第九讲 特殊平行四边形

知识 梳 理

矩形的概念：有一个角是直角的平行四边形是矩形。

矩形的性质：

1.平行四边形的性质矩形都具有。

2.角：矩形的四个角都是直角。

3.边：邻边垂直。

4.对角线：矩形的对角线相等。

5.矩形是轴对称图形，又是中心对称图形。它有 2 条对称轴，分别是每组对边中点连线所在的直线；对称中心是两条对角线的交点。

由矩形的性质，可以得到直角三角形的一个重要性质，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半。

矩形的判定：

1.有 1 个角是直角的平行四边形是矩形。

2.有 3 个角是直角的四边形是矩形。

3.对角线相等的平行四边形是矩形(或“对角线互相平分且相等的四边形是矩形”)。

证明 1 个四边形是矩形，若题设条件与这个四边形的对角线有关，通常证明这个四边形的对角线相等。题设中出现多个直角或垂直时，常采用“3 个角是直角的四边形是矩形”来判定矩形。

菱形的概念：有一组邻边相等的平行四边形叫作菱形。

菱形的性质：

1.菱形具有平行四边形的一切性质。

2.菱形的四条边都相等。

3.菱形的两条对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角。

4.菱形是轴对称图形，它有 2 条对称轴，分别是两条对角线所在直线。

菱形的面积计算：

1.利用平行四边形的面积公式。

2.菱形面积 $=\frac{1}{2}ab$(a、b.是两条对角线的长度)。

菱形的判定：

1.一组邻边相等的平行四边形是菱形(平行四边形+一组邻边相等=菱形)。

2.四条边都相等的四边形是菱形。

几何语言:∵AB=BC=CD=DA, ∴四边形 ABCD 是菱形。

3.对角线互相垂直的平行四边形是菱形(或“对角线互相垂直平分的四边形是菱形”)。

几何语言:∵AC⊥BD,四边形 ABCD 是平行四边形, ∴平行四边形 ABCD 是菱形。

正方形的定义：有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫作正方形。

正方形的性质：

1.正方形的四条边都相等，四个角都是直角。

2.正方形的两条对角线相等，互相垂直平分，并且每条对角线平分一组对角。

3.正方形具有四边形、平行四边形、矩形、菱形的一切性质。

4.两条对角线将正方形分成四个全等的等腰直角三角形，同时，正方形又是轴对称图形，有四条对称轴。

正方形的判定方法：

1.先判定四边形是矩形，再判定这个矩形有一组邻边相等。

2.先判定四边形是菱形，再判定这个菱形有一个角为直角。

3.还可以先判定四边形是平行四边形，再用 1 或 2 进行判定。

【例 1】如图 1,在 Rt△ABC 中,∠A=90°,P 为边 BC 上一动点,PE⊥AB 于 E,PF⊥AC 于 F,动点 P 从点 B 出发，沿着 BC 匀速向终点 C 运动，则线段 EF 的值大小变化情况是 ( )。

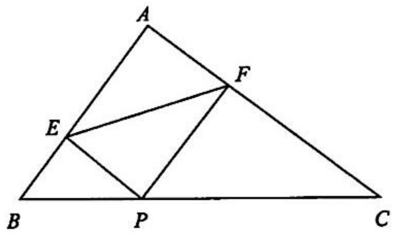


图 1

A.一直增大　　B.一直减小　　C.先减小后增大　　D.先增大后减少

【变式训练 1】如图 2,在 Rt△ABC 中,∠BAC=90°,且 BA=3,AC=4,点 D 是斜边 BC 上的一个动点,过点 D 分别作 DM⊥AB 于点 M,DN⊥AC 于点 N,连接 MN,则线段 MN 的最小值为______。

