拓展一：条件概率、全概率公式及贝叶斯公式

8种常见考法归类

高频考点

考点一 条件概率的定义及计算

（一）利用定义求条件概率

（二）缩小样本空间求条件概率

考点二 包含事件的条件概率问题

考点三 相互独立事件的条件概率问题

考点四 概率的乘法公式

考点五 条件概率的性质及应用

考点六 全概率公式的计算

考点七 全概率公式解决实际问题

（一）产品质检

（二）游戏获胜问题

（三）普查疾病

（四）根源问题

考点八 贝叶斯公式的应用

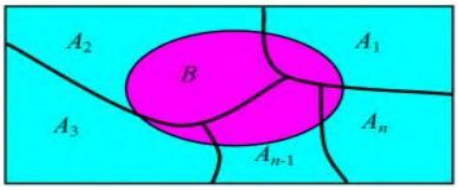
知识梳理

1、一个概念三个公式

条件概率	条件概率是理解并进行复杂概率运算的基础，乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式是条件概率的应用和拓展.条件概率的本质是缩小样本空间后的事件概率，通过古典概型(或其	条件概率概念的建立要抓住“事件”和“空间”进行分析，要分析“条件”是必然性还是“随机”性，是以“条件”重构的样本空间还是在原样本空间中运用“条件”.因此，“事件”“空间”和“条件”是概念建立的关键词. (1)对条件A的理解：第一，从缩小样本空间的角度上看，在条件“已经发生”的基础上，样本空间缩小了，是在缩小了的空间上用概率模型或概率计算方法求解概率.第二，从概率之间的相互联系分析，在事件A发生的条件下，事件B发生的概率$P(B\|A)$又与在原样本空间上事件A发生的概率$P(A)$有关系，正因为此时的$P(A)$是事件A在原样本空间发生的概率，因而事件A在原样本空间里不是“必然发生”的事件，不是“发生过了”的事件，而是随机事件. (2)对$P(B\|A)$和$P(AB)$的分析.学生容易混淆$P(B\|A)$和$P(AB)$，认为它们都是“事件A发生了，事件也B发生了”，实际上，它们有着本质的区别.第一，

	他概型)，抽象概括成条件概率的概念（定义式）注：条件概率定义式 $P(B\|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ 反映了"原"样本空间的 $P(A)$、$P(AB)$ 与缩小后的样本空间的 $P(B\|A)$ 之间的关系.	前者指缩小样本空间后事件B发生的概率，此时，事件A已经发生了，以A发生为条件重新组构样本空间.第二，后者指原样本空间上事件A、B同时发生的概率，此时事件A不一定是必然发生的事件，一般为随机事件.亦即，第一，它们的样本的空间不同，前者以事件A发生为条件，缩小了样本空间即Ω_A，后者是原来样本空间Ω没有改变.第二，事件不同，前者是针对缩小样本空间后的事件B，后者是针对原样本空间的事件AB. (3)注意"条件"的变化.条件概率中的"条件"具有相对性， $P(B\|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}, P(A\|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$①. ①式中含两个式子，其"条件"不一样，说明在一个样本空间中，条件不是一成不变的，这在之后的乘法公式、贝叶斯公式中能够更好的体现. (4)条件概率的计算.条件概率一般有三种求法，一是原样本空间概率法，即定义式，二是缩小样本空间法，是指在缩小的样本空间上用古典概型或几何概型等计算，三是原样本空间计数法，即$P(B\|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}$. (5)条件概率的性质.根据条件重构样本空间、缩小样本空间后"新"的样本空间上概率的性质即是条件概率的性质
乘法公式	将条件概率的"定义式"进行变形即可得到乘法公式，乘法公式与条件概率定义式是概率的同一关系的不同显现形式，由乘法公式立即可以得到独立事件概率计算公式.乘法公式彻底解决了积事件概率问题.	乘法公式:注重条件的变化，条件概率定义的变式运用 由条件概率公式得乘法公式， $P(AB)=P(A)\cdot P(B\|A), P(AB)=P(B)\cdot P(A\|B)$②. ②式与①式是等价的，说明在求积事件$AB$概率时，"条件"可以是$A$，也可以是$B$，积事件中的"条件"是相对的."一个概念，三个公式"的概念建立环环相扣，积事件中"条件"的变化是之后理解贝叶斯公式的基础. 运用公式②时，由于$P(B\|A)$与$P(AB)$在同一式子中，我们一般通过缩小样本空间先求出条件概率$P(B\|A)$，再用公式②求积事件AB的概率. 两个事件的积事件概率公式可以推广到n个事件，即之前发生的事件作为之后事件发生的条件. 直观上，当事件A与B相互独立时，事件A发生与否对事件B发生的概率没有影响，此时$P(B\|A)=P(B)(P(A)>0), P(A\|B)=P(A)(P(B)>0$注意:作为条件的事件其概率必须大于零)，相应的，公式②变成了$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$③.如果从直观上判定两个事件是独立事件后，③式是作为独立事件的结论的，如果我们假定或已知两个事件相互独立，则可以用③式的结论求积事件概率了.而如果从独立事件定义角度上看，③式则作为判断独立事件的条件. 以下四条中的任意一条均可作为判断独立性的条件: (1)$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$. (2)$P(B\|A)=P(B)(P(A)>0)$. (3)$P(B\|A)=P(B\|\bar{A})(0<P(A)<1)$. (4)$P(B\|A)+P(\bar{B}\|\bar{A})=1(0<P(A)<1)$.
全概率公式	全概率公式是概率加法和乘法公	全概率公式的基本含义是通过事件转化求解概率.怎样把事件进行转化呢?第一，当一个事件发生有多种情况时，要考虑分类，通过分类理出事件发

