高二年级—人教A版—数学选择性必修第三册第六章

# 6.3.2二项式系数的性质

# 一、学习目标

1. **会用赋值法求展开式系数的和；**

2. **能掌握二项式系数的性质，并能灵活运用性质解决相关问题；**

3. **提升数学抽象和数学运算的核心素养。**

# 二、知识回顾

1. 二项式定理：

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n，\ n \in N^*.$$

2. 二项式系数： $C_n^k (k = 0,1,2,\cdots,n)$

3. 二项展开式的通项： $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

## 三、探究新知

$(a+b)^n$ 的展开式的二项式系数 $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^k, \cdots, C_n^n$

有很多有趣的性质，而且我们可以从不同的角度进行研究

用计算工具计算$(a+b)^n$ 的展开式的二项式系数，并填入下表：

| $n$ | $(a+b)^n$ 展开式的二项式系数 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 4 | 1 | | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 10 | 5 | 1 | |

通过计算、填表、你发现了什么规律？

| $n$ | $(a+b)^n$ 展开式的二项式系数 |
| --- | --- |
| 1 | 1　1 |
| 2 | 1　2　1 |
| 3 | 1　3　3　1 |
| 4 | 1　4　6　4　1 |
| 5 | 1　5　10　10　5　1 |
| 6 | 1　6　15　20　15　6　1 |