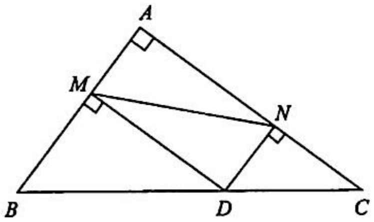


图 2

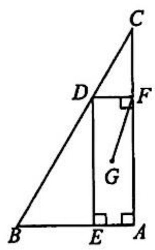


图 3

【变式训练 2】如图 3,在 Rt△ABC 中,∠BAC=90°,且 BA=9,AC=12,点 D 是斜边 BC

上的一个动点,过点 D 分别作 DE⊥AB 于点 E,DF⊥AC 于点 F,点 G 为四边形 DEAF 对角线交点,则线段 GF 的最小值为　　　(　　)。

A. $\frac{9}{4}$　　　B. $\frac{18}{5}$　　　C. $\frac{9}{2}$　　　D. $\frac{13}{2}$

【例 2】如图 4,在矩形 ABCD 中,AB=3,AD=4,P 是 AD 上不与 A 和 D 重合的一个动点,过点 P 分别作 AC 和 BD 的垂线,垂足为 E、F,求 PE+PF 的值。

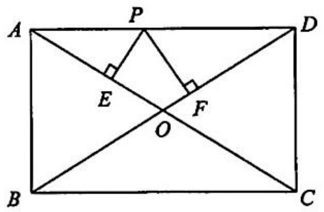
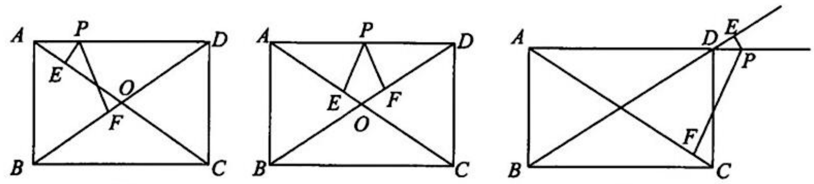


图 4

【变式训练 3】如图 5：

(1)在矩形 ABCD 中, $AB=3,AD=4$,P 是线段 AD 上的动点， $PE\perp AC$于点 E， $PF\perp BD$于点 F，如图①，图②，选择其中一个图形，探究 PE、PF 之间存在什么数量关系，并证明你的结论。

(2)若将“P 是线段 AD 上的动点”改成“P 是线段 AD 延长线上一动点”，如图③所示，请继续探究 PE、PF 之间存在什么数量关系? 并证明你的结论。



①　②　③

图 5

【例 3】如图 6,已知矩形 ABCD,AB=4,AD=6,点 E 为 AB 边的中点,点 F 为 BC 边上的动点,点 B 和点 B'关于 EF 对称,则 $B'D$的最小值是________。

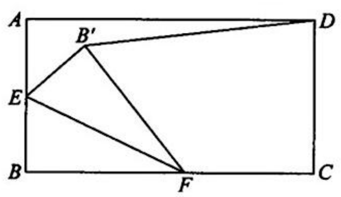


图 6

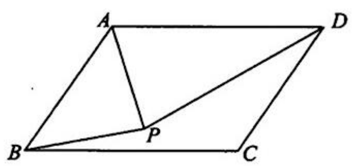


图 7

【变式训练 4】如图 7,在菱形 ABCD 中, $AB=2,\angle C=120°$,点 P 是平面内一点，且 $\angle APB=90°$,则 DP 的最小值为________。

【例 4】如图 8,在边长为 4 的菱形 ABCD 中,BD=4,E、F 分别是 AD、CD 上的动点(包含端点),且 AE+ $CF=4$,连接 BE、EF、FB。