	式的综合运用，其本质是将一个复杂事件的概率分解成若干个两两互斥的事件“相并”的概率，用以解决由“原因”事件引起“结果”事件概率问题，从已知的可求的事件的概率推算末知的复杂事件的概率是概率论问题解决的基本思想，全概率公式充分体现了这一思想.	生发展的条理.第二，分类后的每一个事件一般不再是“单一”的事件，而是积事件.第三，事件转化后，通过和事件与积事件求概率. **1、建立全概率公式意图和思想方法** 把一个复杂事件变成若干个互斥事件相并，通过并事件(互斥)概率和积事件概率乘法公式即可求得复杂事件的概率，这就是全概率公式的基本思想. 全概率公式是概率论的重要内容，生产实践中我们遇到的事件是复杂的，用“隐含的事件关系简单”“概率关系简单”的事件表示复杂事件，然后求其概率是我们处理概率问题的基本方法. **2、全概率公式及其证明** “一般地，设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是一组两两互斥的事件，$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$，且$P(A_i) > 0, i = 1,2,\cdots,n$，则对任意的$B \subseteq \Omega$，有 $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B\|A_i)$ ④ 称为全概率计算公式. 记$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega, A_1, A_2, \cdots, A_n$称为样本空间$\Omega$的一个“完全事件组”，或样本空间$\Omega$的“一个划分”，是事件 B 发生的一系列“可能的原因”，它们两两互斥，而$A, \overleftarrow{A}$一般认为是样本空间Ω的最简划分，即$A \cup \overleftarrow{A} = \Omega$. 全概率公式可以利用并事件与积事件概率关系证明.由于$B = B \cap \Omega$，所以$B = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = (BA_1) \cup (BA_2) \cup \cdots \cup (BA_n)$，由概率性质， $P(B) = P(BA_1) + P(BA_2) + \cdots + P(BA_n)$，再由积事件公式②，④式即得证. **3、注重通过逻辑和直观理解全概率公式** 注重通过“逻辑”和“直观”理解全概率公式.全概率公式的逻辑基础是并事件、积事件的概率，用并事件求概率体现了求事件概率的分类讨论思想.从逻辑的角度上讲，原样本空间Ω被分成n个两两互斥事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$后，在原样本空间中的每一个$A_i(i = 1,2,\cdots n)$上，事件B就是积事件BA_i(“新的样本空间上事件B就是积事件AB即是这个含义)，而$P(BA_i) = P(A_i) P(B\|A_i)$，求出事件$B$在原样本空间的每一个$A_i(i = 1,2,\cdots n)$上发生其概率和即可.直观上，可以借助于概率“树图”和韦恩图分析，以集合视角理解全概率公式.教学时，要根据高中学生的认知特点，对照直观的图形，用通俗易懂的语言解释全概率公式. **4、全概率公式的运用要领**

		第一，化难为易，找准样本空间及空间的合理“划分”. 用全概率公式解决概率问题，关键要理解原样本空间和该空间的一个“划分”的意义，什么是样本空间的一个“划分”，为什么要划分？如果不把空间进行划分，问题理不出条理，我们称事件中隐含的关系复杂.因此，划分样本空间，可以突出样本空间的层次，使事件关系变得简单. 有些问题，明显可以看出构成“空间”的样本点(基本事件)具有不同的类型，这往往也是我们划分空间的标准. 第二，用全概率公式解决问题的基本路径是:(1)全概率问题一般涉及事件和“条件”，所以要用字母表示相应的事件，这里的“事件”尽量“单一”，一般不交叉，如:涉及男女性别不同和色盲与否的问题，一般不用如:“男生色盲”“女生不色盲”作为一个事件，而用“男生”“女生”“色盲”“不色盲”为一个事件.(2)根据问题所反映的“事实”，确定具体的样本空间及其“构成”空间中的样本点(基本事件).(3)分析样本空间中的事件有没有层次和不同的类型，依据事件的层次和类型进行空间划分.(4)分析问题中(题目)的每一个条件，把条件转化为相应的“事件关系”或“事件的概率”.(5)根据全概率公式进行计算. 
贝叶斯公式	贝叶斯公式是条件概率、全概率公式和概率乘法公式的融合.贝叶斯公式的本质是条件概率，其应用的意义在于，按照事件发生发展的顺序针对“结果”反求“原因”的概率问题.	贝叶斯公式的本质是条件概率，从思维策略上分析，全概率公式和贝叶斯公式体现了解决概率问题的两种不同的思维方式，前者“由因推果”，分类讨论，用来解决已知“原因”事件求“结果”事件概率的问题，后者“执果寻因”，“分析每个原因对结果所做的贡献”，用以求解已知“结果”发生时，“某个原因”事件导致的概率. 一般情形下的贝叶斯公式，即:在公式④的条件下，若$P(B)>0$，则 $P(A_i\|B)=\frac{P(A_i)P(B\|A_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B\|A_k)}, i=1,2,\cdots n$⑤. 特别地，$P(A\|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B\|A)}{P(A)P(B\|A)+P(\bar{A})P(B\|\bar{A})}$.⑥ 为什么说贝叶斯公式是“执果寻因”，对于高中学生，不能仅从概念上和意义上讲解，要引导他们直观观察.我们观察公式⑤即可发现其“形式上”的特征，由“$A_i(i=1,2\cdots)$条件下事件B发生的概率(右式)，可求B条件下事件A发生的概率(左式)”，说明在一个样本空间里，“条件”是变化的，条件是相对的.如果从形式上理解和记忆，公式⑥的前半部分$P(A\|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$即为条件概率，而该条件概率分子、分母中的$P(AB)$、$P(B)$可用积事件和全概率公式求出，不过与公式左边的“$P(A\|B)$”相比，右边的“条件”改变了.

