

## 摘要

大规模多输入多输出 (Multiple Input Multiple Output, MIMO) 技术作为第五代移动通信 (Fifth Generation, 5G) 关键技术之一, 具有信道容量高、传输速率快、延迟低、可靠性高、频谱效率高等优势。信号检测质量作为衡量大规模 MIMO 性能关键指标, 对通信系统至关重要。传统最小均方误差 (Minimum Mean Square Error, MMSE) 是衡量信号检测质量的常见方法, 其误比特率 (Bit Error Rate, BER) 较低, 但在大规模 MIMO 中天线的数目迅速增加时, 矩阵求逆的复杂度过高。本文主要对大规模 MIMO 信号检测中基于迭代的 Richardson 算法和 Barzilai-Borwein 算法展开研究以降低计算复杂度。主要完成工作如下:

(1) 针对 MMSE 检测算法中矩阵求逆复杂度高问题, 提出一种改进 Richardson 迭代检测算法。该改进算法引入最速下降法对 Richardson 迭代算法预处理, 提供有效搜索路径, 同时采用整体校正法对不同近似解赋予权值, 获得更优解, 进一步缩短算法收敛时间。仿真结果表明, 本文所提改进 Richardson 迭代检测算法收敛性优于传统 Richardson 算法, 在不同用户数及调制方式下依然保持优势, 且该算法在 3 次迭代基本达到 MMSE 算法相同误比特率性能。

(2) 针对 Barzilai-Borwein (BB) 迭代算法单次复杂度高, 误比特率随着迭代次数改善不明显, 提出一种变步长修正 Barzilai-Borwein (CBB) 大规模 MIMO 信号检测算法。将 BB 迭代算法与最速下降法结合的 CBB 算法引入大规模 MIMO 信号检测中加快收敛速度, 同时, 为进一步提高 CBB 算法收敛性, 合理选取初值和单次迭代步长以改进算法。仿真结果表明, 变步长 CBB 算法适应不同数量用户场景, 且该算法优于 BB 算法和 CBB 算法, 同时, 在迭代 4 次时误比特率性能可以接近 MMSE 算法, 解决了 MMSE 高计算复杂度问题, 实现了信号检测误比特率和计算复杂度平衡。

(3) 针对 CBB 迭代算法收敛速度慢的问题, 提出一种采用 CBB-延迟超松弛信号检测方法。通过采用延迟迭代超松弛原理, 引入松弛因子对 CBB 迭代算法进行处理, 利用其对 CBB 算法第  $t$  次迭代解与第  $t-2$  次迭代解进行优化, 选取误比特率性能更好的松弛因子和初值加快算法收敛。仿真结果表明, 本文所提算法通过增加一定复杂度, 有效提升系统性能, 且在不同用户数时仍保持优势。同时, 与传统 MMSE 算法相比复杂度较低, 在迭代 4 次时可达到近似最优性能。

**关键词:** 信号检测; 大规模 MIMO; Richardson 迭代; Barzilai-Borwein 迭代

## Abstract

As one of the fundamental technologies of fifth-generation (5G) mobile communication, multiple-input multiple-output (MIMO) technology boasts several advantages, including high channel capacity, fast transmission rate, low latency, high reliability, and high spectral efficiency. In massive MIMO, signal detection quality is a crucial performance metric for communication systems. While the conventional minimum mean square error (MMSE) method is a widely adopted means of measuring signal detection quality with low bit error rate (BER), the computational complexity of matrix inversion increases significantly as the number of antennas grows. This thesis focus on reducing the computational complexity of massive MIMO signal detection through the use of iteration-based Richardson and Barzilai-Borwein algorithms. Specifically, this thesis aims to enhance signal detection quality in massive MIMO systems while mitigating the complexity challenges posed by increasing antenna numbers. The main contributions of this work are as follows.

(1) To address the challenge of high matrix inversion complexity in the MMSE detection algorithm, this thesis propose an improved Richardson iterative detection algorithm. Our approach incorporates the steepest descent method to preprocess the Richardson iterative algorithm, providing an effective search path, and leverages the whole-correction method to assign weights to different approximate solutions, resulting in superior solutions and faster convergence. Simulations show that our algorithm outperforms the traditional Richardson algorithm in terms of convergence rate, while maintaining its advantages across varying numbers of users and modulation methods. Furthermore, our algorithm achieves the same BER performance as the MMSE algorithm with fewer iterations.

(2) To address the high single complexity of the Barzilai-Borwein (BB) iterative algorithm and the insignificant improvement of the BER with the number of iterations, a variable-step cauchy Barzilai-Borwein (CBB) massive MIMO signal detection algorithm is proposed. The CBB algorithm, which combines the BB iterative algorithm and the steepest descent method, is introduced to speed up the convergence speed of the massive MIMO signal detection, and the initial value and the single iteration step are selected reasonably to further improve the convergence of the CBB algorithm. Simulations show that the variable-step CBB algorithm adapts to different number of user scenarios, and the algorithm is significantly better than the BB and CBB algorithms, while the BER performance can be close to that of the MMSE algorithm, solving the problem of high computational complexity of MMSE and achieving a balance between the BER and computational complexity of signal detection.

(3) To address the problem of slow convergence of CBB iterative algorithm, this thesis proposes a signal detection method using CBB-delayed iterative over-relaxation. By adopting the principle of delayed iterative over-relaxation, a relaxation factor is introduced to the CBB iterative algorithm, which is used to optimize the solution of the  $t$ -th iteration and the  $(t-2)$ -th iteration of the CBB algorithm, and the relaxation factor and initial value with better BER performance are selected to accelerate the convergence of the algorithm. Simulation shows that the proposed algorithm can effectively improve the system performance by increasing the

complexity and still maintain the advantage at different number of users. At the same time, the complexity is lower compared with the traditional MMSE algorithm, and the approximate optimal performance can be achieved with a small number of iterations.

**Key words:** Signal Detection; Massive Multi-input Multi-output; Richardson Iteration; Barzilai-Borwein Iteration

# 目 录

摘 要.....	I
Abstract .....	II
图表目录.....	VI
缩略语.....	VII
符号含义表.....	VIII
第一章 绪论.....	1
1.1 研究背景及意义.....	1
1.2 国内外研究现状.....	2
1.3 本文主要工作与贡献.....	5
1.4 论文组织结构.....	6
第二章 大规模 MIMO 系统模型和经典信号检测算法.....	7
2.1 引言.....	7
2.2 大规模 MIMO 系统模型.....	7
2.3 大规模 MIMO 经典信号检测算法.....	8
2.3.1 最大似然检测算法.....	9
2.3.2 匹配滤波检测算法.....	9
2.3.3 迫零检测算法.....	10
2.3.4 最小均方误差检测算法.....	11
2.4 信号检测算法指标.....	12
2.4.1 可靠性指标.....	12
2.4.2 有效性指标.....	12
2.5 本章小结.....	13
第三章 基于改进 Richardson 的大规模 MIMO 信号检测算法.....	15
3.1 引言.....	15
3.2 相关算法回顾.....	15
3.2.1 Richardson 检测算法.....	15
3.2.2 最速下降算法.....	16
3.2.3 整体校正法.....	18
3.3 改进 Richardson 检测算法.....	18
3.3.1 $m$ 取值分析.....	21
3.3.2 收敛性分析.....	22
3.3.3 初始值选取.....	23
3.4 计算复杂度分析.....	25
3.4.1 Richardson 算法复杂度分析.....	25
3.4.2 改进 Richardson 算法复杂度分析.....	26

3.5 仿真结果分析 .....	27
3.6 本章小结 .....	30
第四章 基于变步长修正 Barzilai-Borwein 迭代信号检测算法 .....	31
4.1 引言 .....	31
4.2 Barzilai-Borwein 迭代检测算法 .....	31
4.3 变步长修正 Barzilai-Borwein 迭代算法 .....	32
4.4 计算复杂度分析 .....	36
4.4.1 Barzilai-Borwein 算法复杂度分析 .....	36
4.4.2 变步长修正 Barzilai-Borwein 算法复杂度分析 .....	37
4.5 仿真结果分析 .....	38
4.6 本章小结 .....	41
第五章 基于 CBB-延迟超松弛迭代信号检测算法 .....	43
5.1 引言 .....	43
5.2 修正 Barzilai-Borwein 迭代信号检测算法 .....	43
5.3 CBB-延迟超松弛迭代信号检测算法 .....	44
5.4 计算复杂度分析 .....	47
5.5 仿真结果分析 .....	48
5.6 本章小结 .....	50
第六章 主要结论与展望 .....	53
6.1 主要结论 .....	53
6.2 展望 .....	54
致 谢 .....	55
参考文献 .....	56
附 录: 作者在攻读硕士学位期间的研究成果 .....	60

## 图表目录

图 1-1 全球移动网络数据流量变化和同比增长图.....	1
图 1-2 大规模 MIMO 信号检测算法分类 .....	3
图 2-1 大规模 MIMO 系统模型 .....	7
图 2-2 大规模 MIMO 信号检测模型 .....	8
图 3-1 最速下降法搜索图.....	17
图 3-2 改进 Richardson 迭代算法流程 .....	20
图 3-3 $m=1$ 与 $m=2$ 时误比特率比较 .....	22
图 3-4 在 $32 \times 128$ , 32QAM 调制情况下, 不同算法误比特率比较 .....	28
图 3-5 在 $32 \times 128$ , 64QAM 调制情况下, 不同算法误比特率比较 .....	28
图 3-6 在 $64 \times 256$ , 32QAM 调制情况下, 不同算法误比特率比较 .....	29
图 3-7 在 $64 \times 256$ , 64QAM 调制情况下, 不同算法误比特率比较 .....	29
图 3-8 不同用户数下, 不同算法误比特率性能.....	30
图 4-1 在 32QAM 情况下, 不同步长参数与误比特率之间关系 .....	33
图 4-2 在 64QAM 情况下, 不同步长参数与误比特率之间关系 .....	33
图 4-3 变步长修正 Barzilai-Borwein 迭代信号检测算法流程.....	34
图 4-4 不同迭代次数下, SNR 与 BER 之间关系.....	36
图 4-5 在 32QAM 和 $32 \times 128$ 条件下, SNR 与 BER 之间关系 .....	39
图 4-6 在 32QAM 和 $16 \times 64$ 条件下, SNR 与 BER 之间关系 .....	39
图 4-7 在 64QAM 和 $32 \times 128$ 条件下, SNR 与 BER 之间关系 .....	40
图 4-8 在 64QAM 和 $16 \times 64$ 条件下, SNR 与 BER 之间关系 .....	40
图 4-9 天线数为 128, 用户数目与 BER 之间关系.....	41
图 5-1 在 32QAM 调制下, 不同松弛因子对应的误比特率情况 .....	44
图 5-2 在 64QAM 调制下, 不同松弛因子对应的误比特率情况 .....	45
图 5-3 CBB-延迟超松弛迭代信号检测算法流程 .....	45
图 5-4 在 32QAM 和 $32 \times 128$ 条件下, SNR 与 BER 之间关系 .....	48
图 5-5 在 64QAM 和 $32 \times 128$ 条件下, SNR 与 BER 之间关系 .....	49
图 5-6 在 32QAM 和 $64 \times 256$ 条件下, SNR 与 BER 之间关系 .....	49
图 5-7 在 64QAM 和 $64 \times 256$ 条件下, SNR 与 BER 之间关系 .....	50
图 5-8 天线数为 128, 用户数目与 BER 之间关系.....	50
表 2-1 各经典算法的对比.....	12
表 3-1 改进 Richardson 相关算法复杂度比较 .....	27
表 4-1 变步长修正 Barzilai-Borwein 相关算法复杂度比较.....	38
表 5-1 CBB-延迟超松弛相关算法复杂度比较 .....	47

## 缩略语

(按英文字母排序)

