2024年江西省宜春市第一中学高三下学期第三次模拟考试

数学试卷（新高考）

本试卷满分150分，考试时间120分钟

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合$M=\{x\mid \lg x>0\}$，$N=\{x\mid y=\sqrt{x^2-6x+8}\}$，则$M\cap N=$（　　）

A. （1，2]　　B. $(4,+\infty)$　　C. $(1,2)\cup[4,+\infty)$　　D. $(1,2]\cup[4,+\infty)$

2. 已知复数z满足$\dfrac{\overline{z}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})^2}=|3+4\mathrm{i}|$，则$z$的虚部是（　　）

A. -25　　B. -5　　C. 1　　D. 5

3. 下列说法不正确的是（　　）

A. 一组数据1，4，14，6，13，10，17，19的25%分位数为5

B. 一组数据m，3，2，5，7的中位数为3，则m的取值范围是$(-\infty,3]$

C. 若随机变量$X\sim B(4,\dfrac{1}{3})$，则方差$D(3X+1)=4$

D. 若随机变量$X\sim N(1,\sigma^2)$，且$P(0<X<1)=0.4$，则$P(X>2)=0.1$

4. 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_{12}-S_4=8$，则$S_{13}-S_3=$（　　）

A. 10　　B. 12　　C. 14　　D. 16

5. 已知m,n是空间中两条不同的直线，α，β是两个不同的平面，则下列说法错误的是（　　）

A. 若$m\perp\alpha$、$n//\alpha$，则$m\perp n$　　B. 若$m\perp\alpha$，$m//n$，则$n\perp\alpha$

C. 若$m//n$，$n\perp\beta$，$m\perp\alpha$，则$\alpha//\beta$　　D. 若$m\perp\alpha$，$m\perp n$，则$n//\alpha$

6. 已知$a>0$，且$a\neq 1$，若函数$f(x)=a(\ln x-a^{x-1})$在$(1,+\infty)$上单调递减，则a的取值范围是（　　）

A. $(0,\frac{1}{e}]$　　　　B. $[\frac{1}{e},1)$　　　　C. $(1,e]$　　　　D. $[e,+\infty)$

7. 已知抛物线C：$y^2=4x$的焦点为F，动直线l与抛物线C交于异于原点O的A，B两点，以线段OA，OB为邻边作平行四边形$OAPB$，若点$P\left(4,m\right)$（$m>0$），则当$|AF|+|BF|$取最小值时，$m=$（　　）

A. 2　　　　B. $2\sqrt{2}$　　　　C. 3　　　　D. $2\sqrt{3}$

8. 已知$a=\frac{1}{2\sqrt{e}}$，$b=\frac{\ln 2}{2\sqrt{2}}$，$c=\frac{\ln 4}{4}$，其中$e=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数，则（　　）

A. $b<a<c$　　　　B. $b<c<a$　　　　C. $a<b<c$　　　　D. $c<b<a$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 同时抛出两枚质地均匀的骰子甲、乙，记事件A：甲骰子点数为奇数，事件B：乙骰子点数为偶数，事件C：甲、乙骰子点数相同．下列说法正确的有（　　）

A. 事件A与事件B对立　　　　B. 事件A与事件B相互独立

C. 事件A与事件C相互独立　　　　D. $P(C)=P(AB)$

10. 古希腊数学家阿波罗尼斯的著作《圆锥曲线论》中给出了阿波罗尼斯圆的定义：在平面内，已知两定点A，B之间的距离为a（非零常数），动点M到A，B的距离之比为常数λ（$\lambda>0$，且$\lambda\neq 1$），则点M的轨迹是圆，简称为阿氏圆．在平面直角坐标系xOy中，已知$A\left(-4,0\right),B\left(2,0\right)$，点$M$满足$|MA|=2|MB|$，则下列说法正确的是（　　）