2、条件概率的 3 种求法

定义法	先求 $P(A)$和 $P(AB)$，再由 $P(B\|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$求 $P(B\|A)$
基本事件法	借助古典概型概率公式，先求事件 A 包含的基本事件数 $n(A)$，再求事件 AB 所包含的基本事件数 $n(AB)$，得 $P(B\|A)=\dfrac{n(AB)}{n(A)}$.
缩样法	缩小样本空间的方法，就是去掉第一次抽到的情况，只研究剩下的情况，用古典概型求解，它能化繁为简

3、条件概率的性质

条件概率只是缩小了样本空间，因此条件概率同样具有概率的性质.设 $P(A)>0$，则

(1)$P(\Omega|A)=1$，$0\le P(B|A)\le 1$；

(2)如果 B 和 C 是两个互斥事件，则 $P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)$.

(3)设 $\overline{B}$ 和 B 互为对立事件，则 $P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)$.

4、两个事件的全概率问题求解策略

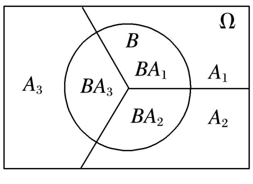
(1)拆分：将样本空间拆分成互斥的两部分如 A_1，A_2(或 A 与 $\overline{A}$).

(2)计算：利用乘法公式计算每一部分的概率.

(3)求和：所求事件的概率 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$.

5、“化整为零”求多事件的全概率问题

(1)如图，$P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$.



(2)已知事件 B 的发生有各种可能的情形 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$，事件 B 发生的可能性，就是各种可能情形 A_i 发生的可能性与已知在 A_i 发生的条件下事件 B 发生的可能性的乘积之和.

6、贝叶斯公式：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一组两两互斥的事件，$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，则对任意的事件 $B\subseteq\Omega$，$P(B)>0$，有 $P(A_i\mid B)=\dfrac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{P(B)}=\dfrac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(A_k)P(B\mid A_k)},i=1,2,\cdots,n$

注：(1)公式 $P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}$反映了 $P(A_1B)$，$P(A_1)$，$P(B)$，$P(A_1|B)$，$P(B|A_1)$之间的互化关系．

(2)$P(A_1)$称为先验概率，$P(A_1|B)$称为后验概率，其反映了事情 A_1 发生的可能在各种可能原因中的比重．

考点精析

考点一 条件概率的定义及计算

（一）利用定义求条件概率

1. （2023·全国·模拟预测）某乳业公司新推出了一款儿童酸奶，其包装有袋装、杯装、瓶装.现有甲、乙两名学生欲从这 3 种包装中随机选一种，且他们的选择情况相互独立互不影响.在甲学生选杯装酸奶的前提下，两人选的包装不同的概率为（　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

【答案】C

【分析】利用条件概率进行求解即可.

【详解】记事件 C 为“甲同学选杯装酸奶”，则 $P(C)=\frac{1}{3}$，记事件 D 为“两人选的包装不同”，则事件 CD 为“甲同学选杯装酸奶，乙同学选袋装酸奶或瓶装酸奶”，

所以 $P(CD)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$， 所以 $P(D|C)=\frac{P(CD)}{P(C)}=\frac{2}{3}$.

故选：C.

2. （2023·安徽合肥·校考一模）接种流感疫苗能有效降低流行感冒的感染率，某学校 $\frac{2}{5}$ 的学生接种了流感疫苗，已知在流感高发时期，未接种疫苗的感染率为 $\frac{1}{4}$，而接种了疫苗的感染率为 $\frac{1}{10}$.现有一名学生确诊了流感，则该名学生未接种疫苗的概率为___________

【答案】$\frac{15}{19}$

【分析】根据条件概率公式求解即可.

【详解】设事件 $A=$“感染流行感冒”，事件 $B=$“未接种疫苗”，

则 $P(A)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{19}{100}$， $P(AB)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{20}$，

故 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{15}{19}$.

故答案为：$\dfrac{15}{19}$.

3．(2023·海南海口·校考模拟预测）某地摊集中点在销售旺季的某天接纳顾客量超过 1 万人次的概率是 $\dfrac{9}{20}$，连续两天顾客量超过 1 万人次的概率是 $\dfrac{7}{20}$，在该地摊集中点在销售旺季的某天接纳顾客量超过 1 万人次的条件下，随后一天的接纳顾客量超过 1 万人次概率是（　）.

A．$\dfrac{7}{10}$　　B．$\dfrac{9}{10}$　　C．$\dfrac{4}{5}$　　D．$\dfrac{7}{9}$

【答案】D

【分析】利用条件概率的定义及其概率计算公式求解即可.

【详解】设“某天接纳顾客量超过 1 万人次”为事件 A，“随后一天的接纳顾客量超过 1 万人次” 为事件 B，

则 $P(A)=\dfrac{9}{20}$，$P(AB)=\dfrac{7}{20}$，

所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{7}{20}}{\frac{9}{20}}=\dfrac{7}{9}$，

故选：D.

4．(2023·江苏·统考一模）“绿水青山，就是金山银山”，随着我国的生态环境越来越好，外出旅游的人越来越多.现有两位游客慕名来江苏旅游，他们分别从“太湖鼋头渚、苏州拙政园、镇江金山寺、常州恐龙园、南京夫子庙、扬州瘦西湖”这 6 个景点中随机选择 1 个景点游玩.记事件 A 为“两位游客中至少有一人选择太湖鼋头渚”，事件 B 为“两位游客选择的景点不同”，则 $P(B|A)=$（　）

A．$\dfrac{7}{9}$　　B．$\dfrac{8}{9}$　　C．$\dfrac{9}{11}$　　D．$\dfrac{10}{11}$

【答案】D

【分析】根据古典概型概率公式求出 $P(A),P(AB)$，然后利用条件概率公式即得.

