$AM\parallel BN$，

∴$\angle ACB=\angle CBN$，

当$\angle ACB=\angle ABD$ 时，则有$\angle CBN=\angle ABD$，

∴$\angle ABC+\angle CBD=\angle CBD+\angle DBN$，

∴$\angle ABC=\angle DBN$，

∵BC 平分$\angle ABP$，BD 平分$\angle PBN$，

∴$\angle ABP=2\angle ABC$，$\angle PBN=2\angle DBN$，

∴$\angle ABP=\angle PBN=2\angle DBN=\frac{1}{2}\angle ABN$，

∵$AM\parallel BN$，

∴$\angle A+\angle ABN=180°$，

∴$\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle ABN=90°$，

∴$\frac{1}{2}\angle A+2\angle DBN=90°$，

∴$\frac{1}{4}\angle A+\angle DBN=\frac{1}{2}$（$\frac{1}{2}\angle A+2\angle DBN$）$=45°$．

【点睛】

本题主要考查平行线的性质和角平分线的定义，熟练掌握平行线的性质是解题的关键．

3．（1）证明见解析；（2）补图见解析；当点在上时，；当点在上时，．

【分析】

（1）过点作，根据平行线的性质即可求解；

（2）分两种情况：当点在上，当点在上，再过点作即可求解．

【详解】

（1）证明：

解析：（1）证明见解析；（2）补图见解析；当点C在AG上时，$2\angle AHB-\angle CBG=90°$；当点$C$在$DG$上时，$2\angle AHB+\angle CBG=90°$．

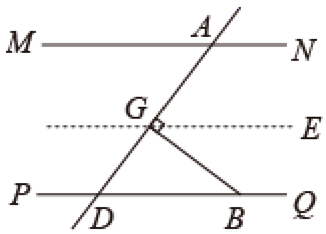
【分析】

（1）过点G作$GE//MN$，根据平行线的性质即可求解；

（2）分两种情况：当点C在AG上，当点C在DG上，再过点H作$HF//MN$即可求解．

【详解】

（1）证明：如图，过点G作$GE//MN$，



$\therefore \angle MAG = \angle AGE$，

$\because MN // PQ$，

$\therefore GE // PQ$．

$\therefore \angle PBG = \angle BGE$．

$\because BG \perp AD$，

$\therefore \angle AGB = 90^\circ$，

$\therefore \angle MAG + \angle PBG = \angle AGE + \angle BGE = \angle AGB = 90^\circ$．

（2）补全图形如图 2、图 3，

猜想：$2\angle AHB - \angle CBG = 90^\circ$ 或 $2\angle AHB + \angle CBG = 90^\circ$．

证明：过点 H 作 $HF // MN$．

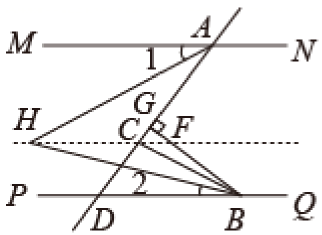


图2

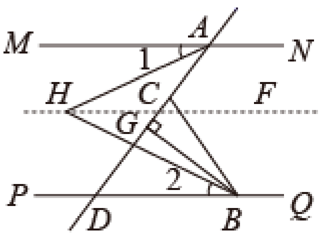


图3

$\therefore \angle 1 = \angle AHF$．

$\because MN // PQ$，

$\therefore HF // PQ$

$\therefore \angle 2 = \angle BHF$，

$\therefore \angle AHB = \angle AHF + \angle BHF = \angle 1 + \angle 2$．

$\because AH$ 平分 $\angle MAG$，

$\therefore \angle MAG = 2\angle 1$．

如图 3，当点 C 在 AG 上时，

$\because BH$ 平分 $\angle PBC$，

$\therefore \angle PBC = \angle PBG + \angle CBG = 2\angle 2$，

$\because MN // PQ$，

$\therefore \angle MAG = \angle GDB$，

$\therefore 2\angle AHB = 2\angle 1 + 2\angle 2 = \angle MAG + \angle PBG + \angle CBG$

$= \angle GDB + \angle PBG + \angle CBG$

$= 90^\circ + \angle CBG$

即 $2\angle AHB - \angle CBG = 90^\circ$．

如图 2，当点 C 在 DG 上时，

$\because BH$ 平分 $\angle PBC$，

$\therefore \angle PBC=\angle PBG-\angle CBG=2\angle 2$.

$\therefore 2\angle AHB=2\angle 1+2\angle 2=\angle MAG+\angle PBG-\angle CBG=90^\circ-\angle CBG$.

即 $2\angle AHB+\angle CBG=90^\circ$.