A. $\triangle AMB$面积的最大值为 12　　　　B. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$的最大值为 72

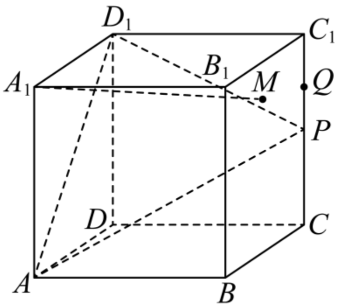
C. 若$Q\left(8,8\right)$，则$|MA|+2|MQ|$的最小值为 10　　　　D. 当点M不在x轴上时，MO始终平分$\angle AMB$

11. 设椭圆C：$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，坐标原点为$O$．若椭圆$C$上存在一点$P$，使得$|OP|=\sqrt{7}$，则下列说法正确的有（　　）

A. $\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{5}$　　　　B. $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=5$

C. $\triangle F_1PF_2$的面积为 2　　　　D. $\triangle F_1PF_2$的内切圆半径为$\sqrt{2}-1$

12. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，设 P 是棱 CC_1 的中点，Q 是线段 C_1P 上的动点（含端点），M 是正方形 BCC_1B_1 内（含边界）的动点，且 A_1M // 平面 D_1AP，则下列结论正确的是（　　）



A. 存在满足条件的点 M，使 $A_1M \perp AD_1$

B. 当点 Q 在线段 C_1P 上移动时，必存在点 M，使 $A_1M \perp BQ$

C. 三棱锥 C_1-A_1PM 的体积存在最大值和最小值

D. 直线 A_1M 与平面 BCC_1B_1 所成角的余弦值的取值范围是 $[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 均为非零向量，若 $|2\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{b}|=2|\vec{a}|$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为________.

14. 已知 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，且 $\tan 2\theta \cdot \tan(\theta+\frac{\pi}{4})=4$，则 $\frac{\cos 2\theta}{1-\sin 2\theta}=$________.

15. 已知 $x>0$，$y>0$，且满足 $4x^2+9y^2+6xy-3=0$，则 $2x+3y$ 的最大值为________.

16. 已知方程 $e^x=\frac{\ln x+m}{x}+1$ 在 $(0,1)$ 上有两个不相等的实数根，则实数 m 的取值范围是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 在 $\triangle ABC$ 中，设角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c．已知 $C=120°$，$\triangle ABC$ 的周长为 15，面积为 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

（1）求 $\triangle ABC$ 的外接圆面积；

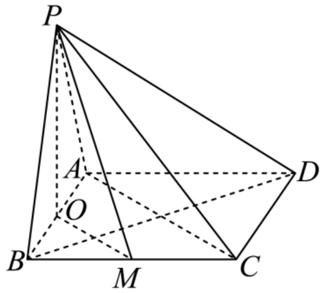
（2）设 D 是边 AB 上一点，在①CD 是边 AB 上的中线；②CD 是 $\angle ACB$ 的角平分线这两个条件中任选一个，求线段 CD 的长.

18. 在正项数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=1$，且 $\frac{na_n}{a_{n+1}}-\frac{(n+1)a_{n+1}}{a_n}=1$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求证：$2 \le (a_n+1)^n < 3$.

19. 如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，已知底面 $ABCD$ 为菱形，平面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$，M 为棱 BC 上异于点 C 的一点，O 为棱 AB 的中点，且 $PA = PB = AB$，$\angle ABC = 60°$.



（1）若 $BD \perp PM$，求证：M 为 BC的中点；

（2）若平面 POM 与平面 PAC 所成的锐二面角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，求$\dfrac{BM}{BC}$的值.

20. 据教育部统计，2024 届全国高校毕业生规模预计达 1179 万，同比增加 21 万，岗位竞争激烈．为落实国务院关于高校毕业生就业工作的决策部署，搭建高校毕业生和用人单位求职招聘的双向对接通道，促进高校毕业生高质量充分就业，某市人社局联合市内高校开展 2024 届高校毕业生就业服务活动系列招聘会．参加招聘会的小王打算依次去甲、乙、丙三家公司应聘．假设小王通过某公司的专业测试就能与该公司签约，享受对应的薪资待遇，且不去下一家公司应聘，或者放弃签约并参加下一家公司的应聘；若未通过测试，则不能签约，也不再选择下一家公司．已知甲、乙、丙三家公司提供的年薪分别为 10 万元、12 万元、18 万元，小王通过甲、乙、丙三家公司测试的概率分别为$\dfrac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，通过甲公司的测试后选择签约的概率为$\dfrac{3}{4}$，通过乙公司的测试后选择签约的概率为$\dfrac{3}{5}$，通过丙公司的测试后一定签约．每次是否通过测试、是否签约均互不影响.