英文缩写	英文全称	中文全称
4G	Fourth Generation	第四代通信系统
5G	Fifth Generation	第五代通信系统
AE	Auto-Encoder	自编码器
AOR	Accelerated Over Relaxation	加速超松弛迭代
AR	Augmented Reality	增强现实
AWGN	Additive White Gaussian Noise	加性高斯白噪声
BB	Barzilai-Borwein Iteration	Barzilai-Borwein 迭代
BER	Bit Error Rate	误比特率
BP	Belief Propagation	置信度传播
CBB	Cauchy Barzilai-Borwein Iteration	修正 Barzilai-Borwein 迭代
CSI	Channel State Information	信道状态信息
eMBB	Enhanced Mobile Broadband	增强型移动带宽
FG	Factor Graph	因子图
FIR	Finite Impulse Response	有限脉冲响应
IoT	The Internet of Thing	物联网
LAC	Label-Assisted Clustering	标签辅助聚类
LAS	Likelihood Ascent Search	似然上升搜索
LR	Lattice Reduction	格基约简
MAP	Maximum A posterior	最大后验概率
MF	Matched Filter	匹配滤波检测
MIMO	Multi-Input Multi-Output	多输入多输出
MLD	Maximum Likelihood Detection	最大似然检测算法
MMSE	Minimum Mean Square Error	最小均方误差算法
MP	Message Passing	消息传递算法
MRC	Maximal Ratio Combining	最大比合并算法
MRF	Mark Random Field	马尔可夫随机域
NI	Newton Iteration	牛顿迭代
QAM	Quadrature Amplitude Modulation	正交振幅调制
SDR	Semi-Definite Relaxation	半定松弛
SER	Symbol Error Rate	误码率
SIC	Successive Interference Cancellation	串行干扰消除
SNR	Signal to Noise Ratio	信噪比
SVD	Singular Value Decomposition	奇异值分解
TMA	Tridiagonal Matrix Approximation	三对角近似矩阵
URLLC	Ultra-Reliable Low-Latency Communication	高可靠低延迟通信
VR	Virtual Reality	虚拟现实
ZF	Zero Forcing	迫零算法

## 符号含义表

符号	含义
$(\cdot)^H$	矩阵或向量的共轭转置
$(\cdot)^{-1}$	矩阵或向量的逆
$(\cdot)^+$	矩阵或向量的广义逆
$(\cdot)^T$	矩阵或向量的转置
$\text{Tr}(\cdot)$	矩阵的迹
$\mathbb{E}(\cdot)$	数学期望
$\rho(\cdot)$	谱半径
$\mathbb{Q}$	调制符号集
$\ \cdot\ _2$	欧氏距离
$\ \cdot\ _2^2$	欧几里得范数的平方
$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{C}$	复数集
$\sum$	求和
$\mathcal{CN}(\mu, \sigma^2)$	均值为 $\mu$ ，方差为 $\sigma^2$ 复高斯分布
$\mathbf{I}_K$	维度为 $K$ 的单位阵
$\exp(\cdot)$	自然常数 $e$ 的幂次
$\text{argmin}(\cdot)$	取得最小值变量集合
$\text{argmax}(\cdot)$	取得最大值变量集合
$O(\cdot)$	计算复杂度量级
$\gg$	远远大于
$\mathcal{R}(\cdot)$	复数的实部
$\mathcal{I}(\cdot)$	复数的虚部
$\sigma^2$	噪声方差
$\propto$	成正比例
$\phi'(\cdot)$	$\phi(\cdot)$ 导数



# 第一章 绪论

## 1.1 研究背景及意义

现代通信在不知不觉中改变着人们的生活习惯，使得在生产、学习、生活等各个领域都可以更加高效地进行沟通和协作。无线通信作为现代通信的重要分支，由于其灵活性高、适应性高、机动性强以及易于部署等特点，受到广泛应用<sup>[1]</sup>。随着无线通信业务的不断发展，已经从原先简单的语音传输、图像和文字传输，过渡到高速高质量的业务传输，之后还要朝着人人互通，万物互联的方向发展<sup>[2]</sup>。

近年来，随着高新技术不断发展，企业对高速互联网、高清视频和高数据传输率的需求也越来越大。同时物联网(The Internet of Thing, IoT)、增强现实(Augmented Reality, AR)、虚拟现实(Virtual Reality, VR)、工业物联网、增强型移动带宽(Enhanced Mobile Broadband, eMBB)、高可靠低延迟通信(Ultra-Reliable Low-Latency Communication, URLLC)以及车联网等领域的飞速发展，对数据流量的增长产生显著影响<sup>[3-6]</sup>。不仅如此，无线通信的用户数量还在大量增长，用户需求也越来越多样化。用户拥有多个移动通信设备，比如手机、笔记本以及平板电脑等。据预测，到 2030 年时活跃的物联网设备数量将会超过 254 亿台，这些设备的使用也会促进移动数据流量的爆炸增长<sup>[7]</sup>。爱立信公司在 2022 年 11 月发表了《爱立信移动报告》，报告中统计了到目前为止全球移动网络流量的变化图，如图 1-1 所示，全球移动数据流量在 2020 到 2022 两年内翻了一番，仅在 2021 年第三季度到 2022 第三季度就增长了将近 40%，从图中可以看出全球移动网络数据流量变化呈指数增长<sup>[8]</sup>。为了应对无线数据流量的巨大增长，无线通信系统中的技术也在快速发展。

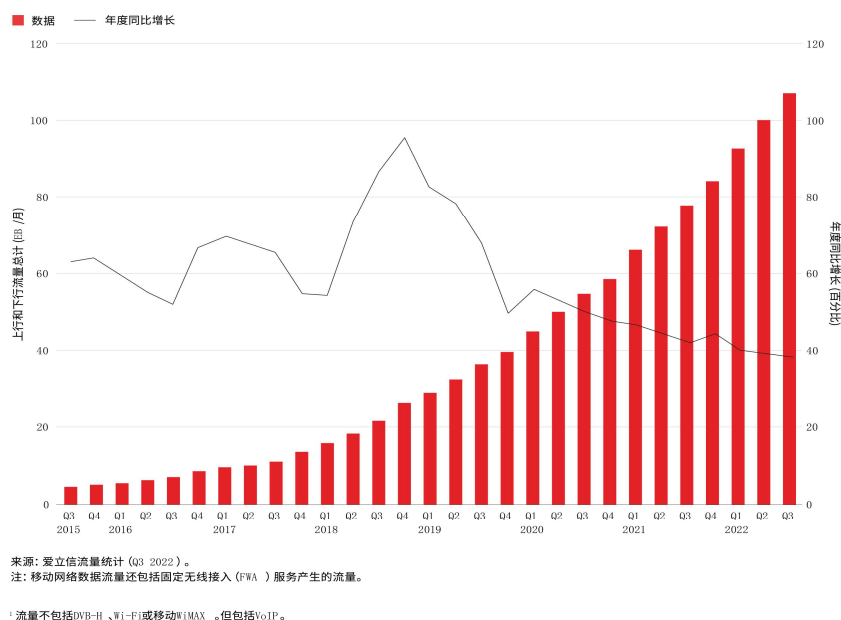


图 1-1 全球移动网络数据流量变化和同比增长图<sup>[8]</sup>

5G 技术可以在一定程度上缓解无线数据流量的增长所带来的压力。大规模 MIMO 技术作为 5G 通信系统的一项关键技术<sup>[9]</sup>，它具有提高频谱利用率、提升信道可靠性等

优点，并且采用空间分集和复用技术使得分集增益以及传输速率成倍提升，在流量高速增长时代发挥巨大作用。

大规模 MIMO 是 MIMO 技术的扩展。MIMO 技术作为第四代通信(Fourth Generation, 4G)的关键技术<sup>[10]</sup>，通过在用户设备和基站设备配置多根天线用来传输数据。相比较于单输入单输出，可以增加系统的吞吐量，由于其在提高频谱效率和传输可靠性方面性能优越，受到学术界以及工业界的广泛关注，但是该技术并不能满足日益增长的通信需求。贝尔实验室 Marzetta 教授由于 MIMO 技术在 4G 时的优秀表现于 2006 年首次提出大规模 MIMO 技术概念，在 2010 年进一步完善了大规模 MIMO 技术理论<sup>[11]</sup>。大规模 MIMO 不仅是在天线规模上的增加，在信道容量和传输速率等一系列方面有了巨大提高，而且在节能、可扩展性以及频谱效率方面也具有优势<sup>[12]</sup>，利用多天线处理进行信号处理，降低每个天线的功率需求，从而降低系统的总功耗；利用波束赋形和多用户检测技术，提高了系统容量和可靠性；采用空间多路复用，将数据分配给多个用户，提高频谱效率。

近些年，国内外对于大规模 MIMO 技术的研究迅速增加，在国外，一些知名科研机构如贝尔实验室和瑞士隆德大学已经开始对大规模 MIMO 技术进行初步研究和仿真验证。与此同时一些国际顶级期刊相继发行了大规模 MIMO 的专刊，为该领域的研究提供了丰富的学术资源。在国内，华为、中兴、中国移动等企业早已积极响应该领域的研究需求，并投入大量的资金进行技术研发，为大规模 MIMO 技术的快速发展提供了有力的支持。在 2017 年 2 月，中国移动、华为和中兴共同起草的《大规模天线技术白皮书 V0.1》标志了我国在大规模 MIMO 技术的重大突破<sup>[13]</sup>。政府相关部门也在密切关注这一技术后续进展。由于大规模 MIMO 技术优秀的性能，也将会在下一代通信中扮演着重要角色，大规模 MIMO 技术被认为是未来最具前景的技术和研究热点之一<sup>[14]</sup>。

与所有通信系统一样，尽管大规模 MIMO 技术的频谱效率和传输可靠性方面表现出色，但是其发展也伴随着一些挑战。其中之一就是天线数的数量大幅增加，使得原先适用于 MIMO 技术的算法不再适用大规模 MIMO 技术。因为这些算法的实现需要很高的计算复杂度，对于大规模 MIMO 系统的硬件实现带来了巨大挑战，无法达到低时延的要求。

由于 5G 乃至下一代通信系统对于时延的要求很高，过高的技术复杂度会导致无法保证通信系统的实时性，因此在大规模 MIMO 技术中，计算复杂度是一个必须要面对的问题。为了提高大规模 MIMO 技术的实际应用可行性和效率，当前研究主要关注于预编码<sup>[15]</sup>、信道估计<sup>[16]</sup>和信号检测这三个方向的低复杂度算法。信号检测质量是衡量大规模 MIMO 系统性能的重要指标之一，它可以帮助我们准确地检测接收到的信号，从而提高通信质量和系统性能，所以研究高效可靠的信号检测算法具有重要意义，因此本文对大规模 MIMO 系统中的信号检测算法进行重点研究。

## 1.2 国内外研究现状

在大规模 MIMO 系统中，信号检测的目的就是通过基站端的接收信号来估计出用户端的发送信号。接收端将来自用户端的发送信号视为有效信息，将其他发送信号看作

干扰，信号检测的误比特率性能和计算复杂度都会直接影响系统性能。最大似然（Maximum Likelihood Detection, MLD）技术是性能最优的检测算法，但随着天线数量增加，其复杂度呈指数增加，在大规模 MIMO 系统中继续采用是不切实际的<sup>[17]</sup>。因此对于研究既具有低复杂度又具有高性能的信号检测算法的是非常重要的。

大规模 MIMO 信号检测的分类大体如图 1-2 所示

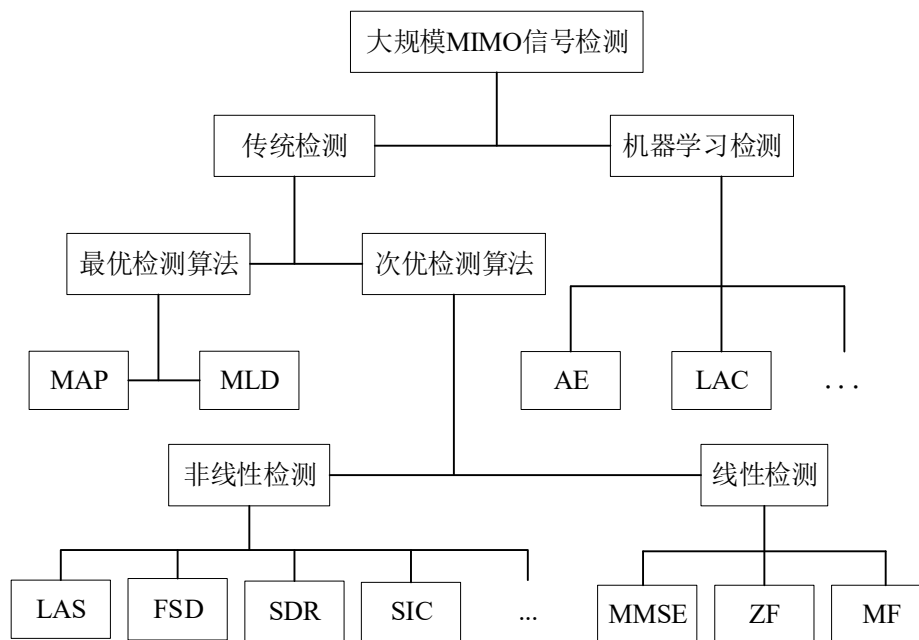


图 1-2 大规模 MIMO 信号检测算法分类

一类是机器学习检测方法：近年来由于机器学习在众多领域都取得不错效果，在信号检测方向也有了一定的研究。Huang 等作者将 MIMO 检测问题转换为聚类问题，通过传输已知标签，协助接收端标记聚类，提出了标签辅助聚类（Label-Assisted Clustering, LAC）接收机方案，该方案在信道状态信息完全已知时接近 MLD 检测<sup>[18]</sup>。Khani 等作者提出了一种基于迭代软阈值算法的 MMNet，这种算法可以在线性检测和非线性去噪步骤之间反复细化信号，通过利用频谱和时间局部性，提高训练速度，在不同信道条件下仿真都得到不错效果<sup>[19]</sup>。王博提出了基于自编码器（Auto-Encoder, AE）的 MIMO 信号检测系统，通过训练接收信号训练完成后与得到测试重构数据，与原始信号比较，验证了该算法的有效性<sup>[20]</sup>。

