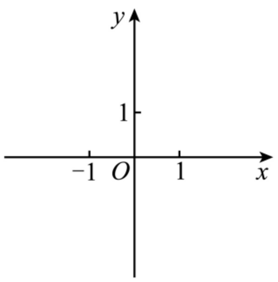
10.二次函数综合题

1.（2024·上海奉贤二模24）如图，在直角坐标平面xOy中，抛物线$y=ax^2-2ax+c$与x轴交于点A、B，与y轴正半轴交于点C，顶点为P，点A坐标为$(-1,0)$.



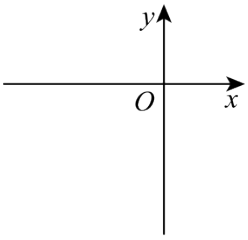
（1）写出这条抛物线的开口方向，并求顶点P的坐标（用a的代数式表示）；

（2）将抛物线向下平移后经过点$(0,1)$，顶点P平移至P'．如果锐角$\angle CP'P$的正切值为$\frac{1}{2}$，求a的值；

（3）设抛物线对称轴与x轴交于点D，射线PC与x轴交于点E，如果$\angle EDC=\angle BPE$，求此抛物线的表达式.

2.（2024·上海虹口二模 24）新定义：已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$（其中 $abc\neq 0$），我们把抛物线 $y=cx^2+ax+b$ 称为 $y=ax^2+bx+c$ 的“轮换抛物线”．例如：抛物线 $y=2x^2+3x+1$ 的“轮换抛物线”为 $y=x^2+2x+3$．

已知抛物线 C_1： $y=4mx^2+\left(4m-5\right)x+m$ 的“轮换抛物线”为 C_2，抛物线 C_1、C_2 与 y 轴分别交于点 E、F，点 E 在点 F 的上方，抛物线 C_2 的顶点为 P．



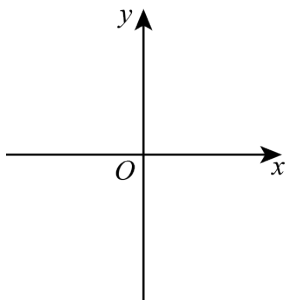
备用图

（1）如果点 E 的坐标为 $\left(0,1\right)$，求抛物线 C_2 的表达式；

（2）设抛物线 C_2 的对称轴与直线 $y=3x+8$ 相交于点 Q，如果四边形 $PQEF$ 为平行四边形，求点 E 的坐标；

（3）已知点 $M\left(-4,n\right)$ 在抛物线 C_2 上，点 N 坐标为 $\left(-2,-7\dfrac{1}{2}\right)$，当 $\triangle PMN \backsim \triangle PEF$ 时，求 m 的值．

3.（2024·上海黄浦二模 24）问题：已知抛物线 L： $y=x^2-2x$，抛物线 W 的顶点在抛物线 L 上（非抛物线 L 的顶点）且经过抛物线 L 的顶点．请求出一个满足条件的抛物线 W 的表达式．

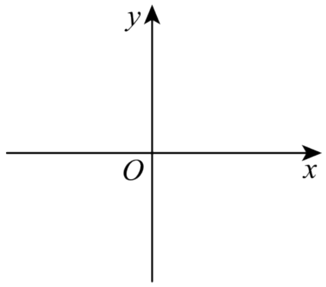


（1)解这个问题的思路如下：先在抛物线 L 上任取一点（非顶点），你所取的点是___①___；再将该点作为抛物线 W 的顶点，可设抛物线 W 的表达式是___②___；然后求出抛物线 L 的顶点是___③___；再将抛物线 L 的顶点代入所设抛物线 W 的表达式，求得其中待定系数的值为___④___；最后写出抛物线 W 的表达式是___⑤___．

（2）用同样的方法，你还可以获得其他满足条件的抛物线 W，请再写出一个抛物线 W 的表达式．

（3）如果问题中抛物线 L 和 W 在 x 轴上所截得的线段长相等，求抛物线 W 的表达式．

4.（2024·上海金山二模24）已知：抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 $A(3,0)$、$B(0,-3)$，顶点为 P.