（1）求小王通过甲公司的测试但未与任何公司签约的概率；

（2）设小王获得的年薪为 X（单位：万元），求 X 的分布列及其数学期望.

21. 已知函数 $f(x) = \mathrm{e}^x \ln x - x(\mathrm{e}^x - a), a \in \mathrm{R}$，.

（1）若 $f(x) \le 0$ 对 $\forall x \in (0,+\infty)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（2）若曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴交于 A，B 两点，且线段 AB 的中点为 $M(x_0, 0)$，求证：$x_0 > 1$.

22. 已知以点 M 为圆心的动圆经过点 $F_1(-3,0)$，且与圆心为 F_2 的圆 $(x-3)^2 + y^2 = 12$ 相切，记点 M 的轨迹为曲线 C.

（1）求曲线 C 的方程；

（2）若动直线 l 与曲线 C 交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点（其中 $y_1y_2>0$），点 A 关于 x 轴对称的点为 A'，且直线 BA'经过点 $P\left(-1,0\right)$.

（ⅰ）求证：直线 l 过定点；

（ⅱ）若 $|PA|+|PB|=4\sqrt{15}$，求直线 l 的方程.

参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\{x\,|\,\lg x>0\}$，$N=\{x\,|\,y=\sqrt{x^2-6x+8}\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A. （1，2]　　B. $(4,+\infty)$　　C. $(1,2)\cup[4,+\infty)$　　D. $(1,2]\cup[4,+\infty)$

【答案】D

【解析】

【分析】分别化简集合 M,N，取交集即可.

【详解】$M=\{x\,|\,\lg x>0\}=\{x\,|\,x>1\}$，$N=\{x\,|\,y=\sqrt{x^2-6x+8}\}=\{x\,|\,x\geq 4$ 或 $x\leq 2\}$，

所以 $M\cap N=\left\{x\middle|x\rangle 1\right\}\cap\{x\,|\,x\geq 4$ 或 $x\leq 2\}=\left(1,2\right]\cup\left[4,+\infty\right)$.

故选:D.

2. 已知复数 z 满足 $\dfrac{\overline{z}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})^2}=|3+4\mathrm{i}|$，则 z 的虚部是（　　）

A. -25　　B. -5　　C. 1　　D. 5

【答案】B

【解析】

【分析】由复数的模定义求得 $|3+4\mathrm{i}|$，利用复数的四则运算求得 $\overline{z}$，再由共轭复数定义得 $z=-5-5\mathrm{i}$ 即可得出结论.

【详解】由 $\dfrac{\overline{z}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})^2}=|3+4\mathrm{i}|$，得 $\dfrac{\overline{z}(1-\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}=5$，

所以 $\overline{z}=\dfrac{10\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{10\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{2}=-5+5\mathrm{i}$，所以 $z=-5-5\mathrm{i}$.

故选：B.

3. 下列说法不正确的是（　　）

A. 一组数据 1，4，14，6，13，10，17，19 的 25%分位数为 5

B. 一组数据m，3，2，5，7 的中位数为 3，则m的取值范围是$(-\infty,3]$

C. 若随机变量$X\sim B(4,\frac{1}{3})$，则方差$D(3X+1)=4$

D. 若随机变量$X\sim N(1,\sigma^2)$，且$P(0<X<1)=0.4$，则$P(X>2)=0.1$

【答案】C

【解析】

【分析】对于 A，先把数据从小到大排列，利用百分位定义计算即可; 对于 B，根据中位数的定义讨论即可; 对于 C，根据二项分布的方差公式计算即可；对于 D，根据正态分布的对称性求解.