另一类传统信号检测算法中最优检测算法主要是包括软判决中的最大后验概率（Maximum A posterior, MAP）检测<sup>[21]</sup>和硬判决算法中的 MLD 大规模 MIMO 检测算法。不过这两种算法在天线数量很多时，需要的复杂度很高，在有限的时间内难以获得最优的误比特率性能，因此无法直接应用在大规模 MIMO 信号检测中。

大规模 MIMO 信号检测次优检测算法一般可分为非线性检测、线性检测。其中非线性检测有：Vardhan 等作者将提出的似然上升搜索（Likelihood Ascent Search, LAS）检测用于大规模 MIMO 中，通过搜索出具有单调似然上升的位向量序列，在有限的步骤中收敛到固定点，其性能非常接近 MLD 检测<sup>[22]</sup>。文献[23]提出了一种球形解码算法，该算法是将发射信号向量限制在一个球中进行遍历搜索，并不进行全局遍历搜索，因此它

的复杂度相对 MLD 大大降低, Luis 等作者提出了一种适用于大规模 MIMO 的固定复杂度球形译码算法 (Fixing Complexity Sphere Decoder, FSD) [24], 相对文献[23]算法只有下降很少的误码率, 但其低复杂性适合硬件实现。Miridakis 提出了一种串行干扰消除 (Successive Interference Cancellation, SIC) 算法, 该算法是将每次检出的向量从接收信号中去除, 在检测下一个向量, 可以在一定程度上已检测信号对尚未检测信号的影响, 提升性能, 但是当检测中出现差错, 接下来的结果都会受到波及[25]。文献[26]提出了半定松弛 (Semi-Definite Relaxation, SDR) 检测算法, 该算法通过将一些不等式约束添加到最大似然检测中转换为半定松弛优化问题, 转化后是没有局部最小点的, 并且该问题有成熟的求解方法。文献[27]提出了将利用马尔可夫随机域 (Mark Random Field, MRF) 和因子图 (Factor Graph, FG) 表示的置信度传播 (Belief Propagation, BP) 算法应用在大规模 MIMO 检测中, 该算法误比特率随着维数增加而提高。文献[28]提出了并行的 QRM-MLD 信号检测, 该算法相对 MLD 检测算法误码率较低, 而且能以较低的复杂度实现良好的性能。此外非线性算法还有消息传递 (Message Passing, MP) [29-31]算法、禁忌搜索算法[32]和格基约简(Lattice Reduction, LR)辅助算法[33,34]等。

线性检测算法主要有最小均方误差 (Minimum Mean Square Error, MMSE) [35]、迫零 (Zero Forcing, ZF) [36]、还有匹配滤波 (Matched Filter, MF) [37,38]也称为最大比合并 (Maximal Ratio Combining, MRC) 算法, 线性检测是可以通过矩阵的形式表示出滤波器, MF 是一种最简单的线性检测算法, 不过该算法在用户数增加的情况下, 噪声的影响会变大, 算法性能变差。虽然 ZF 检测可以消除多天线间的干扰, 但是也放大了噪声信号的能量, 而且需要进行矩阵求逆的操作, 实现的复杂度很高。MMSE 检测是在 ZF 算法的基础上考虑了噪声的影响, 由于在大规模 MIMO 上行链路中, 当基站天线数量远远超过用户数量时, 信道之间的干扰会越来越小, 小尺度衰落与非相干噪声的影响也将降低, 不同信道之间会趋于正交。所以传统的线性检测也可以得到接近最优的信号检测性能。不过该算法由于需要进行复杂度很高的矩阵逆运算, 因此在实际使用时常常通过两种方式来降低 MMSE 算法的复杂度。

其中一种是基于级数展开方式来代替矩阵求逆。文献[39]提出了诺伊曼 (Neumann) 级数近似算法, 通过将矩阵求逆过程转化为一系列的矩阵向量乘法。但是当阶数高于 2 时, 复杂度的降低并不明显。申滨等作者提出了多级线性接收检测算法, 即使在展开阶数较低时, 也能实现很好的检测性能[40]。Wu 等作者提出一种近似矩阵求逆的信号检测算法, 通过使用少量 Neumann 级数项进行矩阵求逆[41]。文献[42]提出通过三对角矩阵近似 (Tridiagonal Matrix Approximation, TMA) 来优化诺伊曼级数, 它可以实现接近 MMSE 算法的性能。

另一种是通过将矩阵求逆的问题转化为线性方程组, 并采用迭代方法进行计算。文献[43]通过改进 Kaczmarz 算法来简化求逆, 通过采用递推公式取代部分迭代公式, 可以在保持检测性能不变的情况下, 进一步减少 Kaczmarz 算法的复杂度。文献[44]提出了采用 Gauss-Seidel 迭代进行信号检测, 同时为了加快收敛, 采用前两项的截断诺伊曼级数进行初始化, 该方案可以通过灵活调整迭代次数来满足各种应用需求。文献[45]提出利

用加速超松弛 (Accelerated Over Relaxation, AOR) 来进行信号检测, 无需复杂的矩阵求逆, 能够将经典 MMSE 算法的总体复杂性降低一个数量级。Tang 等作者提出用牛顿迭代 (Newton Iteration, NI) 来替代矩阵求逆来进行信号检测<sup>[46]</sup>, 在此基础上, 文献[47]提出了一种改进的牛顿迭代法。并且通过将矩阵和矩阵乘积转换为矩阵和向量乘积, 计算复杂性大大降低, 同时性能优于牛顿迭代检测。文献[48]提出用雅可比迭代来进行信号检测, 并且设计了雅可比方法的初始估计, 使得第一次迭代不需要乘法, 有效的降低了复杂度, 同时保持了接近最优的性能。类似的线性检测算法还有 Richardson 迭代<sup>[49-51]</sup>、Barzilai-Borwein<sup>[52-54]</sup>、最速下降法<sup>[55-57]</sup>、共轭梯度法<sup>[58-60]</sup>等。

### 1.3 本文主要工作与贡献

本文研究对象是无线通信系统中的大规模 MIMO 技术, 探讨基站接收端的信号检测算法, 在保证检测性能的前提下, 如何有效的降低算法复杂度。在大规模 MIMO 上行链路中, 当基站天线数量远远大于用户数量时, 传统的线性检测也可以得到接近最优的信号检测性能。本文重点是解决最小均方误差检测算法中矩阵求逆导致算法复杂度过高的问题, 对 Richardson 和 Barzilai-Borwein 算法进行了重点研究, 并基于两种算法进行改进, 提出三个低复杂度、低误比特率的信号检测方案。通过通信系统建模, 对算法进行仿真分析, 验证算法的优越性和合理性。本文的主要创新点与贡献总结如下:

(1) 针对 MMSE 信号检测算法在矩阵求逆时需要很高的复杂度, 虽然采用传统 Richardson 迭代算法复杂度降低, 但算法性能改善不明显的问题。本文提出一种采用最速下降法和整体校正法来加速 Richardson 收敛速度的算法, 将最速下降法作为半迭代带入通过 Richardson 算法某次迭代中, 最速下降法搜索合适方向加快 Richardson 收敛, 得到不同迭代解。在迭代解接近精确解时, 最速下降法性能变差, 通过整体校正法来进一步提升算法收敛速度, 利用不同校正系数, 对不同的迭代估计值进行优化计算, 改善误比特率性能。通过对复杂度和仿真结果的分析可得: 算法的复杂度相对 Richardson 提升不多, 但是仅需很少的迭代次数就接近了 MMSE 检测性能, 既保留了算法误比特率性能, 同时使得复杂度由 MMSE 检测算法的  $O(K^3)$  降低到  $O(K^2)$ 。

(2) 采用变步长修正 Barzilai-Borwein 算法来避免矩阵求逆问题。为了提高 Barzilai-Borwein 算法的性能, 将 Barzilai-Borwein 迭代与最速下降法结合得到的修正 Barzilai-Borwein (CBB) 迭代来进行信号检测。同时在 CBB 迭代算法中引入步长参数对迭代步长进行优化, 选取误比特率性能更好的步长参数, 进一步加快 CBB 迭代的收敛速度, 同时采用收敛更快的初始值。通过对复杂度和仿真结果的分析可得: 算法以增加少量复杂度为代价, 获得了误比特率性能的大幅提升, 同时该算法的复杂度相对 MMSE 信号检测算法由  $O(K^3)$  降到了  $O(K^2)$ , 在检测性能和实现复杂度方面得到折衷。

(3) 采用 CBB-延迟超松弛迭代算法来代替矩阵求逆运算。利用延迟迭代超松弛原理, 通过添加松弛因子对 CBB 迭代算法的不同迭代结果进行优化, 选取误比特率性能最好的松弛因子和初值提高 CBB 算法收敛。通过对复杂度和仿真结果的分析可得: 该算法复杂度相对 CBB 提升很少, 但是优化算法收敛更快、误比特率性能更好, 而且仅

需要很少迭代次数就可以接近 MMSE 算法误比特率性能，同时还将复杂度降低了一个数量级。

## 1.4 论文组织结构

第一章 绪论。首先阐述大规模 MIMO 历史背景以及大规模 MIMO 中信号检测研究价值；随后介绍大规模 MIMO 技术信号检测的国内外研究现状；紧接着对本文的主要创新点和已做工作进行总结，最后编排论文的主要组织结构。

第二章 大规模 MIMO 系统模型和经典信号检测算法。首先对大规模 MIMO 系统的基本框架以及信号检测流程进行阐述；其次本章介绍 MLD、MF、ZF 和 MMSE 四种经典的信号检测算法；最后确定本文对于信号检测性能的衡量指标。

第三章 基于改进 Richardson 的大规模 MIMO 信号检测算法。首先介绍了 Richardson 迭代算法、最速下降法以及整体校正法。现有的 Richardson 迭代算法相比较于 MMSE 算法，其复杂度低，但是收敛速度慢。其次提出一种基于改进 Richardson 的大规模 MIMO 信号检测算法，利用整体校正法和最速下降法来对 Richardson 迭代算法进行优化，同时通过对比分析确定收敛更快的初值，然后对所提出算法与 Richardson 检测算法的收敛性进行分析。接着对所提算法的复杂度分析，并与 MMSE 和 Richardson 检测算法进行比较。最后，通过进行蒙特卡洛仿真，以评估改进 Richardson 算法在误比特率性能的表现。

第四章 基于变步长修正 Barzilai-Borwein 迭代信号检测算法。由于 MMSE 检测算法在实现时需要矩阵求逆，所需的复杂度很高，然后针对该问题，本章提出了基于变步长 CBB 迭代信号检测算法，并进行详细阐述如何对 CBB 迭代步长进行改进，接着对所提变步长 CBB 算法进行复杂度分析，并与 BB 检测算法和 MMSE 检测算法进行比较。最后将本章所提算法与 BB 算法，CBB 算法以及 MMSE 算法进行仿真分析，验证其误比特率性能。