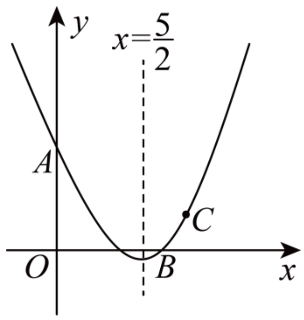
（1）求抛物线的解析式及顶点 P 的坐标；

（2）平移抛物线，使得平移后的抛物线顶点 Q 在直线 AB 上，且点 Q 在 y 轴右侧.

①若点 B 平移后得到的点 C 在 x 轴上，求此时抛物线的解析式；

②若平移后的抛物线与 y 轴相交于点 D，且 $\triangle BDQ$ 是直角三角形，求此时抛物线的解析式.

5.（2024·上海静安二模 24）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线关于直线 $x=\dfrac{5}{2}$ 对称，且经过点 $A(0,3)$ 和点 $B(3,0)$，横坐标为 4 的点 C 在此抛物线上．

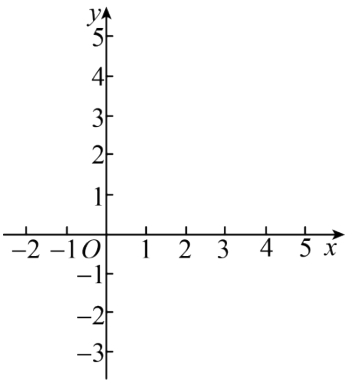


（1）求该抛物线的表达式；

（2）联结 AB、BC、AC，求 $\tan\angle BAC$ 的值；

（3）如果点 P 在对称轴右方的抛物线上，且 $\angle PAC=45°$，过点 P 作 $PQ\perp y$ 轴，垂足为 Q，请说明 $\angle APQ=\angle BAC$，并求点 P 的坐标．

6.（2024·上海闵行二模 24）在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 与 x 轴相交于 $A\left(-1,0\right)$、B 两点，且与 y 轴交于点 $C\left(0,-2\right)$.

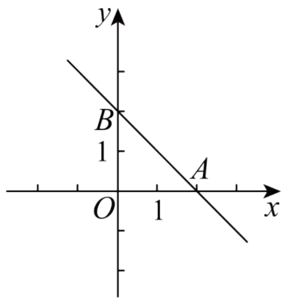


（1）求抛物线的表达式；

（2）如果点 D 是 x 正半轴上一点，$\angle ADC=2\angle ACO$，且四边形 $AQCD$ 是菱形，请直接写出点 D 和点 Q 的坐标（不需要说明理由）；

（3）由平面内不在同一直线上的一些线段首尾顺次连接所组成的封闭图形叫做多边形，对于平面内的一个多边形，画出它的任意一边所在的直线，如果其余各边都在这条直线的一侧，那么这个多边形叫做“凸多边形”：否则叫做“凹多边形”．如果点 E 是抛物线对称轴上的一个动点，纵坐标为 t，且四边形 $ACBE$ 是凹四边形（线段 AE 与线段 BC 不相交），求 t 的取值范围．

7. （2024·上海浦东二模 24）在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 $y=-x+2$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A、点 B，抛物线 $C_1: y=-x^2+bx+c$ 经过点 A、B 两点，顶点为点 C.



（1）求 b、c 的值；

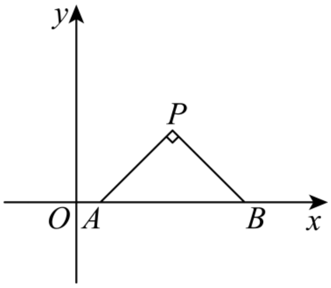
（2）如果点 D 在抛物线 C_1 的对称轴上，射线 AB 平分 $\angle CAD$，求点 D 的坐标；

（3）将抛物线 C_1 平移，使得新抛物线 C_2 的顶点 E 在射线 BA 上，抛物线 C_2 与 y 轴交于点 F，如果 $\triangle BEF$ 是等腰三角形，求抛物线 C_2 的表达式.

8.（2024·上海普陀二模 24）在平面直角坐标系 xOy 中（如图），已知抛物线

$y=a\left(x-m\right)^2+n\left(a\neq 0\right)$ 与 x 轴交于点 A 、B，抛物线的顶点 P 在第一象限，且

$\angle APB=90^{\circ}$.