【详解】对于 A，该组数据共 8 个，且$8\times25\%=2$，所以 25%分位数为从小到大排列后第 2 个数和第 3 个数的平均数，即为$\frac{4+6}{2}=5$，故 A 正确；

对于 B，若$m\geq5$，则这组数据由小到大排列依次为 2，3，5，m，7 或 2，3，5，7，m，中位数为 5，不合题意；

若$3<m<5$，则这组数据由小到大排列依次为 2，3，m，5，7，中位数为$m\neq3$，不合题意；

若$m\leq3$，则这组数据由小到大排列依次为 2，m，3，5，7 或m，2，3，5，7，中位数为 3，故实数m的取值范围是$(-\infty,3]$，故 B 正确；

对于 C，若随机变量$X\sim B(4,\frac{1}{3})$，则$D(X)=4\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{3})=\frac{8}{9}$，所以

$D(3X+1)=3^2D(X)=9\times\frac{8}{9}=8$，故 C 错误；

对于 D，若随机变量$X\sim N(1,\sigma^2)$，且$P(0<X<1)=0.4$，则

$P(X>2)=0.5-P(1<X<2)=0.5-P(0<X<1)=0.1$，故 D 正确.

故选：C.

4. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，且$S_{12}-S_4=8$，则$S_{13}-S_3=$（　　）

A. 10　　B. 12　　C. 14　　D. 16

【答案】A

【解析】

【分析】利用等差数列求和公式化简$S_{12}-S_4=8$可得$2a_1+15d=2$，将$S_{13}-S_3$化简可得

$S_{13}-S_3=5(2a_1+15d)$，计算可得结果.

【详解】设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $S_{12}-S_4=8$，得 $12a_1+\dfrac{12\times 11}{2}d-(4a_1+\dfrac{4\times 3}{2}d)=8$，

化简为 $2a_1+15d=2$，

所以 $S_{13}-S_3=13a_1+\dfrac{13\times 12}{2}d-\left(3a_1+\dfrac{3\times 2}{2}d\right)=5(2a_1+15d)=5\times 2=10$.

故选：A.

5. 已知 m,n 是空间中两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，则下列说法错误的是（　　）

A. 若 $m\perp\alpha$、$n//\alpha$，则 $m\perp n$　　B. 若 $m\perp\alpha$，$m//n$，则 $n\perp\alpha$

C. 若 $m//n$，$n\perp\beta$，$m\perp\alpha$，则 $\alpha//\beta$　　D. 若 $m\perp\alpha$，$m\perp n$，则 $n//\alpha$

【答案】D

【解析】

【分析】对于 A，可过 n 作平面 β，使 $\beta\cap\alpha=l$，则 $n//l$，即可判断；对于 B，由线面垂直的性质即可判断；对于 C，由条件，可得 $m\perp\beta$，又 $m\perp\alpha$，则 $\alpha//\beta$，即可判断；对于 D，要考虑 n 可能在平面 α 内，即可判断.

【详解】对于 A，当 $n//\alpha$ 时，过 n 作平面 β，使 $\beta\cap\alpha=l$，则 $n//l$，因为 $m\perp\alpha$，$l\subset\alpha$，所以 $m\perp l$，所以 $m\perp n$，故 A 正确；

对于 B，当 $m\perp\alpha$，$m//n$，由线面垂直的性质可得 $n\perp\alpha$，故 B 正确；

对于 C，因为 $m//n$，$n\perp\beta$，所以 $m\perp\beta$，又 $m\perp\alpha$，所以 $\alpha//\beta$，故 C 正确；

对于 D，当 $m\perp\alpha$，$m\perp n$ 时，n 可能在平面 α 内，故 D 错误.

故选：D.