第五章 基于 CBB-延迟超松弛迭代信号检测算法。首先介绍了修正 Barzilai-Borwein 迭代信号检测算法，其次简要介绍了延迟迭代超松弛原理，然后将延迟迭代超松弛原理应用于 CBB 迭代算法，通过添加松弛因子对 CBB 迭代算法的不同迭代结果进行优化，并选取性能表现更优的松弛因子进行之后仿真。接着，对所提 CBB-延迟超松弛迭代信号检测算法进行复杂度的分析，同时将其与 CBB 算法和 MMSE 检测算法的计算复杂度进行对比。最后通过对该算法与 CBB 算法的在不同迭代次数下与 MMSE 算法进行仿真对比，验证该算法具有良好误比特率性能。

第六章 主要结论与展望。对全文研究内容进行总结，并针对本文研究的不足之处，提出未来对信号检测研究方向的展望。

## 第二章 大规模 MIMO 系统模型和经典信号检测算法

### 2.1 引言

大规模 MIMO 系统是大量接收天线和发送天线构成的天线阵列，具有数据传输速率高、信道容量大等显著优势，能够扩大信号传输范围，提高通信质量，是未来无线通信领域的研究热点<sup>[37]</sup>。而接收端的信号检测性能对整个通信系统性能起关键作用。

本章主要介绍大规模 MIMO 系统模型，在大规模 MIMO 中信号检测算法的实现过程，之后对经典信号检测算法 MLD 算法、MF、ZF 以及 MMSE 信号检测的原理进行了推倒，对比各算法性能及适用环境，同时为之后提出的基于 MMSE 检测代替矩阵求逆的检测算法建立理论依据。最后确定本文进行信号检测性能的评价指标。

### 2.2 大规模 MIMO 系统模型

在频带和发射功率一定的情况下，与传统 MIMO 系统相比，大规模 MIMO 系统采用了空间复用和分集增益对数据传输速率以及整个通信系统的性能有了很大提升。在大规模 MIMO 系统的上行链路中，假设基站侧的天线数量为  $N$ ，用户发送端的天线数量为  $K$ ，则大规模 MIMO 系统模型如图 2-1 所示。

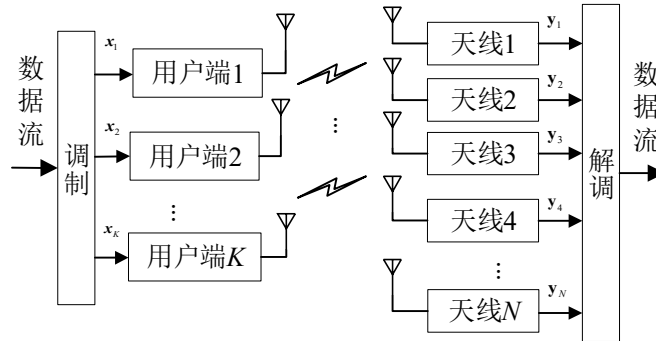


图 2-1 大规模 MIMO 系统模型

一般来说，在大规模 MIMO 系统中，基站侧的天线数量是要远高于用户数量，即  $N \gg K$ ，在本文中，假设单个用户使用单个天线。 $\mathbf{x}_C = [x_1, x_2, \dots, x_K]^T \in \mathbb{C}^{K \times 1}$  代表所有用户同时发送的  $K \times 1$  符号， $\mathbf{y}_C = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$  表示天线接收端  $N \times 1$  维向量。单用户功率设置为  $\mathbb{E}|x_i|^2 = 1, x_i \in \mathbb{Q}$ ，其中  $\mathbb{Q}$  代表调制符号集。假设在基站已经已知了完整的信道状态信息（Channel State Information, CSI），信号经过瑞利衰落信道，信道增益矩阵由式（2.1）表示， $h_{i,j}$  表示第  $i$  个接收天线与第  $j$  个发送天线之间的信道衰落系数，同时  $h_{i,j}$  满足独立同分布且复高斯分布，各分量均满足均值为 0，方差为 1，即  $h_{i,j} \in \mathcal{CN}(0,1)$ 。

$$\mathbf{H}_C = \begin{Bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \cdots & h_{1,K} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \cdots & h_{2,K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N,1} & h_{N,2} & \cdots & h_{N,K} \end{Bmatrix}. \quad (2.1)$$

在接收端的  $N \times 1$  维度信号  $\mathbf{y}_c$  可以表示为

$$\mathbf{y}_c = \mathbf{H}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{n}_c, \quad (2.2)$$

其中,  $\mathbf{n}_c = [n_1, n_2, \dots, n_N] \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  是一个  $N \times 1$  维的加性高斯白噪声 (Additive White Gaussian Noise, AWGN),  $n_i$  满足均值为 0, 方差为  $\sigma^2$  的复高斯分布, 即  $n_i \in \mathcal{CN}(0, \sigma^2)$ , 假设用户发送符号的平均能量为  $E_s = 1$ , 则  $\sigma^2 = K \cdot E_s / \text{SNR}$ , SNR 是指每个接收天线的平均信噪比 (Signal to Noise Ratio, SNR), 定义为:

$$\text{SNR} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbf{H}_c \mathbf{x}_c} [\|\mathbf{H}_c \mathbf{x}_c\|_2^2]}{\mathbb{E}_{\mathbf{n}_c} [\|\mathbf{n}_c\|_2^2]}. \quad (2.3)$$

为了便于数据分析处理, 可以将复数信道模型  $\mathbf{H}_c$  转化为实数信道模型, 并将发送信号  $\mathbf{x}_c$ , 接收信号  $\mathbf{y}_c$  以及噪声  $\mathbf{n}_c$  都进行复实数转换, 这样可以得到以下转化后的模型:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}(\mathbf{H}_c) & -\mathcal{I}(\mathbf{H}_c) \\ \mathcal{I}(\mathbf{H}_c) & \mathcal{R}(\mathbf{H}_c) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2K}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{y} = [\mathcal{R}(\mathbf{y}_c)^T \quad \mathcal{I}(\mathbf{y}_c)^T]^T \in \mathbb{R}^{2N \times 1}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{x} = [\mathcal{R}(\mathbf{x}_c)^T \quad \mathcal{I}(\mathbf{x}_c)^T]^T \in \mathbb{R}^{2K \times 1}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{n} = [\mathcal{R}(\mathbf{n}_c)^T \quad \mathcal{I}(\mathbf{n}_c)^T]^T \in \mathbb{R}^{2N \times 1}, \quad (2.7)$$

其中  $\mathcal{R}(\cdot)$  表示复向量或者矩阵的实部,  $\mathcal{I}(\cdot)$  表示复向量或者矩阵的虚部。

之后经过接收器的信号可以改写为:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}. \quad (2.8)$$

### 2.3 大规模 MIMO 经典信号检测算法

根据式 (2.8) 大规模 MIMO 系统上行链路中接收信号的表达式, 如图 2-2 所示, 大规模 MIMO 信号检测过程就是利用信道矩阵  $\mathbf{H}$  与接收信号  $\mathbf{y}$  来得到一个发射信号  $\mathbf{x}$  的估计信号  $\hat{\mathbf{x}}$ ,

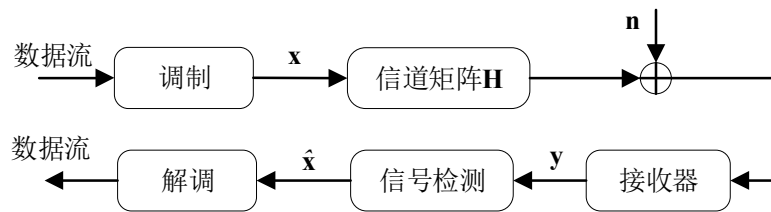


图 2-2 大规模 MIMO 信号检测模型

在信道状态信息与噪声功率  $\sigma^2$  完全已知的情况下, 可得到大规模 MIMO 系统的输出似然函数为:

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{H}, \mathbf{x}) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^N} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2\right). \quad (2.9)$$



在大规模 MIMO 系统中，常用的信号检测算法一般分为非线性检测算法和线性检测算法。其中非线性检测算法相对更好，但是以提高复杂度为代价的，线性检测技术的基本思想是将来自用户端的期望信息作为有用信息，同时将其他用户发送信号看作干扰信号，通过线性滤波算法将其它用户干扰信号降低或去除，该种检测算法具有相对较低的复杂度，因此在大规模 MIMO 技术中更受关注。

本节将阐述的最大似然检测算法是常见非线性检测算法，而匹配滤波检测算法，迫零检测算法和最小均方误差检测算法都是线性检测算法。

### 2.3.1 最大似然检测算法

最大似然检测<sup>[17]</sup>其实就是遍历所有星座点，找到概率最大的星座点，并以此作为传输信号的估计解。该算法不需要矩阵求逆操作，所以该算法检测性能不会受到噪声的影响，因此在理论上最大似然检测算法是性能最优的。接收信号的似然函数可表示为：

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \propto \exp(-\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2). \quad (2.10)$$

最大似然检测目标是使得接收信号的似然函数最大，这和接收信号与星座点集中对应的无噪声接收信号欧氏距离最短是一致的。则最大似然检测算法可以表示为：

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{C-ML} &= \arg \max_{\mathbf{x}_c \in \mathcal{Q}^K} p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \\ &= \arg \max_{\mathbf{x}_c \in \mathcal{Q}^K} \exp(-\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2), \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}_c \in \mathcal{Q}^K} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

其中  $\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2$  表示欧氏距离的平方，由于要遍历所有发射信号组成的向量空间，通过式

(2.11) 可以发现发射信号的组成的向量空间个数为  $|\mathcal{Q}|^K$ ，其中  $K$  表示用户数， $\mathcal{Q}$  表示调制符号集（例如 4QAM 则  $\mathcal{Q}=4$ ），虽然该算法可以达到最优性能，但是其复杂度随着用户数提高，呈指数增长，并且随着调制方式的提高，复杂度也上升明显。因此在大规模 MIMO 系统中由于其复杂度太高，不适用于实际应用。

### 2.3.2 匹配滤波检测算法

匹配滤波检测算法<sup>[38]</sup>是一种非常简单的信号检测算法，该算法不需要进行复杂的矩阵求逆运算，在线性检测中是相对最为简单的，在对精度要求不高的系统中应用广泛，该算法是将目标用户发送的信号看作有效信息，将其他用户发送的信息看作噪声来处理，则可将式 (2.8) 改写为：

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \\ &= \sum_{j=1}^K \mathbf{h}_j x_j + \mathbf{n}, \\ &= h_k x_k + \sum_{j=1, j \neq k}^K \mathbf{h}_j x_j + \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.12)$$

其中  $k$  表示目标用户，式 (2.12) 的第一项表示第  $k$  个用户发送信号，作为有效项，后两项作为噪声干扰项，该算法的滤波矩阵为：

$$\mathbf{W}_{ZF} = \mathbf{H}^H. \quad (2.13)$$

因此匹配滤波检测算法得到的信号估计值为

$$\hat{\mathbf{x}}_{ZF} = \mathbf{W}_{ZF} \mathbf{y} = \mathbf{H}^H \mathbf{y} = \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{H}^H \mathbf{n}. \quad (2.14)$$

通过式 (2.14) 可以发现，该算法通过先计算  $\mathbf{H} \mathbf{x}$ ，甚至都不需要进行复杂度较高的矩阵间的算法，因此该算法实现复杂度较低，通过式 (2.14) 也可以发现随着用户数的提高，算法噪声部分会逐渐变大，此时算法的性能会受到影响。

### 2.3.3 迫零检测算法

迫零检测算法<sup>[36]</sup>的原理是通过设计一个有限脉冲响应 (Finite Impulse Response, FIR) 滤波器，利用信道矩阵  $\mathbf{H}$  的广义逆来使得用户期望处信号响应为 1，非期望信号处的响应为零，以此来消除信号间的干扰，迫零检测矩阵可表示

$$\mathbf{W}_{ZF} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H. \quad (2.15)$$

由于  $\mathbf{W}_{ZF} \mathbf{H} = \mathbf{I}$ ，迫零检测算法其实相当于信道矩阵的左逆，所以迫零检测算法是可以消除其他分量带来的干扰，迫零检测估计信号  $\hat{\mathbf{x}}_{ZF}$  可表示为：