(1)试探究 BE 与 BF 的数量关系，并证明你的结论；

(2)求 EF 的最大值与最小值。

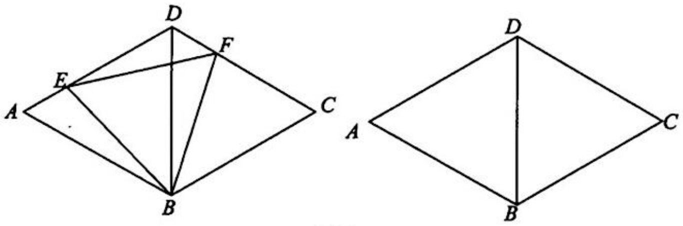


图 8

【变式训练 5】如图 9，在边长为 4 的菱形 ABCD 中， $BD=4$,,E、F 分别是边 AD、CD 上的动点,且, $AE+CF=4$,连接 BE、EF、FB。

(1)证明: $BE=BF$;

(2)求 $\triangle BEF$面积的最小值。

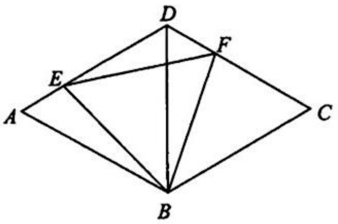


图 9

【变式训练 6】如图 10,菱形 ABCD 中, $AB=4,\angle ABC=60°,\angle EAF$的两边分别与射线 CB、DC 相交于点 E、F,且 $\angle EAF=60°$。

(1)如图①,当点 E 是 CB 上任意一点时(点 E 不与 B、C 重合),求证: $BE=CF$;

(2)如图②,当点 E 在 CB 的延长线上时,且. $\angle EAB=15°$,求点 F 到 BC 的距离。

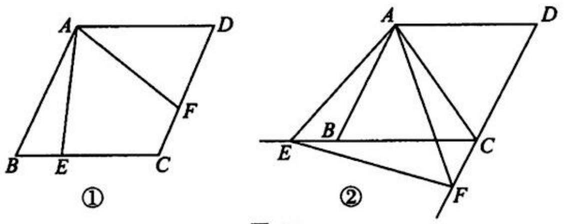


图 10

【例 5】如图 11,四边形 OABC 是菱形,点 C 在 x 轴上,AB 交 y 轴于点 H,AC 交 y 轴于点 M。点 P 从点 A 出发，以 2 单位长/秒的速度沿折线. $A-B-C$运动 ,到达点 C 终止。已知点 $A(-3|4)$,,设点 P 的运动时间为 t(秒)， $\triangle PMB$的面积为 S(平方单位)。

(1)求点 C 和点 B 的坐标;

(2)求点 M 的坐标;

(3)求 S 与 t 的函数关系式；

(4)求 S 的最大值。

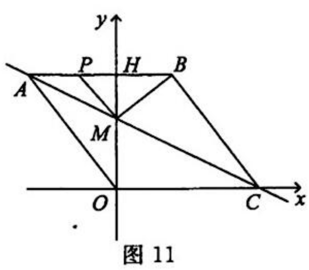


图 11

【变式训练 7】如图 12，在直角坐标系 xOy 中， $Rt\triangle OAB$和 $Rt\triangle OCD$的直角顶点 A，C 始终在 x 轴的正半轴上，B，D 在第一象限内，点 B 在直线 OD 上方，($OC=CD,OD=2$,,M 为 OD 的中点,AB 与 OD 相交于 E，当点 B 位置变化时， $Rt\triangle OAB$AB 的面积恒为 $\frac{1}{2}$。

试解决下列问题：

(1)点 D 坐标为( );

(2)设点 B 横坐标为 t，请把 BD 长表示成关于 t 的函数关系式，并化简；

(3)等式 $BO=BD$能否成立? 为什么?