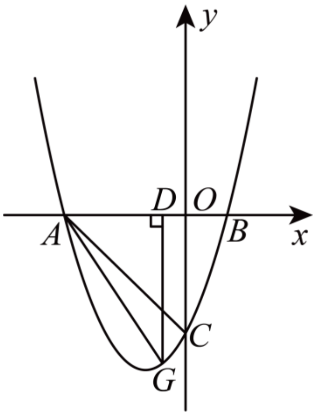


（1）当点 P 的坐标为 $\left(4,3\right)$ 时，求这个抛物线的表达式；

（2）抛物线 $y=a\left(x-m\right)^2+n\left(a\neq 0\right)$ 表达式中有三个待定系数，求待定系数 a 与 n 之间的数量关系；

（3）以点 P 为圆心，PA 为半径作 $\odot P$，$\odot P$ 与直线 $y=x+\dfrac{n}{2}$ 相交于点 M、N. 当点 P 在直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 上时，用含 a 的代数式表示 MN 的长.

9.（2024·上海青浦二模 24）在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx-3$ 的图像与 x 轴交于点 $A(-3,0)$ 和点 $B(1,0)$．与 y 轴交于点 C,D 是线段 OA 上一点．

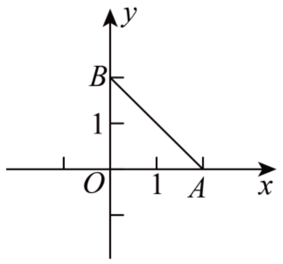


（1）求这条抛物线的表达式和点 C 的坐标；

（2）如图，过点 D 作 $DG\perp x$ 轴，交该抛物线于点 G，当 $\angle DGA=\angle DGC$ 时，求 $\triangle GAC$ 的面积；

（3）点 P 为该抛物线上第三象限内一点，当 $OD=1$，且 $\angle DCB+\angle PBC=45°$ 时，求点 P 的坐标．

10.（2024·上海松江二模 24）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(2,0)$、点 $B(0,2)$，抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 经过点A，且顶点 C 在线段 AB 上（与点A、B 不重合）.



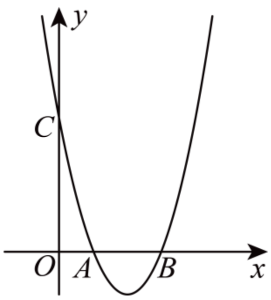
（1）求 b、c 的值；

（2）将抛物线向右平移 m（$m>0$）个单位，顶点落在点 P 处，新抛物线与原抛物线的对称轴交于点 D，连接 PD，交 x 轴于点 E.

①如果 $m=2$，求 $\triangle ODP$ 的面积；

②如果 $EC=EP$，求 m 的值.

11.（2024·上海徐汇二模 24） 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2-4ax+4(a>0)$ 与 x 轴交于点 $A(1,0)$ 和点 B，与 y 轴交于点 C.



（1）求该抛物线的表达式及点 B 的坐标；

（2）已知点 $M(0,m)$，联结 BC，过点 M 作 $MG\perp BC$，垂足为 G，点 D 是 x 轴上的动点，分别联结 GD 、 MD，以 GD 、 MD 为边作平行四边形 $GDMN$.

① 当 $m=\dfrac{3}{2}$ 时，且▱$GDMN$ 的顶点 N 正好落在 y 轴上，求点 D 的坐标；

② 当 $m\geq 0$ 时，且点 D 在运动过程中存在唯一的位置，使得▱$GDMN$ 是矩形，求 m 的值.