6. 已知 $a>0$，且 $a\neq 1$，若函数 $f(x)=a(\ln x-a^{x-1})$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}]$　　B. $[\dfrac{1}{\mathrm{e}},1)$　　C. $(1,\mathrm{e}]$　　D. $[\mathrm{e},+\infty)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意，转化为 $f'(x)\le 0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，令 $g(x)=f'(x)$，利用导数求得函数 $g(x)$

单调递减，得到 $g(x)<g(1)=a-a\ln a$ ，得出 $a-a\ln a\le 0$ ，即可求解.

【详解】由函数 $f(x)=a(\ln x-a^{x-1})$ ，可得 $f'(x)=\dfrac{a}{x}-a^{x}\ln a$

因为 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f'(x)\le 0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

令 $g(x)=f'(x)=\dfrac{a}{x}-a^{x}\ln a$ ，则 $g'(x)=-\dfrac{a}{x^{2}}-a^{x}(\ln a)^{2}<0$ ，

所以 $g\left(x\right)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(x)<g(1)=a-a\ln a$ ，即 $f'(x)<a-a\ln a$ ，

则 $a-a\ln a\le 0$ ，解得 $a\ge \mathrm{e}$ ，即实数 a 的取值范围是 $[\mathrm{e},+\infty)$.

故选：D.

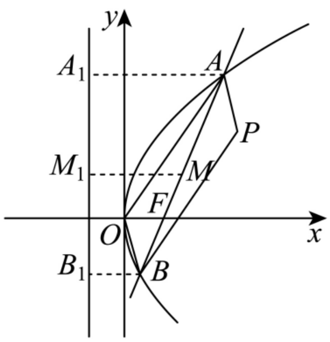
7. 已知抛物线 C： $y^{2}=4x$ 的焦点为 F，动直线 l 与抛物线 C 交于异于原点 O 的 A，B 两点，以线段 OA，OB 为邻边作平行四边形 $OAPB$，若点 $P\left(4,m\right)$（ $m>0$ ），则当 $|AF|+|BF|$ 取最小值时， $m=$（　　）

A. 2　　　　B. $2\sqrt{2}$　　　　C. 3　　　　D. $2\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意，由抛物线的方程可得焦点坐标以及准线方程，然后分别过 A、B、M 向准线作垂线，$|AF|+|BF|$ 取最小值即直线 AB 过焦点 $F\left(1,0\right)$ 时，再结合点差法代入计算，即可得到结果.

【详解】

由题可知焦点 $F\left(1,0\right)$，准线 $x=-1$，设线段 AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$，即为 OP 中点，

则 $x_0=\dfrac{4}{2}=2$， $y_0=\dfrac{m}{2}$. 分别过 A、B、M 向准线作垂线，垂足分别为 A_1，B_1，M_1，如图所示.

则 $|AF|+|BF|\ge|AB|$，当直线 AB 过焦点 $F\left(1,0\right)$ 时取等号，此时

$|AB|=2|MM_1|=2|x_0+1|=4+2=6$.

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，直线 AB 的斜率为 k，

由 $\begin{cases} y_1^2=4x_1 \\ y_2^2=4x_2 \end{cases}$，两式相减，得 $y_1^2-y_2^2=4(x_1-x_2)$，所以 $\dfrac{y_1+y_2}{2}\cdot\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$，

即 $y_0k=2$，得 $y_0\cdot\dfrac{y_0}{2-1}=2$，所以 $y_0^2=2$，又 $m>0$，所以 $m=2y_0=2\sqrt{2}$.

故选：B.

8. 已知 $a=\dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}$，$b=\dfrac{\ln 2}{2\sqrt{2}}$，$c=\dfrac{\ln 4}{4}$，其中 $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数，则（　　）

A. $b<a<c$　　　　B. $b<c<a$　　　　C. $a<b<c$　　　　D. $c<b<a$

【答案】A

【解析】

【分析】首先将 a,b,c 化成统一形式，构造函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}\left(x>0\right)$，研究单调性进而比较大小即可.