(4)设 CM 与 AB 相交于 F,当 $\triangle BDE$为直角三角形时，判断四边形 BDCF 的形状，并证明你的结论。

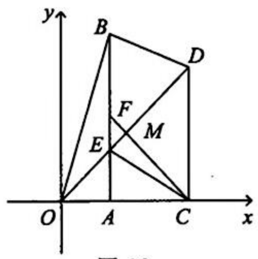


图 12

【变式训练 8】如图 13,在菱形 ABCD 中, $AB=10,\angle ABC=60°$。点 Q 从点 D 出发沿折线 DC→CA→AB 以每秒 3 个单位长的速度匀速运动；点 P 从点 B 沿 BC 以每秒 1 个单位长的速度匀速运动，射线 PK 随点 P 移动，保持与 BC 垂直，且交折线 AB-AC 于点 E，交直线 AD 于点 F，当点 Q 运动到点 B 时，停止运动，点 P 也随之停止。P、Q 两点同时出发，设 Q 运动的时间为 t(s)。

(1)当 t 为何值时， $BP=AF$?

(2)当 t 为何值时， $QE\perp AB$?

(3)设直线 PK 扫过菱形 ABCD 的面积为 S，试求 S 和 t 之间的函数关系式；

(4)当 Q 在线段 CD 上运动时，请直接写出 $\triangle PQF$为等腰三角形时 t 的值。

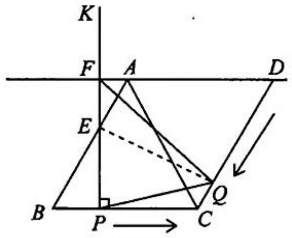


图 13

【例 6】菱形 ABCD 的周长为 8cm, $\angle ABC+\angle ADC=90°$,，以 AB 为腰，在菱形外作底角是 45°的等腰 $\triangle ABE$,连接 AC、CE。请画出图形，并直接写出. $\triangle ACE$的面积。

【变式训练 9】如图 14,在菱形 ABCD 中, $AB=\sqrt{3},\angle B=120°$,点 E 是 AD 边上的一个动点(不与 A、D 重合), $EF\|AB$交 BC 于点 F,点 G 在 CD 上,DG=DE。若△EFG 是等腰三角形,则 DE 的长为________。

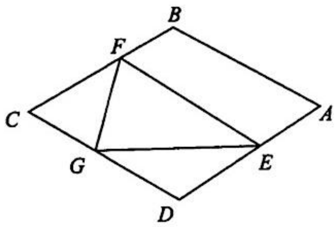


图 14

【变式训练 10】如图 15，已知点 A 从点(1，0)出发，以 1 个单位长度/秒的速度沿 x 轴向正方向运动，以 O、A 为顶点作菱形 OABC，使点 B、C 在第一象限内，且 $\angle AOC=60°$,点 P 的坐标为(0,3),设点 A 运动了 t 秒,求:

(1)点 C 的坐标(用含 t 的代数式表示)；

(2)点 A 在运动过程中，当 t 为何值时，使得△OCP 为等腰三角形?

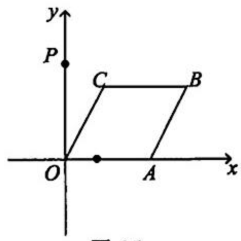


图 15

【例 7】(1)如图 16 中图①,在正方形 ABCD 中,E、F 分别是 BC、CD 上的点,且 $\angle EAF=45°$,,试判断 BE、DF 与 EF 三条线段之间的数量关系，直接写出判断结果：________。

(2)如图②:在四边形 ABCD 中, $AB=AD,\angle BAD=120°,\angle B=\angle ADC=90°$。点 E、F 分别是 BC、CD 上的点，且 $\angle EAF=60°$,探究图中线段 BE、EF、FD 之间的数量关系。

小王同学探究此问题的方法是，延长 FD 到点 C，使. $DG=BE$,连接 AG，先证明 $\triangle ABE\cong\triangle ADG$,再证明 $\triangle AEF\cong\triangle AGF$,，可得出结论，他的结论应是________。