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{ZF} &= \mathbf{W}_{ZF} \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H (\mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{n}). \\ &= \mathbf{x} + (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.16)$$

通过式 (2.16) 可以看出，迫零检测虽然消除了多天线间的干扰，同时也放大了噪声信号的能量。假设信道矩阵  $\mathbf{H}$  满足列满秩，对其进行奇异值分解 (Singular Value Decomposition, SVD)，噪声功率可表示为：

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{n}\|_2^2 &= \|(\mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma}^2 \mathbf{V}^H)^{-1} \mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U}^H \mathbf{n}\|_2^2 \\ &= \|\mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma}^{-2} \mathbf{V}^H \mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U}^H \mathbf{n}\|_2^2 \\ &= \|\mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^H \mathbf{n}\|_2^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

因为  $\mathbf{V}$  为酉矩阵，满足  $\|\mathbf{V} \mathbf{x}\|_2^2 = \mathbf{x}^H \mathbf{V}^H \mathbf{V} \mathbf{x} = \mathbf{x}^H \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2^2$ ，噪声功率的期望值可以表示为：

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \|\mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^H \mathbf{n}\|_2^2 \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \text{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^H \mathbf{n} \mathbf{n}^H \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \right\} \\ &= \text{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^H \mathbb{E}(\mathbf{n} \mathbf{n}^H) \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \\ &= \sigma^2 \text{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-2}) \\ &= \sum_{i=1}^K \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

通过式 (2.18)，可看出迫零检测的误差主要误差在于噪声功率，当每个用户的最小奇异值小于 1，此时会使噪声放大。

### 2.3.4 最小均方误差检测算法

最小化均方误差算法<sup>[35]</sup>其实是在迫零算法基础上进一步的优化，其设计目标是最小化估计信号于发射信号之间的误差，使得两者之间的均方误差最小，信号检测过程写为  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{W}\mathbf{y}$ ，其中  $\mathbf{W}$  为信号检测矩阵，令  $\mathbf{W}_{MMSE}$  表示最小均方误差检测矩阵，可表示为：

$$\mathbf{W}_{MMSE} = \arg \min_{\mathbf{W}} \mathbb{E} \left[ \|\mathbf{x} - \mathbf{W}\mathbf{y}\|_2^2 \right]. \quad (2.19)$$

通过式 (2.19) 求解  $\mathbf{W}_{MMSE}$ ，可写为：

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{MMSE} &= \arg \min_{\mathbf{W}} \mathbb{E} \left[ \|\mathbf{x} - \mathbf{W}\mathbf{y}\|_2^2 \right] \\ &= \arg \min_{\mathbf{W}} \mathbb{E} \left\{ \left[ \text{Tr}[(\mathbf{x} - \mathbf{W}\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{W}\mathbf{y})^H] \right] \right\} \\ &= \arg \min_{\mathbf{W}} \mathbb{E} \left\{ \text{Tr} \left[ \mathbf{x}\mathbf{x}^H - \mathbf{W}\mathbf{y}\mathbf{x}^H - \mathbf{x}\mathbf{y}^H\mathbf{W}^H + \mathbf{W}\mathbf{y}\mathbf{y}^H\mathbf{W}^H \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

利用式 (2.20) 对  $\mathbf{W}$  求偏导，使其导数为零，得到：

$$\frac{\partial \text{Tr} \left[ \mathbf{x}\mathbf{x}^H - \mathbf{W}\mathbf{y}\mathbf{x}^H - \mathbf{x}\mathbf{y}^H\mathbf{W}^H + \mathbf{W}\mathbf{y}\mathbf{y}^H\mathbf{W}^H \right]}{\partial \mathbf{W}} = 0, \quad (2.21)$$

可以求得：

$$\mathbf{W}_{MMSE} = (\mathbf{H}^H\mathbf{H} + \sigma^2\mathbf{I}_{2K})^{-1}\mathbf{H}^H. \quad (2.22)$$

则 MMSE 检测算法得到估计信号可以表示为：

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^H\mathbf{H} + \sigma^2\mathbf{I}_{2K})^{-1}\mathbf{H}^H\mathbf{y}. \quad (2.23)$$

通过式 (2.23) 可以看出，该算法结合迫零检测算法与匹配滤波算法的优势，在信噪比较高时，此时算法性能是与匹配滤波算法接近，当信噪比较低时，此时噪声方差趋于无穷大时， $\mathbf{H}^H\mathbf{H} + \sigma^2\mathbf{I}_K$  矩阵的对角元素会很大，此时检测性能是明显比迫零算法优异，因此相对另两种线性检测算法，该算法在实际中得到更广泛的应用。不过该算法需要提前已知信道的噪声方差  $\sigma^2$ ，通过式 (2.23) 也可看出该算法涉及到矩阵求逆，需要很高的复杂度，尤其是在用户数量很大的情况下，大部分低复杂度的信号检测算法是通过降低矩阵求逆来整体降低最小均方误差算法的复杂度。

式 (2.23) 可以通过令  $\mathbf{A} = \mathbf{H}^H\mathbf{H} + \sigma^2\mathbf{I}_{2K}$ ， $\mathbf{b} = \mathbf{H}^H\mathbf{y}$ ，将其改写为：

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \quad (2.24)$$

因为  $(\mathbf{H}^H\mathbf{H})^H = \mathbf{H}^H\mathbf{H}$ ，该矩阵为厄米特矩阵，大规模 MIMO 系统中信道矩阵  $\mathbf{H}$  列向量线性无关，同时各向量近似正交，对于任何非零向量  $\mathbf{r}$  都有：

$$(\mathbf{H}\mathbf{r})^H\mathbf{H}\mathbf{r} = \mathbf{r}^H\mathbf{H}^H\mathbf{H}\mathbf{r} > 0, \quad (2.25)$$

其中  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$  也是正定矩阵，并且由于  $\sigma^2\mathbf{I}_{2K}$  为正的对角矩阵，因此  $\mathbf{A}$  也可看为厄米特正定矩阵。

各经典信号检测算法的适用信道，误比特率以及复杂度的对比，如表 2-1 所示：

表 2-1 各经典算法的对比

算法	适用信道	误比特率性能 <sup>[38]</sup>	复杂度
ML	任何	最优	指数级
MMSE	较差	次优	较高
ZF	良好	次于 MMSE	较低
MF	AWGN	次于 ZF	最低

在大规模 MIMO 中，由于计算复杂度、信到环境的考虑，通常采用 MMSE 检测算法，但该算法需要高维矩阵的求逆复杂度很高。为了降低高维矩阵求逆所需的复杂度，一般有两种处理方式：一是利用诺伊曼级数（Neumann）来近似矩阵求逆，它的思路是通过一系列的矩阵向量乘积来逼近矩阵的逆，然而复杂度的降低并不明显，随着用户的增加，性能明显下降；二是如  $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{b}$  公式，将矩阵求逆问题看作线性方程组问题，通过迭代来进行求解，该种算法可以降低复杂度的同时，保持算法的性能，在应用中很受青睐。

## 2.4 信号检测算法指标

与各种无线通信系统一样，大规模 MIMO 信号检测系统的衡量指标可以分为可靠性和有效性两种。如果将大规模 MIMO 信号检测算法比作一个等臂杠杆，那么有效性和可靠性在杠杆的两端，有些经典的信号检测算法，比如上节提到的检测算法，它们的杠杆已经定型，就比如最大似然检测算法可靠性是最好的，但相应的他的有效性也是最差的，反之也一样。但是对于一些不成熟的检测算法，相当于有机会来调节两者的关系，达到一个动态平衡，在保持可靠性的同时，对于有效性也尽可能优化。

### 2.4.1 可靠性指标

可靠性一般是指信号传输信息的精确程度，在信号检测中可以理解为检测算法发送信号的精确程度，一般可以利用误码率也称误符号率（Symbol Error Rate, SER）或者是误比特率也称误信率来定量衡量<sup>[61]</sup>。误码率指的是在接收到的总码元中，检测到错误的码元数占总码元数的比例，而误比特率指的是在接收到的总比特数中，检测到错误的比特数占总比特数的比例。本文采用误比特率作为检测算法可靠性的指标。

$$\text{误比特率} = \frac{\text{接收的检测错误比特数}}{\text{接收的总比特数}} \quad (2.26)$$

### 2.4.2 有效性指标

有效性在信号检测中可以表示为完成信号检测所需的内存资源和所需耗费的时间资源，可以表述为通过时间复杂度和空间复杂度来评估算法的有效性，本文主要利用算法时间复杂度来衡量算法的有效性，同时为了简化表述，在不出现歧义情况下，下文中均简称为“复杂度”。尽管一个算法的运行所需要的时间不仅仅取决于算法执行的语句，还与执行该算法的计算机性能相关，但是为了可以公平的比较各种算法的复杂度，本文将关注算法本身的语句，通过各种算法在执行时所需要的实数操作，来衡量算法的复杂

度，由于计算机对于加法的处理速度相对于乘法来说基本可以忽略，因此本文主要通过不同算法所需要的乘法次数来确定复杂度，在大规模 MIMO 系统中模型一般都是复数的，可以将复数运算次数转换为实数乘法的次数，即一个复数乘法运算可以看为 4 次乘法运算。

## 2.5 本章小结

本章首先对大规模 MIMO 通信系统进行了简要介绍，其次引出了大规模 MIMO 系统中的信号检测流程，然后介绍了在信号检测中的四种经典检测方法，包括最大似然检测算法、匹配滤波检测算法、迫零检测算法和最小均方误差检测算法，并对各算法进行了理论分析，为之后提出的基于 MMSE 检测代替矩阵求逆的检测算法建立理论依据，同时还在复杂度，信道环境，误比特率方面对比了四种算法。最后介绍了本文对于信号检测算法性能的衡量指标，主要以误比特率和算法进行的实数运算次数来分析算法的性能。



## 第三章 基于改进 Richardson 的大规模 MIMO 信号检测算法

### 3.1 引言

在大规模 MIMO 系统上行链路中, 用户天线数量远远小于基站天线数量时, 小尺度衰落与非相干噪声的影响将变小, 此时各个信道之间趋于正交, 因此传统的线性检测也可以得到近似最优的检测性能。MMSE 检测算法被广泛应用于通信中, 因为它考虑了噪声影响, 从而获得更准确的判决, 但是随着大规模 MIMO 系统中天线规模大幅增加, MMSE 检测矩阵求逆会导致整个系统的复杂度迅速增加。在发射功率受限时, 传输信号时延和精确性难以满足, 因此大规模 MIMO 上行链路中需引入快速准确的信号检测技术以提高系统性能。利用级数展开方法只能得到复杂度的边缘性降低, 因为级数展开的复杂度取决于所使用的迭代展开式, 而且往往需要大量的级数项才可以达到较高的精度。而将矩阵求逆问题转换为线性方程组求解问题, 利用迭代算法进行求解, 可以将算法的复杂度由  $O(K^3)$  降到  $O(K^2)$ 。

虽然迭代检测算法的复杂度大幅降低, 但是传统的迭代算法的收敛性很慢, 需要大量迭代才可以达到 MMSE 算法的检测性能。通常来说, 可以从两个角度来考虑加快迭代算法的收敛, 一个角度是对初始值的选取, 在迭代过程相同情况下, 初始值选取和精确解越接近, 此时算法达到收敛所需要的迭代次数就越少; 本文通过对比不同初值的收敛速度, 选取了一个更合适的初值; 另一个角度是从算法迭代过程进行优化, Richardson 迭代方法具有非常简单的迭代形式, 不过需要较高的迭代次数才可达到合适的精度<sup>[62]</sup>, 本章尝试结合最速下降法和整体校正法来加速 Richardson 算法迭代的收敛性, 其中最速下降法为 Richardson 提供一个有效的搜索方向, 当迭代近似解接近精确解时, 最速下降法将不再提供有效的搜索方向, 此时采用整体校正法来进行有效搜索来提高收敛率, 将所提的基于改进 Richardson 信号检测算法与传统 Richardson 迭代检测算法从计算复杂度和误比特率仿真分析两个角度进行比较。

### 3.2 相关算法回顾

#### 3.2.1 Richardson 检测算法

Richardson 迭代是一种解决线性方程组的算法, 基于 MMSE 算法的 Richardson 迭代方程可表示为:

$$\mathbf{x}^{(t)} = \mathbf{x}^{(t-1)} + \omega(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(t-1)}) \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (3.1)$$