【详解】由题意得 $a=\dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}=\dfrac{\ln\sqrt{\mathrm{e}}}{\sqrt{\mathrm{e}}}$，$b=\dfrac{\ln 2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\ln\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$，$c=\dfrac{\ln 4}{4}=\dfrac{2\ln 2}{4}=\dfrac{\ln 2}{2}$；

设 $f\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 单调递增，又 $0<\sqrt{2}<\sqrt{\mathrm{e}}<2<\mathrm{e}$，

所以 $f(\sqrt{2})<f(\sqrt{\mathrm{e}})<f(2)$，即 $\dfrac{\ln\sqrt{2}}{\sqrt{2}}<\dfrac{\ln\sqrt{\mathrm{e}}}{\sqrt{\mathrm{e}}}<\dfrac{\ln 2}{2}$，所以 $b<a<c$.

故选：A.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 同时抛出两枚质地均匀的骰子甲、乙，记事件 A：甲骰子点数为奇数，事件 B：乙骰子点数为偶数，事件 C：甲、乙骰子点数相同．下列说法正确的有（　　）

A. 事件 A 与事件 B 对立　　　　B. 事件 A 与事件 B 相互独立

C. 事件 A 与事件 C 相互独立　　　　D. $P(C)=P(AB)$

【答案】BC

【解析】

【分析】对于 A

，甲骰子点数为奇数，乙骰子点数为偶数，事件可以同时发生，由对立事件的概念可判断；对于 B，计算出 $P(A)P(B)$，$P(AB)$，根据 $P(AB)=P(A)P(B)$ 可以判定两个事件是否相互独立；对于 C，计算出 $P(A)P(C)$，$P(AC)$，根据 $P(AC)=P(A)P(C)$ 可以判定两个事件是否相互独立；对于 D，由前面可知 $P(C)$，$P(AB)$，即可判断是否相等.

【详解】由题意，得 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{1}{2}$，$P(C)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$，

对于 A，当甲为奇数点，且乙为偶数点时，事件可以同时发生，所以事件 A 与事件 B 不互斥，故事件 A 与事件 B 不对立，故 A 错误；

对于 B，由题意知 $P(AB)=\dfrac{C_3^1C_3^1}{C_6^1C_6^1}=\dfrac{1}{4}$，又 $P(A)P(B)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}=P(AB)$，故事件 A 与事件 B 相互独立，故 B 正确；

对于 C，$P(AC)=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$，又 $P(A)P(C)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}=P(AC)$，故事件 A 与事件 C 相互独立，故 C 正确；

对于 D，由上知，$P(C)=\dfrac{1}{6}<P(AB)=\dfrac{1}{4}$，故 D 错误.

故选：BC.

10. 古希腊数学家阿波罗尼斯的著作《圆锥曲线论》中给出了阿波罗尼斯圆的定义：在平面内，已知两定点 A，B 之间的距离为 a（非零常数），动点 M 到 A，B 的距离之比为常数 λ（$\lambda>0$，且 $\lambda\neq1$），则点 M 的轨迹是圆，简称为阿氏圆．在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $A(-4,0),B(2,0)$，点 M 满足 $|MA|=2|MB|$，则下列说法正确的是（　　）

A. $\triangle AMB$ 面积的最大值为 12　　B. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 的最大值为 72

C. 若 $Q(8,8)$，则 $|MA|+2|MQ|$ 的最小值为 10　　D. 当点 M 不在 x 轴上时，MO 始终平分 $\angle AMB$

【答案】ABD

【解析】

【分析】设点 $M(x,y)$，由条件可得点 M 的轨迹方程，即可判断 A，由向量数量积的运算律代入计算，即可判断 B，由点与圆的位置关系，即可判断 C，由角平分线定理即可判断 D

【详解】对于 A，设点 $M(x,y)$，由 $|MA|=2|MB|$，得 $\sqrt{(x+4)^2+y^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，

化为$(x-4)^2+y^2=16$，所以点M的轨迹是以点$\left(4,0\right)$为圆心、4为半径的圆，

所以$\triangle AMB$面积的最大值为$\frac{1}{2}|AB|r=\frac{1}{2}\times 6\times 4=12$，故 A 正确；