$(a+b)^1 \longrightarrow$ 1 1

$(a+b)^2 \longrightarrow$ 1 2 1

$(a+b)^3 \longrightarrow$ 1 3 3 1

$(a+b)^4 \longrightarrow$ 1 4 6 4 1

$(a+b)^5 \longrightarrow$ 1 5 10 10 5 1

$(a+b)^6 \longrightarrow$ 1 6 15 20 15 6 1

$C_1^0 \quad C_1^1$

$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$

$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$

$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$

$C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$

$C_6^0 \quad C_6^1 \quad C_6^2 \quad C_6^3 \quad C_6^4 \quad C_6^5 \quad C_6^6$

每一行中的系数具有对称性

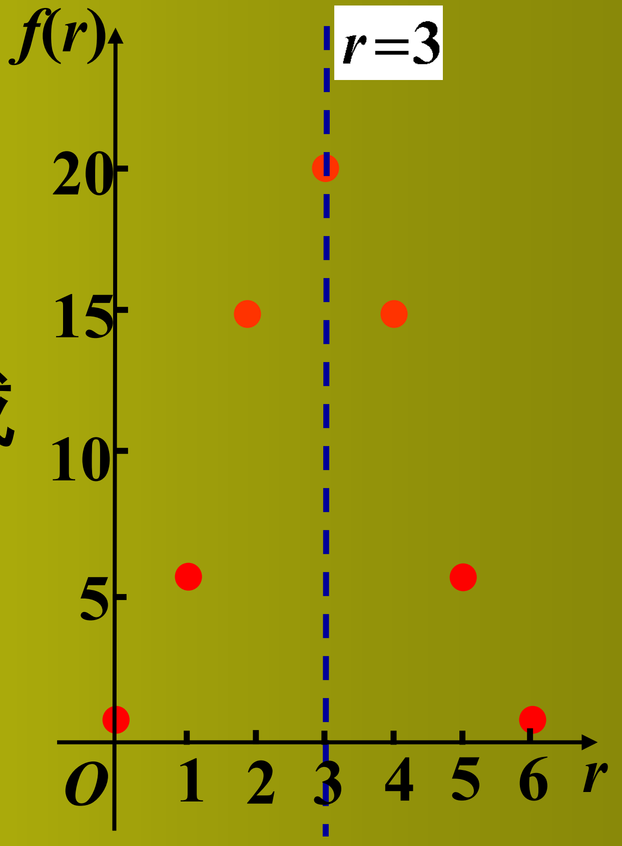
对于$(a+b)^n$展开式的二项式系数

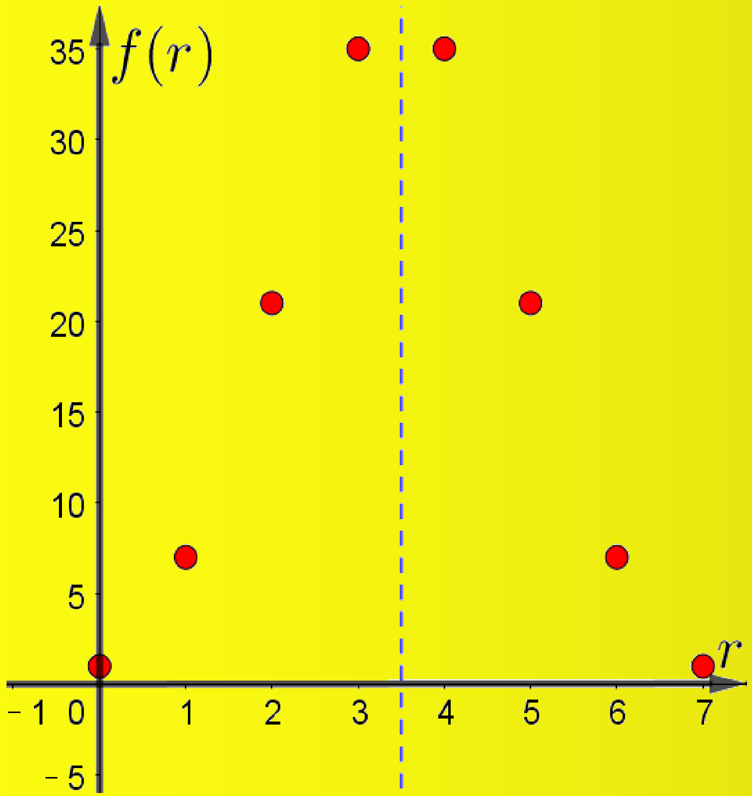
$$C_n^0, C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^n.$$

我们还可以从函数角度分析它们. $C_n^r$可看成是以$r$为自变量的函数$f(r)$, 其定义域是

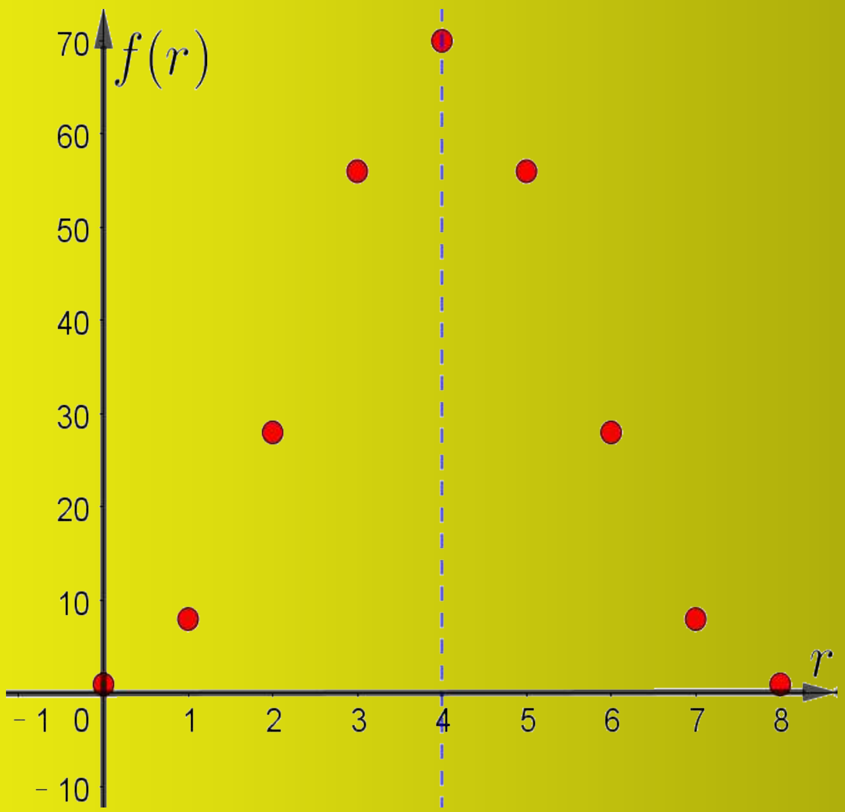
$$\{0,1,2,\cdots,n\}.$$

对于确定的$n$，我们还可以画出它的图象. 例如，当$n=6$时，函数$f(r)=C_n^r\ (r\in\{0,1,2,3,4,5,6\})$的图象是7个离散点. 如图所示.