展开式 (3.1), 可以得到 Richardson 迭代的分量为:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1^{(t)} = \mathbf{x}_1^{(t-1)} + \omega\mathbf{b}_1 - \omega(a_{11}\mathbf{x}_1^{(t-1)} + a_{12}\mathbf{x}_2^{(t-1)} + \dots + a_{1T}\mathbf{x}_T^{(t-1)}) \\ \mathbf{x}_2^{(t)} = \mathbf{x}_2^{(t-1)} + \omega\mathbf{b}_2 - \omega(a_{21}\mathbf{x}_1^{(t-1)} + a_{22}\mathbf{x}_2^{(t-1)} + \dots + a_{2T}\mathbf{x}_T^{(t-1)}) \\ \mathbf{x}_3^{(t)} = \mathbf{x}_3^{(t-1)} + \omega\mathbf{b}_3 - \omega(a_{31}\mathbf{x}_1^{(t-1)} + a_{32}\mathbf{x}_2^{(t-1)} + \dots + a_{3T}\mathbf{x}_T^{(t-1)}) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_T^{(t)} = \mathbf{x}_T^{(t-1)} + \omega\mathbf{b}_T - \omega(a_{T1}\mathbf{x}_1^{(t-1)} + a_{T2}\mathbf{x}_2^{(t-1)} + \dots + a_{TT}\mathbf{x}_T^{(t-1)}) \end{cases}, \quad (3.2)$$

其中  $\omega$  代表松弛参数,  $t$  代表迭代次数, 松弛参数的范围是  $0 < \omega < \frac{2}{\lambda_{\max}}$ , 其中  $\lambda_{\max}$  表示 MMSE 检测矩阵  $\mathbf{A}$  的最大特征值, 才可以保证式 (3.1) 收敛。

松弛参数  $\omega$  的选取对于算法的收敛性以及收敛速度来说起至关重要的作用, 选取的松弛参数不合适, 算法性能会变得较差<sup>[63]</sup>。传统的 Richardson 迭代对于松弛参数的选取只是确定在  $0 < \omega < \frac{2}{\lambda_{\max}}$  范围, 并没有确定的数值, 因此可利用正定矩阵的最小特征值和最大特征值求解最优的松弛参数, 最佳松弛参数公式为:

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}, \quad (3.3)$$

其中  $\lambda_{\min}$  和  $\lambda_{\max}$  分别表示矩阵  $\mathbf{A}$  的最小特征值和最大特征值, 不过矩阵的特征值难以计算, 一般采用近似的特征值。在大规模 MIMO 信号检测系统中, 一般基站天线数  $N$  和用户天线数  $K$  很大, 根据随机矩阵理论, 如果两者增长到无穷大, MMSE 矩阵的特征值范围将趋于稳定, 并且近似为:

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} &\rightarrow N(1 - \sqrt{K/N})^2 \\ \lambda_{\max} &\rightarrow N(1 + \sqrt{K/N})^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

通过式 (3.3) 和式 (3.4), 可以得到:

$$\omega_{\text{opt}} = (2 / (\lambda_{\min} + \lambda_{\max})) = \frac{1}{N + K}. \quad (3.5)$$

综合以上结果, Richardson 迭代表达式可写为:

$$\mathbf{x}^{(t)} = \mathbf{x}^{(t-1)} + \frac{(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(t-1)})}{N + K} \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (3.6)$$

### 3.2.2 最速下降算法

最速下降法是一种基于梯度的算法, 它的思想是在每次迭代中, 按照当前梯度方向对目标函数进行下降, 并以固定的步长  $\mu^{(t)}$  进行更新。

对于求解线性方程组  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , 可以将其转化为求解无约束二次严格凸优化问题, 表达形式为:

$$\min_{\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{2K}} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}^T \hat{\mathbf{x}}, \quad (3.7)$$

其中  $\hat{\mathbf{x}}$  表示在式 (3.7) 取得最小值向量, 同时也是线性方程组对应的唯一解, 因此也可看成  $f(\mathbf{x})$  唯一极小点问题, 可以从任意一个点  $\hat{\mathbf{x}}^{(t)}$  出发, 沿着某一指定方向  $\mathbf{r}^{(t)}$ , 迭代方程表示为:

$$\hat{\mathbf{x}}^{(t+1)} = \hat{\mathbf{x}}^{(t)} + \mu^{(t)} \mathbf{r}^{(t)}. \quad (3.8)$$

根据多元微积分的原理, 在点  $\hat{\mathbf{x}}^{(t)}$  处, 负梯度方向是  $f(\mathbf{x})$  在该点的下降最快的方向, 可表示为:



$$-\nabla f(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}^{(t)}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^{(t)} = \mathbf{r}^{(t)}. \quad (3.9)$$

通过式 (3.9) 求解出步长  $\mu^{(t)}$ ，表示为：

$$\begin{aligned} \varphi(\mu^{(t)}) &= f(\hat{\mathbf{x}}^{(t)} + \mu^{(t)}\mathbf{r}^{(t)}) \\ &= f(\hat{\mathbf{x}}^{(t)}) - \mu^{(t)}(\mathbf{r}^{(t)})^T \mathbf{r}^{(t)} + \frac{(\mu^{(t)})^2}{2} (\mathbf{A}\mathbf{r}^{(t)})^T \mathbf{r}^{(t)}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

将  $\varphi'(\mu^{(t)})=0$ ，可以得到步长  $\mu^{(t)}$  表达式为：

$$\mu^{(t)} = \frac{(\mathbf{r}^{(t)})^T \mathbf{r}^{(t)}}{(\mathbf{r}^{(t)})^T \mathbf{A}\mathbf{r}^{(t)}}. \quad (3.11)$$

综上所述，最速下降法的步骤可以为：

第一步：确定初始点，同时给定容许误差  $\varepsilon > 0$ ， $\hat{\mathbf{x}}^{(t+1)} = \hat{\mathbf{x}}^{(t)} + \mu^{(t)}\mathbf{r}^{(t)}$ ；

第二步：计算出  $\nabla f(\mathbf{x})$ ，如果  $\|\nabla f(\mathbf{x})\| \leq \varepsilon$ ，则停止  $\hat{\mathbf{x}}^{(0)}$  迭代，输出  $\hat{\mathbf{x}}^{(t+1)}$ 。否则进行第三步；

第三步：令  $\mathbf{r}^{(t)} = -\nabla f(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}^{(t)}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^{(t)}$ ；

第四步：通过线搜索技术确定步长  $\mu^{(t)}$ ；

第五步：对进行计算，同时  $t := t+1$ ，返回到第二步。

通过求解  $\varphi'(\mu^{(t)})=0$ ，也可以发现：

$$\begin{aligned} \varphi'(\mu^{(t)}) &= \frac{d}{d\mu^{(t)}} f(\hat{\mathbf{x}}^{(t)} + \mu^{(t)}\mathbf{r}^{(t)}) \\ &= \nabla f(\hat{\mathbf{x}}^{(t)} + \mu^{(t)}\mathbf{r}^{(t)})^T \mathbf{r}^{(t)}. \\ &= \nabla f(\hat{\mathbf{x}}^{(t+1)})^T \nabla f(\hat{\mathbf{x}}^{(t)}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

通过式 (3.12) 可以发现迭代后的点  $\hat{\mathbf{x}}^{(t+1)}$  梯度是与迭代前的点  $\hat{\mathbf{x}}^{(t)}$  梯度是正交的，因此可以说明迭代点所走的路是锯齿形的，在开始的迭代中，目标函数下降速度很快，但当结果接近极小值时，收敛速度会变慢。如图 3-1 为最速下降法搜索图。

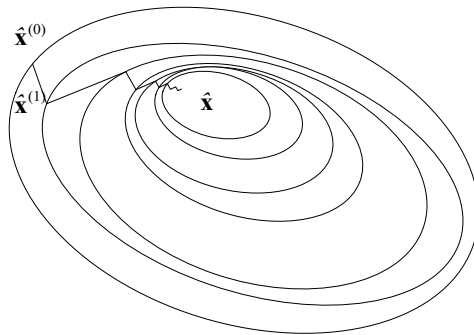


图 3-1 最速下降法搜索图

### 3.2.3 整体校正法

在使用迭代算法解决线性方程组的过程中，收敛和收敛速度是两个至关重要的问题。虽然该算法有可能收敛，但也有可能不收敛；即使收敛了，有时候收敛速度也会非常缓慢，针对上述问题，利用整体校正法可对任何迭代算法施加校正过程<sup>[64]</sup>。

假设线性方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  得到的互异近似解为  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m (m > 1)$ ，同时对其中的任意解  $\mathbf{x}_i (i=1, 2, \dots, m)$  都使得  $\mathbf{Ax}_i \neq \mathbf{b}$ 。通过不同互异解  $\mathbf{x}_i$  的信息来构造向量校正解  $\mathbf{x}^*$ ，令它比  $\mathbf{x}_i$  更接近方程组的精确解，因此要满足  $\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}^*\|_2 < \min_{1 \leq i \leq m} \|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_i\|_2$ ，整体校正模型为：

$$\mathbf{x}^* = a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 + \dots + a_m \mathbf{x}_m, \quad (3.13)$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = 1, \quad (3.14)$$

其中  $a_i$  表示各近似解  $\mathbf{x}_i$  对校正解  $\mathbf{x}^*$  的贡献占比，任意选定  $i_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$ ，将 (3.14) 代入 (3.13)，可以得到：

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} a_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i_0}), \quad (3.15)$$

其中第  $i_0$  个近似解对应的残差向量可以表示  $\mathbf{r}_{i_0} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}_{i_0}$ ，则校正解的残差向量可以写为：

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}^* = (\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_{i_0}) + \sum_{i \neq i_0} a_i (\mathbf{Ax}_i - \mathbf{Ax}_{i_0}) = \mathbf{r}_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} a_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i_0}), \quad (3.16)$$

引进记号

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{i_0} &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{i_0}, \dots, \mathbf{r}_{i-1} - \mathbf{r}_{i_0}, \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_{i_0}, \dots, \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_{i_0}) \\ \mathbf{y}_{i_0} &= (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m)^T \end{aligned}, \quad (3.17)$$

因此  $\mathbf{r}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{r}_{i_0} + \mathbf{Q}_{i_0} \mathbf{y}_{i_0}$ ，满足  $\|\mathbf{r}_{i_0} + \mathbf{Q}_{i_0} \mathbf{y}_{i_0}\|_2 < \min_{1 \leq i \leq m} \|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_i\|_2$ ，极小范数解可表写为：

$$\mathbf{y}_i = -(\mathbf{Q}_i)^+ \mathbf{r}_i, \quad (3.18)$$

其中  $(\cdot)^+$  表示矩阵的广义逆。

### 3.3 改进 Richardson 检测算法

本节提出一种基于改进 Richardson 迭代的信号检测算法。设计该算法的目的是为了加快 Richardson 迭代检测算法收敛速度，降低计算复杂度，通过利用最速下降法为 Richardson 迭代检测算法提供更有效的搜索方向。但是在最速下降法迭代近似解接近精确值时，该方法将不再能提供有效搜索方向，为进一步提高算法收敛速度，将整体校正法与之前的两种算法相结合，则称算法为改进 Richardson 迭代算法。

具体来说，改进 Richardson 迭代算法分为两个阶段。在第一阶段，将最速下降法代入 Richardson 第某次迭代的过程中，加快算法收敛速度；在第二阶段，利用整体校正法进一步提高算法的收敛率。

首先, 为了使 Richardson 迭代的估计值快速收敛, 采用最速下降法来为其提供更有利的搜索路径, 具体迭代可分为两个半迭代的过程:

(1) 在算法第  $t$  次迭代的前半段, 采用最速下降法迭代结果可表示为:

$$\mathbf{x}^{(t+\frac{1}{2})} = \mathbf{x}^{(t)} + \mu^{(t)} \mathbf{r}^{(t)}, \quad (3.19)$$

其中  $\mathbf{r}^{(t)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(t)}$  是残差向量,  $\mu^{(t)}$  代表可变步长, 可通过式 (3.11) 得到。

(2) 在第  $t$  次迭代的后半段, 进行 Richardson 迭代, 其迭代结果可写为:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(t+1)} &= \mathbf{x}^{(t+\frac{1}{2})} + \omega \left( \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(t+\frac{1}{2})} \right) \\ &= (\mathbf{I} - \omega \mathbf{A}) \mathbf{x}^{(t+\frac{1}{2})} + \omega \mathbf{b} \end{aligned} \quad (3.20)$$