【详解】由题可得 $P(A)=\dfrac{6\times6-5\times5}{6\times6}=\dfrac{11}{36}$，$P(AB)=\dfrac{2\times5}{6\times6}=\dfrac{5}{18}$，

所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{5}{18}}{\frac{11}{36}}=\dfrac{10}{11}$.

故选：D.

5.（2023 秋·山东德州·高二统考期末）羽毛球单打实行“三局两胜”制（无平局）. 甲乙两人争夺比赛的冠军. 甲在每局比赛中获胜的概率均为 $\frac{3}{4}$，且每局比赛结果相互独立，则在甲获得冠军的条件下，比赛进行了三局的概率为（　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{4}{5}$

【答案】A

【分析】求出甲获胜的概率、甲获得冠军且比赛进行了三局的概率，利用条件概率公式求概率即可.

【详解】由甲获胜的概率为 $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{27}{32}$，

而甲获得冠军且比赛进行了三局，对应概率为 $\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{32}$，

所以在甲获得冠军的条件下，比赛进行了三局的概率为 $\frac{9}{32}\div\frac{27}{32}=\frac{1}{3}$.

故选：A

6.（2023·江西·高二校联考阶段练习）5 名同学从左向右站成一排，已知甲站在正中间，则乙不站在最右端的概率是________.

【答案】$\frac{3}{4}$/0.75

【分析】利用条件概率公式以及排列组合求解.

【详解】记“甲站在中间”为事件 A，“乙不站在最右端”为事件 B,

则 $n\left(A\right)=\mathrm{A}_4^4$，$n\left(AB\right)=\mathrm{C}_3^1\mathrm{A}_3^3$，

所以 $P(B\mid A)=\frac{\mathrm{C}_3^1\mathrm{A}_3^3}{\mathrm{A}_4^4}=\frac{3}{4}$.

故答案为: $\frac{3}{4}$.

7.（2023 春·江苏南通·高二江苏省如皋中学校考阶段练习）2021 年 11 月 27 日奥密克戎毒株输入我国香港，某医院委派甲、乙、丙、丁四名医生前往 A,B,C 三个小区做好防疫工作，每个小区至少委派一名医生，在甲派往 A 小区的条件下，乙派往 B 小区的概率为____.

【答案】$\frac{5}{12}$

【分析】根据分组分配利用排列组合计算个数，结合条件概率的计算公式即可求解.

【详解】记事件 M 为“甲派往 A 小区”，事件 N 为“乙派往 B 小区”，则

若 A 小区分配甲一个人，则有 $\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_2^1=6$，若 A 小区分配甲以及另一个人一起，则有 $\mathrm{C}_3^1\mathrm{A}_2^2=6$,故事件 M 包含

的基本事件个数为$C_3^1C_2^1+C_3^1A_2^1=12$，

在甲派往A小区的条件下，乙派往B小区的情况为：①只有甲派往A小区，只有乙派往B小区，另外两个人去C小区，则有1种情况，②从丙丁中选一个人连同甲一起派往A小区，只有乙派往B小区，剩下一个人去C小区，则有C_2^1种情况，③从丙丁中选一个人连同乙一起派往B小区，只有甲派往A小区，剩下一个人去C小区，则有C_2^1种情况，

$$P\left(N|M\right)=\frac{1+C_2^1+C_2^1}{12}=\frac{5}{12},$$

故答案为：$\frac{5}{12}$

（二）缩小样本空间求条件概率

8．（2023春·山西太原·高二太原五中校考阶段练习）有7件产品，其中4件正品，3件次品，现不放回从中取2件产品，每次一件，则在第一次取得次品的条件下，第二次取得正品的概率为（　）

A．$\frac{4}{7}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{6}$

【答案】B

【分析】利用条件概率公式，结合古典概型计算即可.

【详解】法一：

设第一次取得次品为事件A，第二次取得正品为事件B,

则$P\left(AB\right)=\frac{C_3^1C_4^1}{C_7^1C_6^1}=\frac{2}{7}, P\left(A\right)=\frac{C_3^1}{C_7^1}=\frac{3}{7}$,

所以$P\left(B|A\right)=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)}=\frac{2}{7}\times\frac{7}{3}=\frac{2}{3}$.

法二：

在第一次拿出一件次品后还有6件，其中4件正品，2件次品，

故第二次拿出正品的概率为$P=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

故选：B.

9．（2023春·贵州遵义·高二遵义清华中学校考阶段练习）一袋中装有6个黑球，4个白球．如果不放回地依次取出2个球．求：

(1)第1次取到黑球的概率；

(2)在第1次取到黑球的条件下，第2次又取到黑球的概率.

【答案】(1)$\frac{3}{5}$

(2)$\frac{5}{9}$

【分析】只考虑第 1 次，即可得出第 1 次取到黑球的概率；采用缩小样本空间的方法，即可得出第二问的答案.

【详解】(1) 由已知共有 10 个球，黑球 6 个.

根据古典概型的概率公式可得，第 1 次取到黑球的概率为$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

(2) 缩小样本空间法．第 1 次取到黑球后，袋中剩余 5 个黑球，4 个白球.

根据古典概型的概率公式可得，在第 1 次取到黑球的条件下，第 2 次又取到黑球的概率为$\frac{5}{9}$.