【点睛】

本题考查了平行线的基本性质、角平分线的基本性质及角的运算，解题的关键是准确作出平行线，找出角与角之间的数量关系.

4. （1）①PM⊥MN，理由见解析；②∠EPB 的度数为 125°；（2）∠APM +∠QMN=90°或∠APM -∠QMN=90°.

【分析】

（1）①利用平行线的性质得到∠APM=∠PMQ，再根据已知条

解析：（1）①*PM*⊥*MN*，理由见解析；②∠*EPB* 的度数为 125°；（2）∠*APM* +∠*QMN*=90°或∠*APM* -∠*QMN*=90°.

【分析】

（1）①利用平行线的性质得到∠*APM*=∠*PMQ*，再根据已知条件可得到 *PM*⊥*MN*；

②过点 *N* 作 *NH*∥*CD*，利用角平分线的定义以及平行线的性质求得∠*MNH*=35°，即可求解；

（2）分三种情况讨论，利用平行线的性质即可解决.

【详解】

解：（1）①*PM*⊥*MN*，理由见解析：

∵*AB*//*CD*，

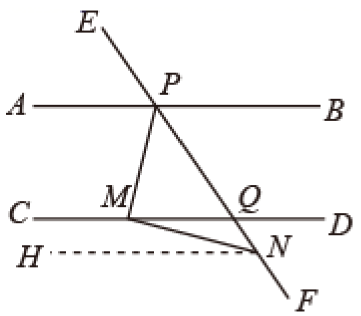
∴∠*APM*=∠*PMQ*，

∵∠*APM*+∠*QMN*=90°，

∴∠*PMQ* +∠*QMN*=90°，

∴*PM*⊥*MN*；

②过点 *N* 作 *NH*∥*CD*，



∵*AB*//*CD*，

∴*AB*// *NH*∥*CD*，

∴∠*QMN*=∠*MNH*，∠*EPA*=∠*ENH*，

∵*PA* 平分∠*EPM*，

∴∠*EPA*=∠ *MPA*，

∵∠*APM*+∠*QMN*=90°，

∴∠*EPA* +∠*MNH*=90°，即∠*ENH* +∠*MNH*=90°，

∴∠*MNQ* +∠*MNH* +∠*MNH*=90°，

∵$\angle MNQ=20°$，

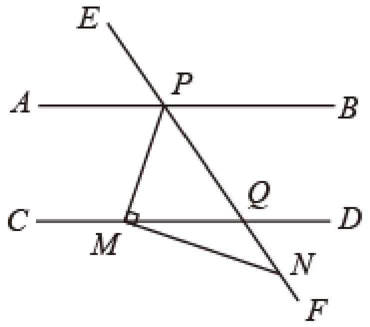
∴$\angle MNH=35°$，

∴$\angle EPA=\angle ENH=\angle MNQ+\angle MNH=55°$，

∴$\angle EPB=180°-55°=125°$，

∴$\angle EPB$ 的度数为 125°；

（2）当点 M，N 分别在射线 QC，QF 上时，如图：

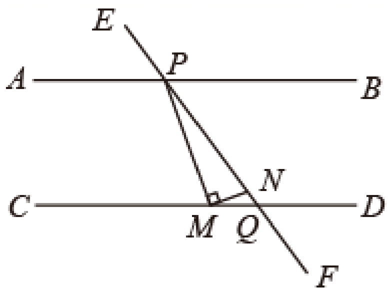


∵$PM\perp MN$，$AB//CD$，

∴$\angle PMQ+\angle QMN=90°$，$\angle APM=\angle PMQ$，

∴$\angle APM+\angle QMN=90°$；

当点 M，N 分别在射线 QC，线段 PQ 上时，如图：



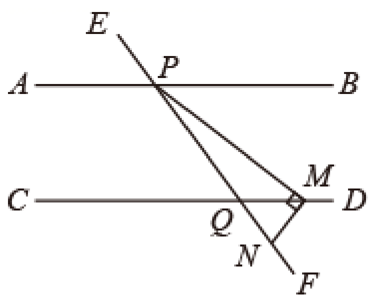
∵$PM\perp MN$，$AB//CD$，

∴$\angle PMN=90°$，$\angle APM=\angle PMQ$，

∴$\angle PMQ-\angle QMN=90°$，

∴$\angle APM-\angle QMN=90°$；

当点 M，N 分别在射线 QD，QF 上时，如图：



∵$PM\perp MN$，$AB//CD$，

∴$\angle PMQ+\angle QMN=90°$，$\angle APM+\angle PMQ=180°$，

∴$\angle APM+90°-\angle QMN=180°$，

∴$\angle APM-\angle QMN=90°$；