将式 (3.19) 带入式 (3.20) 后, 可以得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(t+1)} &= \mathbf{x}^{(t)} + \mu^{(t)} \mathbf{r}^{(t)} + \omega (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(t)} - \mu^{(t)} \mathbf{p}^{(t)}) \\ &= \mathbf{x}^{(t)} + \mu^{(t)} \mathbf{r}^{(t)} + \omega (\mathbf{r}^{(t)} - \mu^{(t)} \mathbf{p}^{(t)}) \end{aligned}, \quad (3.21)$$

其中式 (3.21) 的  $\mathbf{p}^{(t)} = \mathbf{A}\mathbf{r}^{(t)}$ , 在每次迭代中最速下降法提高了 Richardson 迭代的收敛率。由 3.2 节分析的最速下降法所具有的特征, 该算法采用直角锯齿状的搜索方式, 当迭代值逐渐接近精确解, 最速下降法无法提供有效的迭代方向, 导致收敛速度变慢。为了进一步提高算法收敛, 采用整体校正法继续提高该算法迭代的收敛性。

整体校正法用于优化线性方程组的收敛速度和精度的方法。在迭代过程中, 对不同的近似解赋予权值以求得最优解, 将整体校正法应用于上述算法过程如下:

假设  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$  ( $m > 1$ ) 是发射信号  $\mathbf{x}$  的不同互异解, 因为上述方法通过不同迭代次数确定不同解, 因此令  $\underbrace{\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}^{(t-m+1)}, \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}^{(t-m+2)}, \dots, \mathbf{x}_m = \mathbf{x}^{(t)}}_m$ , 其中  $t$  表示迭代次数,  $m$  表示

互异解的个数, 考虑采用不同权重, 则更新后校正解为:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 + \dots + a_m \mathbf{x}_m, \\ a_1 + a_2 + \dots + a_m &= 1 \end{aligned}, \quad (3.22)$$

其中校正系数  $a_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ) 为不同互异解对于校正解贡献率。

整体校正法通过从互异解集合  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\}$  中设计出更准确的解  $\mathbf{x}^*$ , 因此更新后的解应满足条件  $\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*\|_2 < \min_{1 \leq i \leq m} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i\|_2$ 。校正系数的最优化可以转换为  $\min \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*\|_2$ , 以任选  $i_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$  为例, 计算对应校正系数  $a_{i_0}$  的过程, 将式 (3.22) 改写为:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} a_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i_0}), \quad (3.23)$$

其中  $a_{i_0}$  对应的残差向量为  $\mathbf{r}_{i_0} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_{i_0}$ , 根据式 (3.9),  $\mathbf{x}^*$  的残差向量可以写为

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^* = (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_{i_0}) + \sum_{i \neq i_0} a_i (\mathbf{A}\mathbf{x}_i - \mathbf{A}\mathbf{x}_{i_0}) = \mathbf{r}_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} a_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i_0}). \quad (3.24)$$

因此, 求解最优化系数  $a$  以表示为:

$$\min_a \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*\|_2 = \min_a \left\| \mathbf{r}_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} a_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i_0}) \right\| = \min_a \left\| \mathbf{r}_{i_0} + \mathbf{Q}_{i_0} \mathbf{y}_{i_0} \right\|, \quad (3.25)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{i_0} &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{i_0}, \dots, \mathbf{r}_{i-1} - \mathbf{r}_{i_0}, \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_{i_0}, \dots, \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_{i_0}) \\ \mathbf{y}_{i_0} &= (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m)^T \end{aligned} \quad (3.26)$$

式 (3.26) 的最小范数解为:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{i_0} &= -(\mathbf{Q}_{i_0})^+ \mathbf{r}_{i_0} \\ a_{i_0} &= 1 - \sum_{i \neq i_0} a_i \end{aligned} \quad (3.27)$$

其中  $(\mathbf{Q}_i)^+$  表示矩阵  $\mathbf{Q}_i$  的广义逆。当计算出  $a_i$  的值, 就可以得到校正解  $\mathbf{x}^*$ 。

如图 3-2 为改进 Richardson 迭代算法的检测流程图:

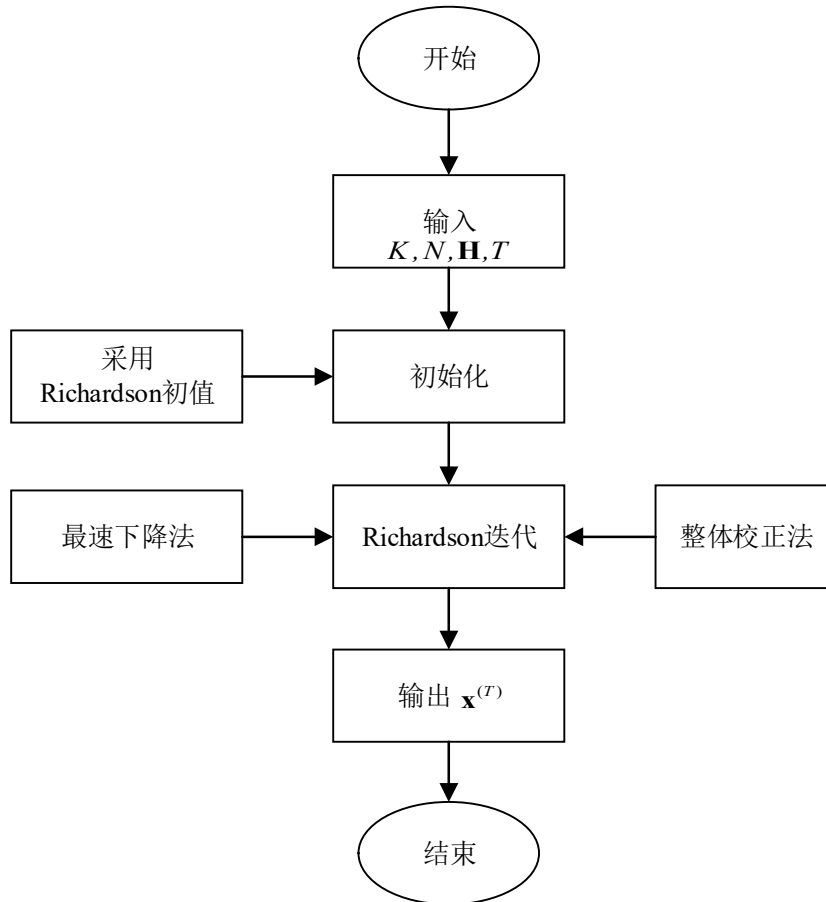


图 3-2 改进 Richardson 迭代算法流程

综上所述改进 Richardson 迭代检测如算法 3-1 所示, 设定其将在进行  $T$  次迭代后停止。除此之外, 选取近似解数量  $m$  是该算法的一个关键问题, 会直接关系到算法计算复杂度和收敛速度。下面将在两个角度分析和讨论  $m$  的选取。

---

**算法 3-1: 改进 Richardson 迭代信号检测算法**


---

**输入:** 信道矩阵  $\mathbf{H}$   
 松弛参数  $\omega$   
 接收信号向量  $\mathbf{y}$   
 信噪比范围  $-2:18\text{dB}$   
 迭代次数  $T$

**步骤 1:** 计算发射信号  $\mathbf{x}$  的初始解, 记为  $\mathbf{x}^{(0)}$ ;

**步骤 2:** 当  $m > 2$ , 则通过式 (3.23) 计算出  $m-2$  个发射信号  $\mathbf{x}$  的近似解, 写为  $\underbrace{\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(m-2)}}_{m-2}$ ,

**For**  $t = 1 : m - 2$

    通过式 (3.21) 计算  $\mathbf{x}^{(t)}$

**End for**

**步骤 3:** 通过整体校正法更新迭代估计解

**For**  $t = m - 1 : T$

    通过式 (3.21) 计算  $\mathbf{x}^{(t)}$ ;

    通过  $\underbrace{\mathbf{x}^{(t-m+1)}, \mathbf{x}^{(t-m+2)}, \dots, \mathbf{x}^{(t)}}_m$  得到校正后的迭代解  $\mathbf{x}^{(t)}$

**End for**

**输出:** 改进 Richardson 算法检测信号  $\mathbf{x}^{(T)}$

---

### 3.3.1 $m$ 取值分析

已有的基于 MMSE 检测的迭代算法表明, 当达到停止条件时, 所需的迭代次数有限。鉴于此, 从迭代中得到的近似解数量也是有限的。在不同  $m$  值的情况下, 算出对应校正系数的计算复杂度, 为便于分析计算, 假设  $i_0 = 1$ , 则校正系数可写为:

$$\begin{cases} [a_2, \dots, a_m] = -[(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \dots, (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_1)]^+ \mathbf{r}_1 \\ a_1 = 1 - a_2 - \dots - a_m \end{cases} \quad (3.28)$$

在  $m > 2$  时, 需要计算广义逆来得到校正系数, 所需要的实数乘法次数<sup>[65]</sup>为  $O(mK^2)$ 。

在  $m = 2$  时, 校正系数  $a_1$  和  $a_2$  的计算式为

$$\begin{aligned} a_2 &= -(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^+ \mathbf{r}_1 = -\frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^H \mathbf{r}_1}{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^H (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}. \\ a_1 &= 1 - a_2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

在  $m = 2$  时, 计算校正系数时所需四次向量乘法, 复杂度为  $O(K)$ , 在  $m > 2$  时, 计算校正系数时所需要的复杂度为  $O(mK^2)$ 。通过复杂度的计算量可以发现, 在  $m > 2$  时算法需要更多的计算来处理每个近似解, 因此在实际应用中, 如果可以使用更少的近似解获得满足精度要求的结果, 则应尽量减少近似解  $m$  的数量, 在复杂度计算方面  $m = 2$  更具有优势。接下来, 研究了  $m = 2$  时对算法误比特率性能的影响。参数设置为: 用户天线

数 32，基站天线数为 128，调制方式 32QAM，仿真选用的总帧数  $L = 20000$ ；信噪比范围设置在 -2:18dB；信源数据采用函数随机生成。

通过图 3-3 可以发现在  $m=1$ ，即不采用整体校正法时，随着迭代次数增加，算法的性能提高很多，但在迭代 3 次时，算法性能与理想值 MMSE 相比还是有一定的差距；而采用整体校正法可以在很少的迭代次数内达到接近 MMSE 检测算法。在迭代两次时整体校正法性能就要比  $m=1$  算法迭代三次效果好，在迭代次数为三次时性能已经与 MMSE 算法非常接近。如果继续增加近似解的数量，通过上述的对该算法复杂度的计算，整体校正部分的复杂度将成倍增加。然而通过观察仿真可知，该算法  $m=2$  时性能与 MMSE 算法性能已相差很少，继续增加  $m$  值对误比特率改善将非常有限，因此采用  $m=2$ 。

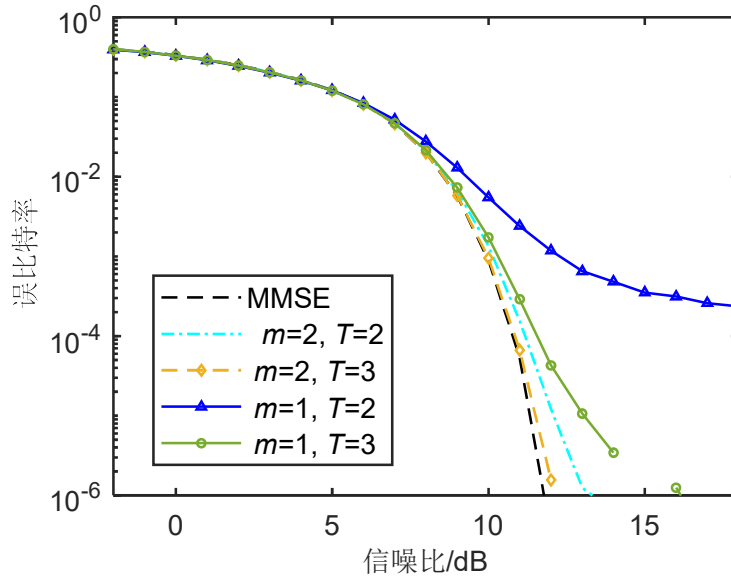


图 3-3  $m=1$  与  $m=2$  时误比特率比较

### 3.3.2 收敛性分析

改进 Richardson 算法使用迭代更新信号检测，该算法收敛性对于算法的准确性至关重要，因此，有必要对其收敛性进行分析和证明，来验证该算法。

**定理 3-1:** 迭代算法  $\mathbf{x}^{(t+1)} = \mathbf{E}\mathbf{x}^{(t)} + \mathbf{c}$  对任意初始向量  $\mathbf{x}^{(0)}$  保持收敛的充要条件是  $\rho(\mathbf{E}) < 1$  [66]。