对于 B，设线段 AB 的中点为 N，

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NA})\cdot(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB})=|\overrightarrow{MN}|^2-|\overrightarrow{NA}|^2\le(8+1)^2-(-1+4)^2=72$，

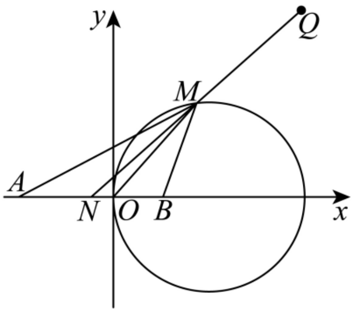
当点 M 的坐标为$\left(8,0\right)$时取等号，故$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$的最大值为 72，故 B 正确；

对于 C，显然点$Q\left(8,8\right)$在圆外，点$B\left(2,0\right)$在圆内，

$\left|MA\right|+2\left|MQ\right|=2\left|MB\right|+2\left|MQ\right|=2\left(\left|MB\right|+\left|MQ\right|\right)\ge 2\left|BQ\right|=2\sqrt{\left(8-2\right)^2+8^2}=20$，当 B，M，Q 三点共线且点 M 在线段 BQ 之间时，$(|MA|+2|MQ|)_{\min}=20$，故 C 错误；

对于 D，由$|OA|=4$，$|OB|=2$，有$\frac{|OA|}{|OB|}=2=\frac{|MA|}{|MB|}$，当点 M 不在 x 轴上时，

由三角形内角平分线分线段成比例定理的逆定理知，MO 是$\triangle AMB$中$\angle AMB$的平分线，故 D 正确．



故选：ABD．

11．设椭圆 C：$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，坐标原点为 O．若椭圆 C 上存在一点 P，使得$|OP|=\sqrt{7}$，则下列说法正确的有（　　）

A．$\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{5}$

B．$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=5$

C．$\triangle F_1PF_2$的面积为 2

D．$\triangle F_1PF_2$的内切圆半径为$\sqrt{2}-1$

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据已知求出 P 点坐标，根据两点间距离公式分布求出$\left|PF_1\right|,\left|PF_2\right|$，在$\triangle F_1PF_2$中利用余弦定理可判定 A，利用向量数量积公式可判定 B，三角形面积公式可判定 C，根据等面积法可判定 D.

【详解】法 1：由题意得$a=2\sqrt{2}$，$|F_1F_2|=2c=2\sqrt{8-4}=4$，则$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$．

由对称性可设 $P(x_0,y_0)$（$x_0>0$，$y_0>0$），$|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，$\angle F_1PF_2=\theta$，

由 $\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{8}+\dfrac{y_0^2}{4}=1\\ \sqrt{x_0^2+y_0^2}=\sqrt{7}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_0=\sqrt{6}\\ y_0=1\end{cases}$，又 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，

所以 $m=\sqrt{(\sqrt{6}+2)^2+1^2}=\sqrt{11+4\sqrt{6}}$，$n=\sqrt{(\sqrt{6}-2)^2+1^2}=\sqrt{11-4\sqrt{6}}$，

所以 $mn=\sqrt{11+4\sqrt{6}}\cdot\sqrt{11-4\sqrt{6}}=\sqrt{11^2-(4\sqrt{6})^2}=5$．

由椭圆的定义得 $m+n=2a=4\sqrt{2}$，

在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理，得 $|F_1F_2|^2=m^2+n^2-2mn\cos\theta$，

即 $4^2=(m+n)^2-2mn-2mn\cos\theta=(4\sqrt{2})^2-2\times5-2\times5\cos\theta$，

解得 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，故 A 正确；

$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=mn\cos\theta=5\times\dfrac{3}{5}=3$，故 B 错误；

$\triangle F_1PF_2$ 的面积为 $S_{\triangle F_1PF_2}=\dfrac{1}{2}mn\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times5\times\sqrt{1-(\dfrac{3}{5})^2}=2$，故 C 正确；