10．(2023 春·湖南·高二临澧县第一中学校联考期中）从编号为 1~5 号的球中随机抽取一个球，记编号为 i，再从剩下的球中取出一个球，记编号为 j，在 $i<j$ 的条件下，$j<i+2$ 的概率为________.

【答案】$\frac{2}{5}$/0.4

【分析】根据事件 A 以及 AB 包含的基本事件个数，即可利用条件概率的定义求解.

【详解】设事件 A：$i<j$，事件 B：$j<i+2$，则事件 AB：$i<j<i+2$，则事件 A 包含的基本事件有

$\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}$,故 $n(A)=10$，事件 AB 包含的基本事件有

$\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$，则 $n(AB)=4$，从而 $P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$,

故答案为：$\frac{2}{5}$

11．(2023 春·福建泉州·高二校考阶段练习）高二甲、乙两位同学计划端午假期从“韩阳十景”中挑 4 个旅游景点：廉村孤树、龟湖夕照、南野桑、马屿香泉随机选择其中一个景点游玩，记事件 A:甲和乙至少一人选择廉村孤树，事件 B:甲和乙选择的景点不同，则条件概率 $P(B|A)=$__________.

【答案】$\frac{6}{7}$

【分析】计算出事件 A 、AB 所包含的基本事件数，利用条件概率公式可求得所求事件的概率.

【详解】对于事件 A，甲和乙至少一人选择廉村孤树，则其反面为“甲、乙两人均不选择廉村孤树”，

所以，$n(A)=4^2-3^2=7$,

对于事件 AB，甲和乙中只有一人选择廉村孤树，另一个人选择其它村，

所以，$n(AB)=2\times3=6$，

因此，所求概率为 $P(B|A)=\dfrac{n(AB)}{n(A)}=\dfrac{6}{7}$.

故答案为：$\dfrac{6}{7}$.

考点二 包含事件的条件概率问题

12．（2023·全国·校联考模拟预测）设集合 $A\subseteq B$，且 $P(A)=0.2$，$P(B)=0.7$，则下列说法正确的是（　）

A．$P(B|A)=\dfrac{2}{7}$　　B．$P(A|B)=\dfrac{2}{3}$

C．$P(B|\bar{A})=\dfrac{5}{8}$　　D．$P(\bar{A}B)=\dfrac{7}{10}$

【答案】C

【分析】根据题意，由条件概率的计算公式，代入计算，即可得到结果.

【详解】因为 $A\subseteq B$，所以 $P(AB)=P(A)=0.2$，所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=1$，

$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{2}{7}$, $P(\bar{A}B)=0.7-0.2=0.5$. 因为 $P(\bar{A})=1-P(A)=0.8$，

所以 $P(B|\bar{A})=\dfrac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=\dfrac{5}{8}$.

故选:C

13．【多选】（2023 春·福建泉州·高二校考阶段练习）已知随机事件 A，B 发生的概率分别为 $P(A)=0.3,P(B)=0.6$，下列说法正确的有（　）

A．若 $P(AB)=0.18$，则 A，B 相互独立　　B．若 A，B 相互独立，则 $P(B|A)=0.6$

C．若 $P(B|A)=0.4$，则 $P(AB)=0.12$　　D．若 $A\subseteq B$，则 $P(A|B)=0.3$

【答案】ABC

【分析】利用条件概率公式及独立事件的定义逐项分析即得.

【详解】因为随机事件 A，B 发生的概率分别为 $P(A)=0.3,P(B)=0.6$，

对于 A，因为 $P(AB)=0.18=P(A)P(B)=0.3\times0.6$，所以 A，B 相互独立，故 A 正确；

对于 B，若 A，B 相互独立，则 $P(B|A)=P(B)=0.6$，故 B 正确；

对于C，若$P\left(B|A\right)=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)}=\frac{P\left(AB\right)}{0.3}=0.4$，则$P(AB)=0.12$，故C正确；

对于D，若$A\subseteq B$，则$P\left(A|B\right)=\frac{P\left(A\right)}{P\left(B\right)}=\frac{0.3}{0.6}=0.5$，故D错误.

故选：ABC

考点三 相互独立事件的条件概率问题

14.【多选】(2023春·山东烟台·高二统考阶段练习）已知事件A,B满足$P\left(A\right)=0.5,P\left(B\right)=0.2$，则（　）

A. 若$B\subseteq A$，则$P\left(AB\right)=0.5$

B. 若A与B互斥，则$P\left(A+B\right)=0.7$

C. 若$P\left(B|\ A\right)=0.2$，则A与B相互独立

D. 若A与B相互独立，则$P\left(A\overline{B}\right)=0.9$

【答案】BC

【分析】根据事件的关系以及运算，互斥事件的概率加法公式，独立事件的概率公式，条件概率的概率公式等即可求出.

【详解】对A，因为$B\subseteq A$，所以$P\left(AB\right)=P\left(B\right)=0.2$，错误；

对B，因为A与B互斥，所以$P\left(A+B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)=0.7$，正确；

对C，因为$P\left(B|\ A\right)=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)}=0.2$，所以$P\left(AB\right)=0.1$，而$P\left(A\right)=0.5,P\left(B\right)=0.2$，

所以$P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)=0.1$，正确；

对D，因为A与B相互独立，所以A与$\overline{B}$相互独立，所以，

$P\left(A\overline{B}\right)=P\left(A\right)P\left(\overline{B}\right)=P\left(A\right)\times\left[1-P\left(B\right)\right]=0.5\times0.8=0.4$，错误.

故选：BC.