12.（2024·上海杨浦二模 24）定义：我们把平面内经过已知直线外一点并且与这条直线相切的圆叫做这个点与已知直线的点切圆．如图 1，已知直线 l 外有一点 H，圆 Q 经过点 H 且与直线 l 相切，则称圆 Q 是点 H 与直线 l 的点切圆．阅读以上材料，解决问题：

已知直线 OA 外有一点 P， $PA \perp OA$， $OA = 4$， $AP = 2$，圆 M 是点 P 与直线 OA 的点切圆．

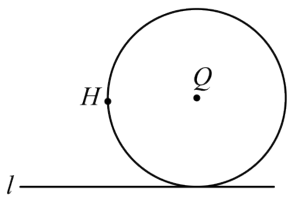


图1

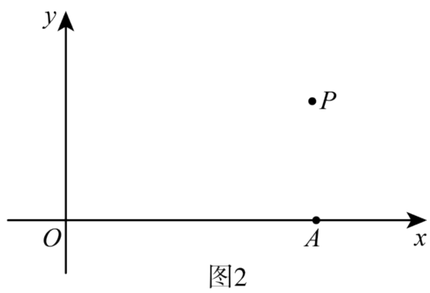


图2

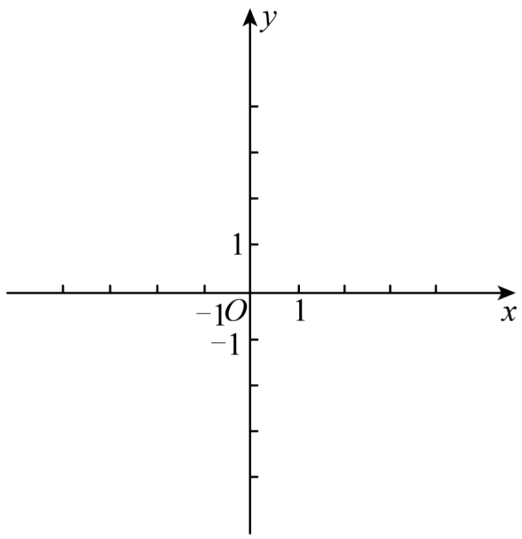
（1）如果圆心 M 在线段 OP 上，那么圆 M 的半径长是_____（直接写出答案）．

（2）如图 2，以 O 为坐标原点、OA 为 x 轴的正半轴建立平面直角坐标系 xOy，点 P 在第一象限，设圆心 M 的坐标是 $\left(x, y\right)$．

①求 y 关于 x 的函数解析式；

②点 B 是①中所求函数图象上的一点，连接 BP 并延长交此函数图象于另一点 C．如果 $CP : BP = 1 : 4$，求点 B 的坐标．

13.（2024·上海嘉定二模 24）在平面直角坐标系 xOy（如图）中，已知抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 经过点 $A(1,0)$、$B(-2,3)$ 两点，与 y 轴的交点为 C 点，对称轴为直线 l．



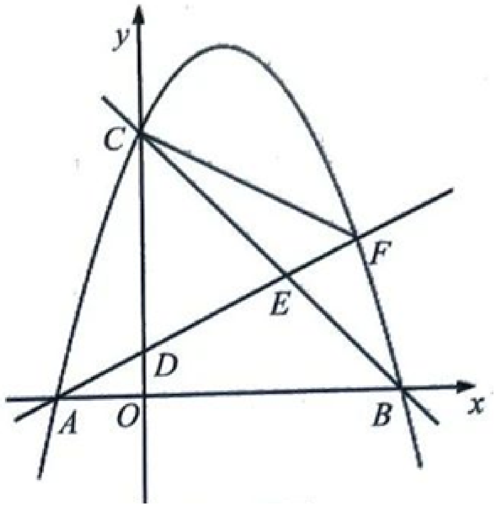
（1）求此抛物线的表达式；

（2）已知以点 C 为圆心，半径为 CB 的圆记作圆 C，以点 A 为圆心的圆记作圆 A，如果圆 A 与圆 C 外切，试判断对称轴直线 l 与圆 A 的位置关系，请说明理由；

（3）已知点 D 在 y 轴的正半轴上，且在点 C 的上方，如果 $\angle BDC=\angle BAC$，请求出点 D 的坐标．

14.（2024·上海长宁二模 24）（本题满分 12 分，第（1）小题 4 分，第（2）小题 8 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y=ax^2+2x+c$ 与 x 轴分别交于点 A、B（点 A 在点 B 左侧），与 y 轴交于点 $C(0,6)$，其对称轴为直线 $x=2$．



（1）求该抛物线的表达式；

（2）点 F 是上述抛物线上位于第一象限的一个动点，直线 AF 分别与 y 轴、线段 BC 交于点 D、E.