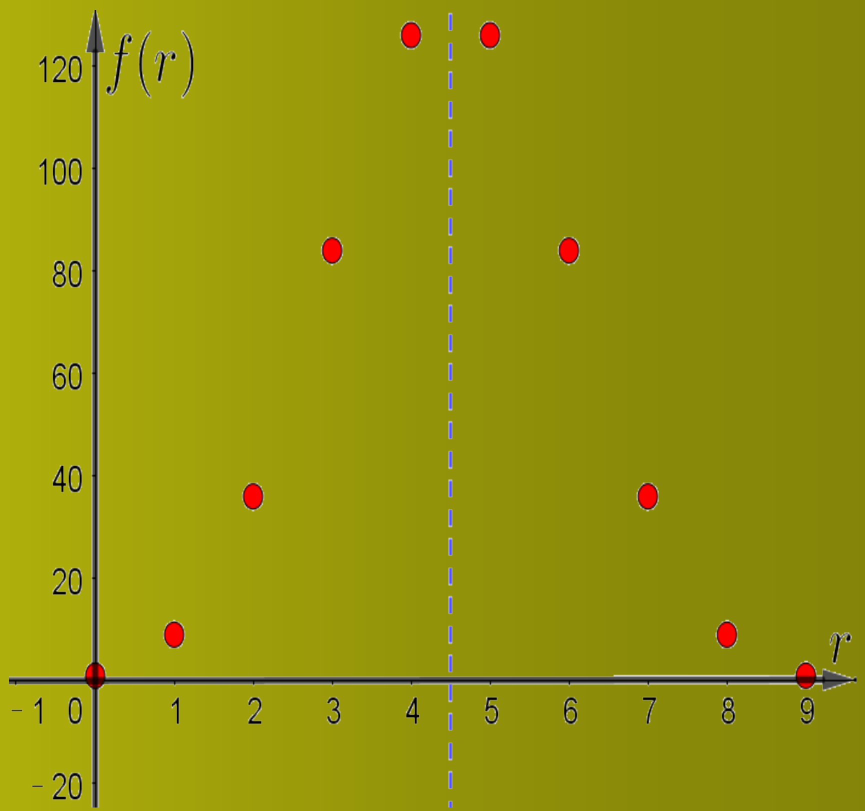



$f(r)$
35
30
25
20
15
10
5
-5
-1 0 1 2 3 4 5 6 7
$r$

n=7


$f(r)$
70
60
50
40
30
20
10
-10
-1 0 1 2 3 4 5 6 7 8
$r$

n=8


$f(r)$
120
100
80
60
40
20
-20
-1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
$r$

n=9

由此我们可得二项式系数的以下性质：

1. 对称性

与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等．事实上，这一性质可直接由公式 $C_n^m = C_n^{n-m}$ 得到.

直线 $r = \frac{n}{2}$ 将函数 $f(r) = C_n^r$ 的图象分成对称的两部分，它是图象的对称轴.

2. 增减性与最大值

$$\mathrm{C}_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)(n-k+1)}{(k-1)!k}=\mathrm{C}_n^{k-1}\cdot\frac{n-k+1}{k},\quad \therefore\frac{\mathrm{C}_n^k}{\mathrm{C}_n^{k-1}}=\frac{n-k+1}{k}.$$

$\therefore$当$\dfrac{n-k+1}{k}>1$，即$k<\dfrac{n+1}{2}$时，$\mathrm{C}_n^k>\mathrm{C}_n^{k-1}$，即$\mathrm{C}_n^k$随$k$的增加而增大；

由对称性知，当$k>\dfrac{n+1}{2}$时，$\mathrm{C}_n^k$随$k$的增加而减小.

当$n$为偶数时，中间的一项$\mathrm{C}_n^{\frac{n}{2}}$取得最大值；

当$n$为奇数时，中间的两项$\mathrm{C}_n^{\frac{n-1}{2}}$与$\mathrm{C}_n^{\frac{n+1}{2}}$相等，且同时取得最大值.

3. 各二项式系数的和

已知

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n,$$

令$x=1$，得

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n,$$

这就是说 $(a+b)^n$的展开式的各二项式系数的和等于$2^n$

## 四、典例分析

例1 求证：在$(a+b)^n$的展开式中，奇数项的二项式系数的和等于偶数项的二项式系数的和.

分析：奇数项的二项式的系数和为

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots,$$

偶数项的二项式的系数和为

$$C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots,$$

由于

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n$$

中的$a$，$b$ 可以取任意实数，因此我们可以通过对$a$，$b$适当赋值来得到上述两个系数和。