15. (2023·全国·高三专题练习）某公司招聘实习生时要求面试者需分别参加三个部门的独立考核，且至少要通过两个部门的考核．某人在甲、乙、丙三个部门通过的概率分别为$\frac{4}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{1}{2}$.

(1)求此人通过应聘的概率；

(2)求此人在通过甲部门考核的前提下，又通过乙部门考核的概率

【答案】(1)$\frac{7}{10}$

(2)$\frac{3}{5}$

【分析】（1）分通过三个部门的考核和通过其中两个部门的考核来计算概率;

（2）设“此人通过甲部门考核”为事件 A，“此人通过乙部门考核”为事件 B，通过事件 A 与事件 B 是相互独立来计算 $P(B\mid A)$.

【详解】（1）此人能够通过应聘包括：通过甲、乙、丙三个部门的考核,仅通过乙、丙两个部门的考核，仅通过甲、丙两个部门的考核，仅通过甲、乙两个部门的考核共四种情况，所以此人通过应聘的概率为

$P=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+(1-\frac{4}{5})\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\times(1-\frac{3}{5})\times\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times(1-\frac{1}{2})=\frac{7}{10}$;

（2）设“此人通过甲部门考核”为事件 A，“此人通过乙部门考核”为事件 B，因为三个部门的考核相互独立，所以事件 A 与事件 B 是相互独立事件,

故 $P(B\mid A)=P(B)=\frac{3}{5}$.

16.（2023·山东潍坊·统考模拟预测）甲袋中装有 4 个白球，2 个红球和 2 个黑球，乙袋中装有 3 个白球，3 个红球和 2 个黑球.先从甲袋中随机取出一球放入乙袋，再从乙袋中随机取出一球.用 A_1,A_2,A_3 分别表示甲袋取出的球是白球、红球和黑球，用 B 表示乙袋取出的球是白球，则（ ）

A. A_1,A_2,A_3 两两不互斥　　B. $P\left(B\middle|A_2\right)=\frac{1}{3}$

C. A_3 与 B 是相互独立事件　　D. $P(B)=\frac{1}{3}$

【答案】B

【分析】对于 A，由互斥事件的定义判断，对于 B，由条件概率的公式求解即可，对于 C，由独立事件的定义判断，对于 D，由 $P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)$求解

【详解】对于 A，由题意可知 A_1，A_2，A_3不可能同时发生,

所以 A_1，A_2，A_3两两互斥，所以 A 不正确;

对于 B，由题意可得 $P(A_2)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4},P(A_2B)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{9}=\frac{1}{12}$,

所以 $P\left(B\middle|A_2\right)=\frac{P(A_2B)}{P(A_2)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$，所以 B 正确;

对于 C, 因为 $P(A_3)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, $P(A_3B)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{9}=\frac{1}{12}$, $P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)=\frac{4}{8}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{9}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{9}=\frac{7}{18}$,

所以 $P(A_3B)\neq P(A_3)P(B)$，所以 A_3 与 B 不是相互独立事件，所以 C 错误；

对于 D，由 C 选项可知 D 是错误的.

故选：B.

17. （2023·云南昆明·昆明市第三中学校考模拟预测）一袋中有大小相同的3个白球和4个红球，现从中任意取出3个球，记事件 A:“3个球中至少有一个白球”，事件 B:“3个球中至少有一个红球”，事件 C:“3个球中有红球也有白球”，下列结论不正确的是（　）

A．事件A与事件 B 不为互斥事件　　B．事件A与事件 C 不是相互独立事件

C．$P\left(C|A\right)=\dfrac{30}{31}$　　D．$P\left(AC\right)>P\left(AB\right)$

【答案】D

【分析】根据题意，取出的3个球的可能情况为：3个红球；1个红球2个白球；2个红球1个白球；3个白球，进而依次分析事件A、事件 B、事件 C，及其概率，再讨论各选项即可得答案.

【详解】根据题意，取出的3个球的可能情况为：3个红球；1个红球2个白球；2个红球1个白球；3个白球.

故事件A包含：1个红球2个白球；2个红球1个白球；3个白球，且 $P\left(A\right)=1-\dfrac{C_4^3}{C_7^3}=\dfrac{31}{35}$；

事件 B 包含：1个红球2个白球；2个红球1个白球；3个红球，且 $P\left(B\right)=1-\dfrac{C_3^3}{C_7^3}=\dfrac{34}{35}$；

事件 C 包含：1个红球2个白球；2个红球1个白球，且 $P\left(C\right)=\dfrac{C_3^2C_4^1+C_3^1C_4^2}{C_7^3}=\dfrac{30}{35}=\dfrac{6}{7}$.

所以，$P\left(AB\right)=\dfrac{C_3^2C_4^1+C_3^1C_4^2}{C_7^3}=\dfrac{6}{7}$，$P\left(AC\right)=\dfrac{C_3^2C_4^1+C_3^1C_4^2}{C_7^3}=\dfrac{6}{7}$，

因为 $A\cap B\neq\varnothing$，则事件A与事件 B 不为互斥事件，A 选项错误；

$P\left(AC\right)=\dfrac{C_3^2C_4^1+C_3^1C_4^2}{C_7^3}=\dfrac{6}{7}\neq P\left(A\right)P\left(C\right)$，故事件A与事件 C 不是相互独立事件，B 正确；

$P\left(AB\right)=\dfrac{C_3^2C_4^1+C_3^1C_4^2}{C_7^3}=\dfrac{6}{7}=P\left(AC\right)$，故 D 错误；

$P\left(C|A\right)=\dfrac{P\left(AC\right)}{P\left(A\right)}=\dfrac{\frac{6}{7}}{\frac{31}{35}}=\dfrac{30}{31}$，故 C 正确；

故选：D.