请你帮小王同学写出完整的证明过程。

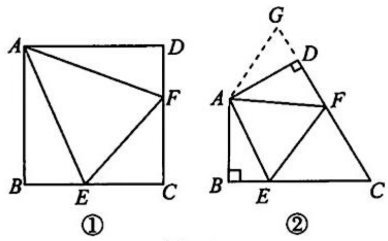


图 16

【变式训练 11】如图 17,在正方形 ABCD 中, $\angle EAF$的两边分别交 CB、DC 延长线于 E、F 点且 $\angle EAF=45°$,如果 BE=1,DF=7,则 EF=________。

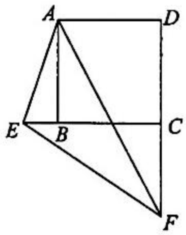


图 17

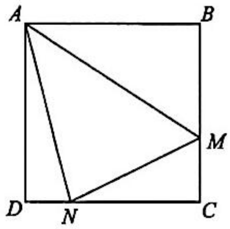


图 18

【变式训练 12】如图 18,在正方形 ABCD 中,点 M、N 为边 BC 和 CD 上的动点(不含端点),∠MAN=45°，下列四个结论：①当 $MN=\sqrt{2}MC$时,则∠BAM=22.5°;②2∠AMN-∠MNC=90°;③△MNC 的周长不变;④∠AMN--∠AMB=60°。其中正确结论的序号是________。

【例 8】如图 19,在正方形 ABCD 中,AB=3,点 E、F 分别在 CD、AD 上,CE=DF,BE、CF 相交于点 G,连接 DG。点 E 从点 C 运动到点 D 的过程中，DG 的最小值为________。

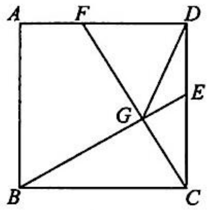


图 19

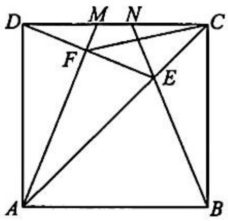


图 20

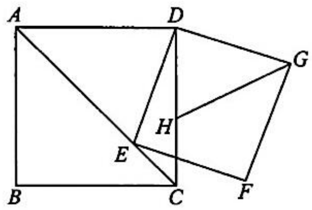


图 21

【变式训练 13】如图 20,M、N 是正方形 ABCD 的边 CD 上的两个动点,满足 AM=BN,连接 AC 交 BN 于点 E，连接 DE 交 AM 于点 F，连接 CF，若正方形的边长为 6，则线段 CF 的最小值是________。

【变式训练 14】如图 21,正方形 ABCD 中,AB=3,点 E 为对角线 AC 上的动点,以 DE 为边作正方形 DEFG。点 H 是 CD 上一点,且 $DH=\frac{2}{3}CD$,连接 GH，则 GH 的最小值为________。

【例 9】已知△ABC,分别以 BC、AC 为边向形外作正方形 BDEC,正方形 ACFG,过 C 点的直线 MN 垂直于 AB 于 N,交 EF 于 M,

(1)如图 22,当∠ACB=90°时,试证明:①EF=AB;②M 为 EF 的中点;

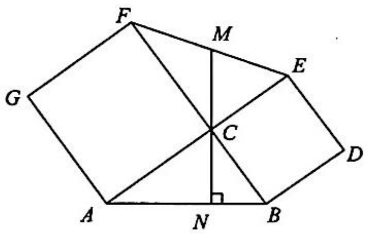


图 22

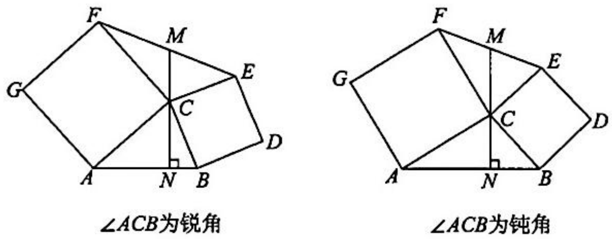


图 23

(2)如图 23，当∠ACB 为锐角或钝角时，①EF 与 AB 的数量关系为________(分情况说明)；②M 还是 EF 的中点吗？请说明理由。(选择当∠ACB 为锐角或钝角时的一种情况来说明)