设 $\triangle F_1PF_2$ 的内切圆半径为 r，由 $\triangle F_1PF_2$ 的面积相等，得 $S_{\triangle F_1PF_2}=\dfrac{1}{2}(m+n+|F_1F_2|)r$，

即 $2=\dfrac{1}{2}(4\sqrt{2}+4)r$，解得 $r=\sqrt{2}-1$，故 D 正确．

故选：ACD．

法 2：设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，$\angle F_1PF_2=\theta$．易知 $a=2\sqrt{2}$，$c=\sqrt{8-4}=2$，

由极化恒等式，得 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=|OP|^2-|OF_1|^2=7-4=3$，故 B 错误；

由中线长定理得 $m^2+n^2=2(|OP|^2+|OF_1|^2)=22$，由椭圆定义得 $m+n=2a=4\sqrt{2}$，

所以 $(m+n)^2=m^2+n^2+2mn=22+2mn=32$，所以 $mn=5$，

所以 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}}{mn}=\dfrac{3}{5}$，故 A 正确；

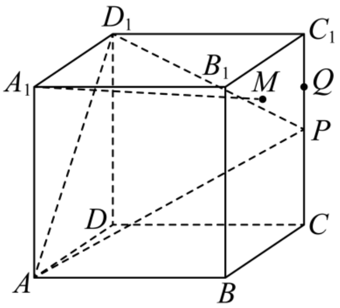
由 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，得 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{4}{5}$，所以 $S_{\triangle F_1PF_2}=\dfrac{1}{2}mn\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times5\times\dfrac{4}{5}=2$，故 C 正确；

设 $\triangle F_1PF_2$ 的内切圆半径为 r，由 $\triangle F_1PF_2$ 的面积相等，得 $S_{\triangle F_1PF_2}=\dfrac{1}{2}(m+n+|F_1F_2|)r$，

即 $2=\frac{1}{2}(4\sqrt{2}+4)r$，解得 $r=\sqrt{2}-1$，故 D 正确．

故选：ACD．

12. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，设 P 是棱 CC_1 的中点，Q 是线段 C_1P 上的动点（含端点），M 是正方形 BCC_1B_1 内（含边界）的动点，且 $A_1M//$ 平面 D_1AP，则下列结论正确的是（　　）



A. 存在满足条件的点 M，使 $A_1M\perp AD_1$

B. 当点 Q 在线段 C_1P 上移动时，必存在点 M，使 $A_1M\perp BQ$

C. 三棱锥 C_1-A_1PM 的体积存在最大值和最小值

D. 直线 A_1M 与平面 BCC_1B_1 所成角的余弦值的取值范围是 $[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$

【答案】ABC

【解析】

【分析】由已知，取 B_1C_1 的中点 E，BB_1 的中点 F，并连接，可得点 M 的轨迹为线段 EF．对于 A，连接 A_1C，B_1C 交 BC_1 于点 O，可得 $BC_1\perp$ 平面 A_1B_1C，当 M 为线段 EF 中点时，$BC_1\perp A_1M$，又 $BC_1//AD_1$，则可判断：对于 B，分别以向量 $\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 的方向为 x，y，z 轴的正方向建立空间直角坐标系，由空间向量坐标运算可得存在 $\overrightarrow{A_1M}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$，即可判断；对于 C，设点 M 到 C_1P 的距离为 h，可知当 M 与 E 重合时，$h_{\min}=EC_1=1$，当 M 与 F 重合时，$h_{\max}=FP=2$，即可求出三棱锥 C_1-A_1PM 的体积存在最大值和最小值，则可判断；对于 D，由 $A_1B_1\perp$ 平面 BCC_1B_1 知，$\angle A_1MB_1$ 即为直线 A_1M 与平面 BCC_1B_1 所成的角，在 $\triangle B_1EF$ 中，可得 $\frac{1}{\sqrt{2}}\le B_1M\le 1$，则得 $2\le\tan\theta\le 2\sqrt{2}$，进而得 $\frac{1}{3}\le\cos\theta\le\frac{\sqrt{5}}{5}$，则可判断.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/155210324310011213