①当 $CF=DF$ 时，求 CD 的长；

②联结 AC，如果 $\triangle ACF$ 的面积是 $\triangle CDE$ 面积的 3 倍，求点 F 的坐标.

15.（2024·上海宝山二模 24）**（本题满分 12 分，第(1)小题满分 4 分, 第(2)小题满分 4 分，第(3)小题满分 4 分）**

在平面直角坐标系 xOy 中（如图 11），已知开口向下的抛物线 $y = ax^2 - 2x + 4$ 经过点 P（0，4），顶点为 A.

（1）求直线 PA 的表达式；

（2）如果将△POA 绕点 O 逆时针旋转 90°，点 A 落在抛物线上的点 Q 处，求抛物线的表达式；

（3）将（2）中得到的抛物线沿射线 PA 平移，平移后抛物线的顶点为 B，与 y 轴交于点 C. 如果 $PC = \sqrt{2}AB$，求 $\tan\angle PBC$ 的值.

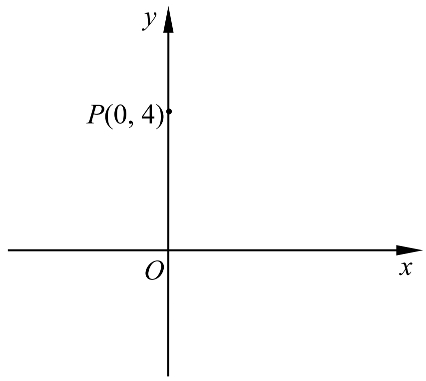


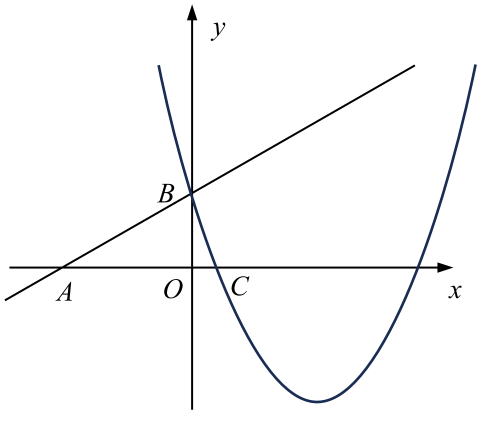
图 11

16.（2024·上海宝山二模 24）如图，已知在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$ 与 x 轴相交于点 A，与 y 轴相交于点 B，抛物线 $C_1: y=\frac{1}{3}x^2+bx+c$ 经过点 B 和点 $C(1,0)$，顶点为 D.

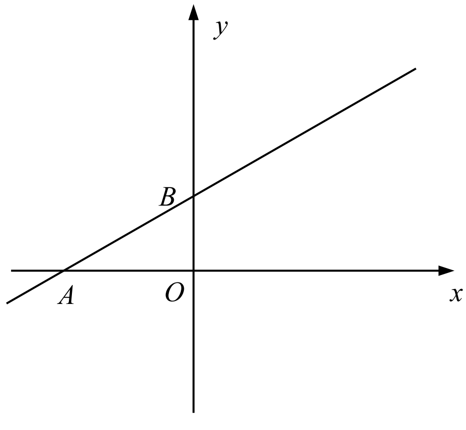
（1）求抛物线 C_1 的表达式及顶点 D 的坐标；

（2）设抛物线与 x 轴的另一个交点为 E，若点 P 在 y 轴上，当 $\angle PED=90°$ 时，求点 P 的坐标；

（3）将抛物线 C_1 平移，得到抛物线 C_2．平移后抛物线 C_1 的顶点 D 落在 x 轴上的点 M 处，将 $\triangle MAB$ 沿直线 AB 翻折，得到 $\triangle QAB$，如果点 Q 恰好落在抛物线 C_2 的图像上，求平移后的抛物线 C_2 的表达式.