【变式训练 15】如图 24,以△ABC 的边 AB、AC 为边分别向外作正方形 ABDE 和正方形 ACFG,连接 EG，试判断△ABC 与△AEG 面积之间的关系，并说明理由。

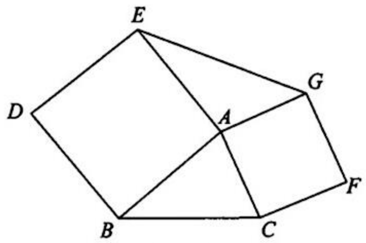


图 24

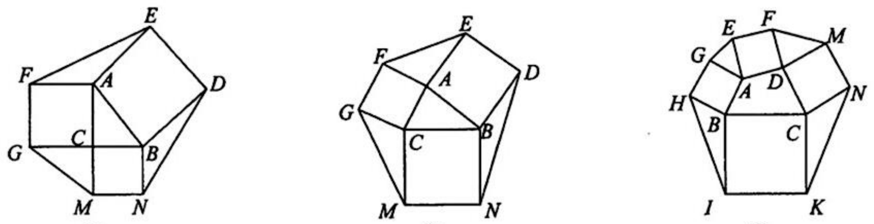
【变式训练 16】如图 25 中的图①,在 Rt△ABC 中,∠ACB=90°,AC>BC,分别以 AB、BC、CA 为一边向△ABC 外作正方形 ABDE、BCMN,CAFG,连接 EF、GM、ND,设△AEF、△BND、△CGM 的面积分别为 S_1、S_2、S_3。

(1)猜想 S_1、S_2、S_3的大小关系；

(2)请对(1)的猜想，任选一个关系进行证明；

(3)若将图①中的 Rt△ABC 改为图②中的任意△ABC,若 $S_{ABC}=5$,求出 $S_1+S_2+S_3$的值；

(4)若将图②中的任意△ABC 改为任意凸四边形 ABCD，若 $S_{AEG}+S_{CNK}+S_{IBH}+S_{DFM}=a$,则四边形 ABCD 的面积为_______。(直接用含 a 的代数式表示结果)



① ② ③

图 25

【例 10】如图 26,在正方形 ABCD 中,E 为 AD 边上的中点,过 A 作. $AF\perp BE$,交 CD 边于 F,M 是 AD 边上一点，且有 $BM=DM+CD$。

(1)求证:点 F 是 CD 边的中点;

(2)求证: $\angle MBC=2\angle ABE$。

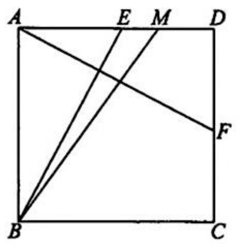


图 26

【变式训练 17】如图 27，以 $Rt\triangle ABC$的斜边 BC 为边在 $\triangle ABC$的同侧作正方形 BCEF，设正方形的中心为 O，连接 AO，如果 $AB=4,AO=6\sqrt{2}$,求 AC。

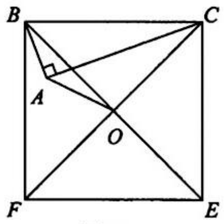


图 27

【变式训练 18】如图 28，四边形 ABCD 是正方形，点 N 是 CD 的中点，M 是 AD 边上不同于点 A、D 的点，若 $\frac{AM}{BM}=\frac{\sqrt{10}}{10}$,求证:∠NMB=∠MBC。