通过定理 3-1 可知，迭代算法收敛性是和迭代更新矩阵谱半径互相关联的，通过式 (3.21) 推导出其迭代更新矩阵，对迭代算法进行如下改写：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^{(t+1)} &= \mathbf{x}^{(t)} + \mu^{(t)} \mathbf{r}^{(t)} + \omega(\mathbf{r}^{(t)} - \mu^{(t)} \mathbf{p}^{(t)}) \\
 &= \mathbf{x}^{(t)} + \mu^{(t)} (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(t)}) + \omega((\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(t)}) - \mu^{(t)} \mathbf{A}\mathbf{r}^{(t)}) \\
 &= \mathbf{x}^{(t)} + \mu^{(t)} (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(t)}) + \omega((\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(t)}) - \mu^{(t)} \mathbf{A}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(t)})) \\
 &= (\mathbf{I} - \mu^{(t)} \mathbf{A} - \omega \mathbf{A} + \omega \mu^{(t)} \mathbf{A}^2) \mathbf{x}^{(t)} + \mu^{(t)} \mathbf{b} + \omega \mathbf{b} - \omega \mu^{(t)} \mathbf{A} \mathbf{b}
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

因此，Richardson 算法与最速下降法结合的迭代更新矩阵  $\mathbf{E}_{\text{SD-R}} = (\mathbf{I} - \mu^{(t)} \mathbf{A})(\mathbf{I} - \omega \mathbf{A})$ ，之后，通过迭代更新矩阵，来分析其谱半径  $\rho(\mathbf{E}_{\text{SD-R}})$

$$\rho(\mathbf{E}_{\text{SD-R}}) = \rho((\mathbf{I} - \mu^{(t)}\mathbf{A})(\mathbf{I} - \omega\mathbf{A})). \quad (3.31)$$

因为 MMSE 的滤波矩阵  $\mathbf{A}$  是厄米特正定矩阵，由此可以推断出  $\mathbf{I} - \mu^{(t)}\mathbf{A}$  的范数小于 1<sup>[67]</sup>，由此可以得出  $\rho((\mathbf{I} - \mu^{(t)}\mathbf{A})) < 1$ ，同时也可以发现其实  $\rho((\mathbf{I} - \omega\mathbf{A}))$  其实为 Richardson 算法的谱半径，对于 Richardson 算法的谱半径可通过特征值求得：

$$\rho(\mathbf{E}_{\text{R}}) = \max |\lambda(\mathbf{E}_{\text{R}})| = \frac{N}{N+K} \sqrt{\frac{4K}{N}}. \quad (3.32)$$

一般在大规模 MIMO 信号检测中  $N \gg K$ ，通过式 (3.32) 可以发现 Richardson 算法的谱半径小于 1。同时也可以发现

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{E}_{\text{SD-R}}) &= \rho((\mathbf{I} - \mu^{(t)}\mathbf{A})(\mathbf{I} - \omega\mathbf{A})) \\ \rho(\mathbf{E}_{\text{R}}) &= \rho((\mathbf{I} - \omega\mathbf{A})) \\ \rho(\mathbf{E}_{\text{SD-R}}) &< \rho(\mathbf{E}_{\text{R}}) \end{aligned} \quad (3.33)$$

迭代矩阵的谱半径代表了算法收敛速度，该值越小说明算法的收敛就越快，因此可以发现最速下降法与 Richardson 算法结合的比 Richardson 算法收敛速度更快。

与此同时也要分析证明整体校正法对于迭代算法收敛的影响，可以发现两个互异解  $\mathbf{x}_1$  和  $\mathbf{x}_2$  分别对应的残差向量为  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_1$  和  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_2$ ；校正后的解  $\mathbf{x}^{(T)}$  对应的残差向量可以表示为  $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(T)}$ 。将不同残差向量视为一个空间中的向量，将原点看作向量的起点，同时将每个残差向量对应的点作为终点，之后可以得到：

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^H \mathbf{r} &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^H (\mathbf{r}_2 + a_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)) \\ &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^H (\mathbf{r}_2 + \mathbf{Q}_2 \mathbf{y}_2) \\ &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^H (\mathbf{r}_2 - \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_2^+ \mathbf{r}_2) \\ &= ((\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^H - (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^H \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_2^+) \mathbf{r}_2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

由此发现， $\mathbf{r}$  是正交于  $\mathbf{r}_1$  和  $\mathbf{r}_2$  确定的超平面，也就说明

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}\|_2 &\leq \|\mathbf{r}_1\|_2 \\ \|\mathbf{r}\|_2 &\leq \|\mathbf{r}_2\|_2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

综合以上分析可以得到本章节提到的改进 Richardson 算法具有更好的收敛性能。

### 3.3.3 初始值选取

迭代算法的收敛性不受初始值影响，但初始值的选择会对迭代算法的收敛速度和检测精度产生一定影响。当初始值为零向量时，算法收敛会很慢。一般来说，对于求解  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  线性方程组，初始值的选取主要有两种，一种是雅可比算法的处初始值，即  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$ ， $\mathbf{D}$  为  $\mathbf{A}$  的对角矩阵<sup>[68]</sup>；另一种初始值为 Richardson 算法的初值，即  $\mathbf{x}^{(0)} = \omega_{opt} \mathbf{b}$ 。随着基站天线数和用户数提高，信道会出现硬化现象<sup>[69]</sup>，此时该矩阵的对角元素相对非对角元素大很多，此时  $\mathbf{A}$  可看作为其对角矩阵  $\mathbf{D}$ ，所以  $\mathbf{D} \approx \mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{I}$ ，为了更好的比较两

种初值，对比两种迭代算法的收敛速度，雅可比的迭代矩阵可表示为：

$\mathbf{E}_j = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}}{N}$ ，通过式 (3.4)，可得到雅可比的迭代矩阵的特征值为：

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(\mathbf{E}_j) &\rightarrow 1 - (1 + \sqrt{K/N})^2 \\ \lambda_{\max}(\mathbf{E}_j) &\rightarrow 1 - (1 - \sqrt{K/N})^2.\end{aligned}\quad (3.36)$$

因此雅可比迭矩阵的谱半径可以表示为

$$\rho(\mathbf{E}_j) = \max |\lambda(\mathbf{E}_j)| = (1 + \sqrt{K/N})^2 - 1 = 2\sqrt{K/N} + K/N. \quad (3.37)$$

通过式 (3.32)，得到 Richardson 迭代矩阵的谱半径为：

$$\rho(\mathbf{E}_R) = \max |\lambda(\mathbf{E}_R)| = \frac{N}{N+K} \sqrt{\frac{4K}{N}} = \frac{2N}{N+K} \sqrt{\frac{K}{N}}. \quad (3.38)$$

通过对比式 (3.37) 和式 (3.38)，可以得到

$$\rho(\mathbf{E}_R) = \frac{2N}{N+K} \sqrt{\frac{K}{N}} = 2\sqrt{\frac{K}{N}} - \frac{2K}{N+K} \sqrt{\frac{K}{N}} < 2\sqrt{\frac{K}{N}} < 2\sqrt{\frac{K}{N}} + \frac{K}{N} = \rho(\mathbf{E}_j). \quad (3.39)$$

可以发现  $\rho(\mathbf{E}_R) < \rho(\mathbf{E}_j)$ ，不同算法的谱半径和算法的收敛速度是呈负相关的，所以谱半径越小，算法收敛速度就会越快。因此可以得出 Richardson 迭代算法的收敛速度更快。同理 Richardson 算法的初值比雅可比算法初值收敛速度更快，本文算法收敛初值选取为

$$\mathbf{x}^{(0)} = \frac{1}{N+K} \mathbf{b}. \quad (3.40)$$

通过对复杂度和误比特率综合的考虑，来选择  $m$  值为 2，则对应的改进 Richardson 迭代的低复杂度信号检测过程如算法 3-2 所示，该算法将在迭代  $T$  次后停止。

---

### 算法 3-2: $m = 2$ 时的改进 Richardson 迭代信号检测算法

---

**输入：** 用户数量  $K$

基站天线数量  $N$

信道矩阵  $\mathbf{H}$

松弛参数  $\omega$

接收信号向量  $\mathbf{y}$

信噪比范围 -2:18dB

迭代次数  $T$

**初始化：**

$$\mathbf{A} = \mathbf{H}^H \mathbf{H} + \sigma^2 \mathbf{I}_{2K};$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{H}^H \mathbf{y};$$

$$\omega = \frac{1}{N+K};$$

$$\mathbf{x}^{(0)} = \omega \mathbf{b};$$


---



$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)};$$

迭代过程（重复  $T$  次）

For  $t = 1:T$

当  $t = 1$  时:  $\mathbf{r}^{(0)}$  由预处理得到;

当  $t > 1$  时:  $\mathbf{r}^{(t-1)} = a_1\mathbf{r}_1 + a_2\mathbf{r}_2$ ;

$$\mathbf{p}^{(t-1)} = \mathbf{A}\mathbf{r}^{(t-1)};$$

$$\mu^{(t-1)} = \frac{(\mathbf{r}^{(t-1)})^H \mathbf{r}^{(t-1)}}{(\mathbf{A}\mathbf{r}^{(t-1)})^H \mathbf{r}^{(t-1)}};$$

$$\mathbf{x}^{(t)} = \mathbf{x}^{(t-1)} + \mu^{(t-1)}\mathbf{r}^{(t-1)} + \omega(\mathbf{r}^{(t-1)} - \mu^{(t-1)}\mathbf{p}^{(t-1)});$$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}^{(t-1)}; \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}^{(t)};$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}^{(t-1)}; \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_2;$$

$$a_2 = -\frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^H \mathbf{r}_1}{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^H (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}; \quad a_1 = 1 - a_2;$$

$$\mathbf{x}^{(t)} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2;$$

End for

输出: 改进 Richardson 算法检测信号  $\mathbf{x}^{(T)}$

### 3.4 计算复杂度分析

本小节主要分为两个部分, 第一部分分析 Richardson 算法计算复杂度, 第二部分是分析改进 Richardson 算法计算复杂度。在大规模 MIMO 信号检测系统中, 计算复杂度是衡量其性能的重要指标之一。计算复杂度过程包括算法初始化还有迭代两个部分, 同时为了可以更公平的比较各算法性能, 本章节各算法将采用相同的初始值, 其计算表达式为  $\mathbf{x}^{(0)} = \omega\mathbf{b}$ 。计算复杂度衡量是采用所需要计算的实数乘法次数, 即将一次实数乘法定义为 1, 一个复数与一个常数相乘可以看作 2 次实数乘法, 两个复数相乘可以看作 4 次实数乘法。在计算复杂度假设信道矩阵  $\mathbf{H}$  已知。

#### 3.4.1 Richardson 算法复杂度分析

Richardson 算法的复杂度主要由初始化和迭代部分组成。

Richardson 算法初始化的复杂度如下所示:

- (1)  $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$  是  $2K \times 2N$  维的矩阵和  $2N \times 2K$  维的矩阵相乘, 需要的复杂度是  $8NK^2$ ;
- (2)  $\mathbf{H}^H\mathbf{y}$  是  $2K \times 2N$  维的矩阵和  $2N \times 1$  维的向量相乘, 需要的复杂度是  $4NK$ ;
- (3)  $\frac{1}{N+K}$  可看作由两个实数进行相乘, 需要的复杂度是 1;
- (4)  $\omega\mathbf{b}$  是实数与  $2K \times 1$  维的向量相乘, 需要的复杂度为  $2K$ ;

Richardson 迭代部分的表达式为  $\mathbf{x}^{(t)} = \mathbf{x}^{(t-1)} + \omega(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(t-1)})$ 。

迭代部分的复杂度为如下所示:

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/148032005003006042>