考点四　概率的乘法公式

18. （2023春·吉林长春·高二长春十一高校考阶段练习）已知 $P(A|B)=\dfrac{3}{7}$，$P(B)=\dfrac{7}{9}$，则 $P(AB)=$（　）

A．$\dfrac{3}{7}$　　B．$\dfrac{4}{7}$　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．$\dfrac{27}{49}$

【答案】C

【分析】根据给定条件，利用条件概率公式计算作答.

【详解】因为$P(A|B)=\frac{3}{7}$，$P(B)=\frac{7}{9}$，所以$P(AB)=P(A|B)P(B)=\frac{3}{7}\times\frac{7}{9}=\frac{1}{3}$.

故选：C

19.【多选】(2023春·江苏南通·高二江苏省如皋中学校考阶段练习）已知事件A,B,C满足$P(A)=0.6$，$P(B)=0.2$，则下列结论正确的是（　　）

A．如果$P(A\cup B\cup C)=1$，那么$P(C)=0.2$

B．如果$B\subseteq A$，那么$P(A\cup B)=0.6$，$P(B|A)=0.25$

C．如果A与B互斥，那么$P(A\cup B)=0.8$

D．如果A与B相互独立，那么$P(\overline{A}\cdot\overline{B})=0.32$

【答案】CD

【分析】古典概型、条件概率、互斥事件的概率，相互独立事件的概率公式的运用。

【详解】对于选项A，设一个盒子里有标号为 1 到 10 的小球，从中摸出一个小球，记下球的编号，记事件A="球的编号是偶数"，事件B="球的编号是1，2，3"，事件C="球的编号是奇数" 满足$P(A\cup B\cup C)=1$，但是 $P(C)=0.5$，选项A错误;

对于选项B，如果 $B\subseteq A$，那么 $P(A\cup B)=P(A)=0.6, P(B|\ A)=\frac{\mathrm{P(AB)}}{\mathrm{P(A)}}=\frac{0.2}{0.5}=0.4$,选项B错误;

对于选项C， 如果A与B互斥，那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.8$，所以选项C正确;

对于选项D，如果A与B相互独立，那么

$P(\overline{A}\cdot\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-P(A))(1-P(B))=0.4\times0.8=0.32$所以选项D正确。

故选：CD

20.（2023春·山东潍坊·高二山东省昌乐第一中学校考阶段练习）已知随机事件A，B有概率$P(A)=0.7$，$P(\overline{B})=0.6$，条件概率$P(\overline{B}|A)=0.6$，则$P(A\cap B)=$_____.

【答案】$0.28/\frac{7}{25}$

【分析】根据条件概率的公式，结合交事件的概率公式、对立事件的概率公式进行求解即可.

【详解】$P(B|A)=1-P(\overline{B}|A)=1-0.6=0.4$，

于是有 $P\left(B|A\right)=\dfrac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)}=0.4 \Rightarrow P\left(AB\right)=0.4\times0.7=0.28$,

即 $P\left(A\cap B\right)=0.28$,

故答案为：0.28

考点五 条件概率的性质及应用

21.（2023春·陕西西安·高二校联考阶段练习）下列说法正确的是（　）

A. $P\left(B|A\right)<P\left(AB\right)$

B. $P\left(B|A\right)=\dfrac{P\left(B\right)}{P\left(A\right)}$ 是可能的

C. $0<P\left(B|A\right)<1$

D. $P\left(A|A\right)=0$

【答案】B

【分析】利用条件概率公式及概率的性质判断各项的正误.

【详解】由 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，当 $0<P(A)<1$，则 $P(B|A)\rangle P(AB)$，A 错误；

当 A 或 B 为不可能事件时，$P(B|A)=0$，C 错误；

B：要使 $P\left(B|A\right)=\dfrac{P\left(B\right)}{P\left(A\right)}$，即 $P(AB)=P(B)$，当 B 恰好为 A 的子事件成立，正确；

D：由 $P(A|A)=\dfrac{P(A)}{P(A)}=1$，故错误.

故选：B

22.（2023·辽宁丹东·统考一模）已知 $P\left(A\right)=0.6$，$P\left(B|A\right)=0.5$，$P\left(B|\overline{A}\right)=0.2$，那么 $P\left(B\right)=$____________.

【答案】0.38/$\dfrac{19}{50}$

【分析】根据条件概率公式即可求解.

【详解】因为 $P\left(A\right)=0.6$，所以 $P\left(\overline{A}\right)=0.4$,

因为 $P\left(B|A\right)=\dfrac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)}=0.5$，所以 $P\left(AB\right)=0.5P\left(A\right)=0.3$,

因为 $P\left(B|\overline{A}\right)=\dfrac{P\left(\overline{A}B\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=0.2$，所以 $P\left(\overline{A}B\right)=0.2P\left(\overline{A}\right)=0.08$,

所以 $P\left(B\right)=P\left(AB\right)+P\left(\overline{A}B\right)=0.38$.

故答案为：0.38.

23．（2023·浙江·校联考模拟预测）已知随机事件 A，B，$P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{4}$，$P(A|B)=\frac{3}{4}$，则 $P(\overline{B}|A)=$________．

【答案】$\frac{7}{16}$

【分析】首先求出 $P(A B)=\frac{3}{4}$，则 $P(AB)=\frac{3}{16}$，则 $P(B|A)=\frac{9}{16}$，最后利用对立事件的求法即可得到答案.

【详解】依题意得 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{3}{4}$，所以 $P(AB)=\frac{3}{4}P(B)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$

故 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{3}}=\frac{9}{16}$，所以 $P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)=\frac{7}{16}$.

故答案为：$\frac{7}{16}$.