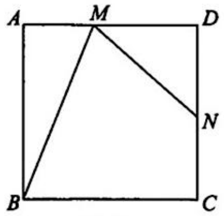


图 28

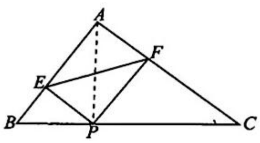
第九讲 特殊平行四边形答案

【例 1】解:如图,连接 AP,

∵∠A=90°,

PE⊥AB,PF⊥AC,

∴四边形 AFPE 是矩形,



∴EF=AP,

由垂线段最短可得 AP⊥BC 时，

AP 最短，则线段 EF 的值最小，

∴动点 P 从点 B 出发，沿着 BC 匀速向终点 C 运动，则线段 EF 的值大小变化情况是先减小后增大。

故选:C。

【变式训练 1】解:∵∠BAC=90°,且 BA=3,AC=4,

$\therefore BC=\sqrt{BA^2+AC^2}=5,$

∵DM⊥AB,DN⊥AC,

∴∠DMA=∠DNA=∠BAC=90°,

∴四边形 DMAN 是矩形,

∴MN=AD,

∴当 AD⊥BC 时,AD 的值最小,

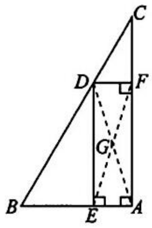
此时，△ABC 的面积 $=\frac{1}{2}AB\times AC=\frac{1}{2}BC\times AD,$

$\therefore AD=\frac{AB\times AC}{BC}=\frac{12}{5}$,

∴MN 的最小值为 $\frac{12}{5}$

故答案为： $\frac{12}{5}$

【变式训练 2】解:连接 AD、EF,



∵∠BAC=90°,且 BA=9,AC=12,

$\therefore BC=\sqrt{9^2+12^2}=15$,

∵DE⊥AB,DF⊥AC,

∴∠DEA=∠DFA=∠BAC=90°,

∴四边形 DEAF 是矩形,

∴EF=AD,

∴当 AD⊥BC 时,AD 的值最小,此时，△ABC 的面积 $=\frac{1}{2}AB\times AC=\frac{1}{2}BC\times AD$,

$\therefore AD=\frac{AB\times AC}{BC}=\frac{9\times 12}{15}=\frac{36}{5}$,

∴EF 的最小值为 $\frac{36}{5}$

∵点 G 为四边形 DEAF 对角线交点，

$\therefore GF=\frac{1}{2}EF=\frac{18}{5}$;

故选:B。

【例 2】解：连接 OP，如图所示：

∵矩形 ABCD 的两边 AB=3,BC=4,

∴S 矩形 ABCD=AB·BC=12,OA=OC,OB=OD,AC=BD,

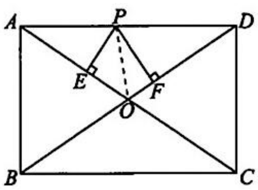
$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$,

$\therefore S_{AOD}=\frac{1}{4}S$矩形 ABCD=3,OA=OD= $\frac{5}{2}$

$\therefore S_{AOD}=S_{AOP}+S_{DOP}=\frac{1}{2}OA\cdot PE+\frac{1}{2}OD\cdot PF=$

$\frac{1}{2}OA(PE+PF)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times(PE+PF)=3$,

$\therefore \mathrm{P}E+PF=\frac{12}{5}$。



【变式训练 3】(1)解: $PE+PF=\frac{12}{5}$;理由如下：

设 AP=x,PD=4-x。

∵四边形 ABCD 是矩形，

∴∠ADC=90°,BD=AC,

∴由勾股定理得： $AC=\sqrt{3^2+4^2}=5,$

∵∠EAP=∠EAP,∠AEP=∠ADC;

∴△AEP∽△ADC,

$\therefore \frac{PE}{CD}=\frac{AP}{AC}$,即 $\frac{PE}{3}=\frac{x}{5} circle1;$

同理可得△DFP∽△DAB,

∴PF= $\frac{4}{5}$x②,①+②得 $\frac{PE+PF}{3}=\frac{4}{5}$,

$\therefore PE+PF=\frac{12}{5}$;