24．（2023·上海·高三专题练习）已知 $P(A)=P(B)=P(A|B)=\frac{1}{3}$，则 $P(\overline{A}|\overline{B})=$__________．

【答案】$\frac{2}{3}$

【分析】根据条件概率得到事件 A 与事件 B 相互独立，进而得到其对立事件也相互独立，从而利用对立事件概率公式求解.

【详解】因为 $P(A)=P(A|B)$，

所以事件 A 与事件 B 相互独立，

则事件 $\overline{A}$ 与事件 $\overline{B}$ 也相互独立，

则 $P(\overline{A}|\overline{B})=P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

故答案为：$\frac{2}{3}$.

25．（2023·全国·模拟预测）研究人员开展甲、乙两种药物的临床抗药性研究实验，事件A为“对药物甲产生抗药性”，事件 B 为“对药物乙产生抗药性”，事件 C 为“对甲、乙两种药物均不产生抗药性”．若 $P(A)=\frac{4}{15}$，$P(B)=\frac{2}{15}$，$P(C)=\frac{7}{10}$，则 $P(B|A)=$______．

【答案】$\frac{3}{8}$/0.375

【分析】求出 $P(A\cup B)$，结合 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 求出 $P(AB)$，进而利用求条件概率公式求出答案.

【详解】由题意可知 $P(C)=P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{7}{10}$，则 $P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$.

又 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，

所以 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{4}{15}+\frac{2}{15}-\frac{3}{10}=\frac{1}{10}$，

则 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{15}}=\frac{3}{8}$.

故答案为：$\frac{3}{8}$

26. （2023 春·山西太原·高二山西实验中学校考阶段练习）已知事件 A 和 B 是互斥事件，$P(C)=\frac{1}{6}$，$P(B\cap C)=\frac{1}{18}$，$P((A\cup B)|C)=\frac{8}{9}$，则 $P(A|C)=$______.

【答案】$\frac{5}{9}$

【分析】根据条件概率的定义以及运算性质，可得答案.

【详解】解：由题意知，$P((A\cup B)|C)=P(A|C)+P(B|C)=\frac{8}{9}$，$P(B|C)=\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{3}$，

则 $P(A|C)=P((A\cup B)|C)-P(B|C)=\frac{8}{9}-\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$.

故答案为：$\frac{5}{9}$.

27. （2023 春·山西太原·高二太原师范学院附属中学校考阶段练习）条件概率只是缩小了样本空间，因此条件概率同样具有概率的性质.故试着证明条件概率的性质（1）和（2）. 设 $P(A)>0$，则

(1) $P(\Omega|A)=1$；

(2)如果 B 和 C 是两个互斥事件，则 $P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)$；

【答案】(1)证明见解析

(2)证明见解析

【分析】（1）因为 $P(\Omega A)=P(A)$，由条件概率公式代入即可证明；

（2）因为 B 和 C 是两个互斥事件，所以 AB 和 AC 是两个互斥事件，再由条件概率公式代入即可证明；

【详解】（1）因为 $P(\Omega A)=P(A)$，所以 $P(\Omega|A)=\frac{P(\Omega A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$.

（2）因为 B 和 C 是两个互斥事件，所以 AB 和 AC 是两个互斥事件，

所以 $P(B\cup C|A)=\dfrac{P((B\cup C)A)}{P(A)}=\dfrac{P(AB)+P(AC)}{P(A)}=\dfrac{P(AB)}{P(A)}+\dfrac{P(AC)}{P(A)}$

$=P(B|A)+P(C|A)$.

考点六 全概率公式的计算

28．（2023秋·山东德州·高二统考期末）已知 $P(B)=0.3$，$P(B|A)=0.9$，$P(B|\bar{A})=0.2$，则 $P(\bar{A})=$（ ）

A．$\dfrac{6}{7}$ B．$\dfrac{1}{7}$ C．$\dfrac{1}{3}$ D．$\dfrac{1}{10}$

【答案】A

【分析】根据已知利用全概率公式得 $P(B)=P(A)\cdot P(B|A)+P(\bar{A})\cdot P(B|\bar{A})$，即可求解 $P(\bar{A})$.

【详解】由全概率公式可得：$P(B)=P(A)\cdot P(B|A)+P(\bar{A})\cdot P(B|\bar{A})$

可得 $0.3=P(A)\times 0.9+(1-P(A))\times 0.2$，解得：$P(A)=\dfrac{1}{7}$.

则 $P(\bar{A})=\dfrac{6}{7}$.

故选：A.

29.【多选】(2023春·河北邯郸·高二校考阶段练习) 已知事件 A，B，且 $P(A)=\dfrac{1}{3}$，$P(B|A)=\dfrac{1}{5}$，$P(\bar{B}|\bar{A})=\dfrac{3}{5}$，则（ ）

A．$P(AB)=\dfrac{1}{15}$ B．$P(\bar{B}|A)=\dfrac{2}{5}$

C．$P(B)=\dfrac{1}{3}$ D．$P(B)=\dfrac{3}{5}$

【答案】AC

【分析】利用概率的乘法公式求解即可判断A；利用条件概率的性质求解即可判断B；先求得 $P(\bar{A})$，$P(B|\bar{A})$，再根据全概率公式求解即可C，D.

【详解】对于A，由 $P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{15}$，故A正确；

对于B，由 $P(\bar{B}|A)=1-P(B|A)=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$，故B错误；

对于C，D，由 $P(\bar{A})=1-P(A)=\dfrac{2}{3}$，$P(B|\bar{A})=1-P(\bar{B}|\bar{A})=\dfrac{2}{5}$，

则 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{3}$，故C正确；D错误.