(2)解: $PF-PE=\frac{12}{5}$,理由如下：

∵△APC 的面积=△ADC 的面积+△PDC 的面积,

$\therefore \frac{1}{2}AC\cdot PF=\frac{1}{2}\times 3\times 4+\frac{1}{2}\times 3\times PD,$

∴5PF=12+3PD,

$\because \frac{PE}{PD}=\frac{AB}{BD}=\frac{3}{5}$,

$\therefore PD=\frac{5}{3}PE,$

∴5PF+12=5PE,

$\therefore PF-PE=\frac{12}{5}$。

【例 3】解:∵四边形 ABCD 是矩形,AB=4,AD=6,点 E 为 AB 边的中点，点 B 和点 B'关于 EF 对称，

$\therefore AE=BE=B'E=2,\angle A=90°,$

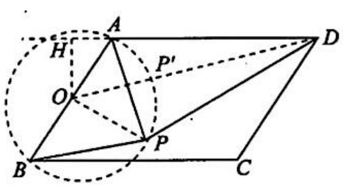
$\therefore DE=\sqrt{AE^2+AD^2}=2\sqrt{10},$

∴当点 B'在线段 DE 上时，B'D 取得最小值，此时 $B'D=2\sqrt{10}-2$,故答案为： $2\sqrt{10}-2$。

【变式训练 4】解:∵∠APB=90°,

∴点 P 在以 AB 为直径的圆上，

如图,设圆心为 O,连接 OP,OD,过点 O 作 OH⊥AD,交 DA 延长线于点 H，



在△OPD 中,PD>OD-OP,

∴当点 P 在 OD 上时,DP 有最小值,

∵在菱形 ABCD 中,AB=2,∠C=120°,

∴AO=1,∠BAH=60°,

$\therefore AH=\frac{1}{2}AO=\frac{1}{2},OH=\sqrt{3}AH=\frac{\sqrt{3}}{2},$

$\therefore DH=\frac{5}{2},$

$\therefore OD=\sqrt{DH^2+OH^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{7},$

∴DP 的最小值 $=OD-OP=\sqrt{7}-1$,故答案为 $\sqrt{7}-1$。

【例 4】解:(1)BE=BF,证明如下:

∵四边形 ABCD 是边长为 4 的菱形,BD=4,

∴△ABD、△CBD 都是边长为 4 的正三角形,

∵AE+CF=4,

∴CF=4-AE=AD-AE=DE,

又∵BD=BC=4,∠BDE=∠C=60°,

在△BDE 和△BCF 中 $\begin{cases} DE=CF \\ \angle BDE=\angle C, \\ BD=BC \end{cases}$

∴△BDE≌△BCF(SAS),

∴BE=BF;

(2)∵△BDE≌△BCF,

∴∠EBD=∠FBC,

∴∠EBD+∠DBF=∠FBC+∠DBF,

∴∠EBF=∠DBC=60°,

又∵BE=BF,

∴△BEF 是正三角形,

∴EF=BE=BF,

当动点 E 运动到点 D 或点 A 时，BE 的最大值为 4，

当 BE⊥AD,即 E 为 AD 的中点时,BE 的最小值为 2 $\sqrt{3}$

∵EF=BE,

∴EF 的最大值为 4，最小值为 2 $\sqrt{3}$

【变式训练 5】解:(1)BE=BF,证明如下:

∵四边形 ABCD 是边长为 4 的菱形,BD=4,

∴△ABD、△CBD 都是边长为 4 的正三角形,

∵AE+CF=4,

∴CF=4-AE=AD-AE=DE,

又∵BD=BC=4,∠BDE=∠C=60°,

在△BDE 和△BCF 中 $\begin{cases} DE=CF \\ \angle BDE=\angle C, \\ BD=BC \end{cases}$

∴△BDE≌△BCF(SAS),

∴BE=BF;