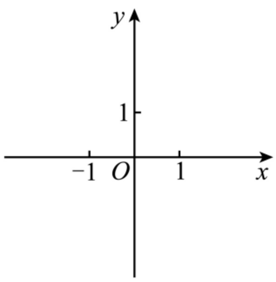
第 24 题图



备用图

10.二次函数综合题

1.（2024·上海奉贤二模24）如图，在直角坐标平面 xOy 中，抛物线 $y=ax^2-2ax+c$ 与 x 轴交于点A、B，与 y 轴正半轴交于点 C，顶点为 P，点A坐标为 $(-1,0)$．



（1）写出这条抛物线的开口方向，并求顶点 P 的坐标（用 a 的代数式表示）；

（2）将抛物线向下平移后经过点 $(0,1)$，顶点 P 平移至 P'．如果锐角 $\angle CP'P$ 的正切值为 $\frac{1}{2}$，求 a 的值；

（3）设抛物线对称轴与 x 轴交于点 D，射线 PC 与 x 轴交于点 E，如果 $\angle EDC=\angle BPE$，求此抛物线的表达式.

【答案】（1）抛物线开口向下，$P(1,-4a)$

（2）$a=-\frac{3}{2}$

（3）$y=-x^2+2x+3$

【分析】本题考查了二次函数的综合应用，角度问题，正切的定义，相似三角形的性质与判定；

（1）将点 $(-1,0)$ 代入解析式可得 $c=-3a$，根据抛物线与 y 轴正半轴交于点 C，得出 $a<0$，即抛物线开口向下，然后化为顶点式求得顶点坐标，即可求解；

（2）过点 C 作 $CH\perp PP'$ 于点 H，设向下平移 m 个单位 $m>0$，平移后的抛物线为 $y=a(x-1)^2-4a-m$，根据题意得出 $P'H=2$，得出 $-3a-2=-4a-m$，点 $(0,1)$ 代入 $y=a(x-1)^2-4a-m$，得出 $a-4a-m=1$，联立解方程组，即可求解；

（3）根据题意可得 $\triangle EDC\backsim\triangle EPB$ 则 $\frac{ED}{EP}=\frac{EC}{EB}$，根据题意得出直线 PC 的解析式为

$y=-ax-3a$，进而得出 $E(-3,0)$，由抛物线对称轴与 x 轴交于点 D，得出 $D(1,0)$，则 $ED=4, EB=6$，勾股定理可得 CE, PE，进而代入比例式，即可求解．

【小问 1 详解】

解：∵抛物线 $y=ax^2-2ax+c$ 与 x 轴交于点 $(-1,0)$

∴ $a+2a+c=0$

∴ $c=-3a$

∵抛物线与 y 轴正半轴交于点 C，

∴ $-3a>0$

∴ $a<0$

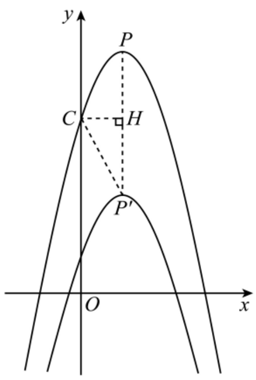
∴抛物线开口向下，

∴抛物线解析式为 $y=ax^2-2ax-3a=a(x-1)^2-4a$

∴ $P(1,-4a)$

【小问 2 详解】

解：如图所示，过点 C 作 $CH\perp PP'$ 于点 H，



设向下平移 m 个单位 $m>0$，平移后的抛物线为 $y=a(x-1)^2-4a-m$

∵ $P(1,-4a)$，锐角 $\angle CP'P$ 的正切值为 $\frac{1}{2}$，

∴ $CH=1$，则 $P'H=2$， $P'(1,-4a-m)$

∴ $-3a-2=-4a-m$ ①

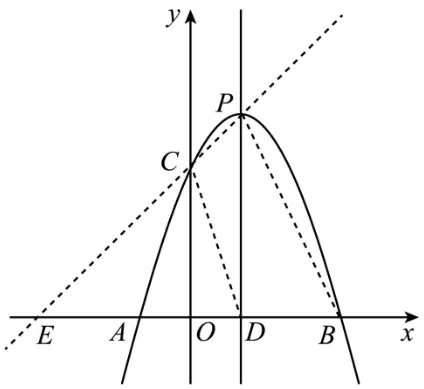
将点 $(0,1)$ 代入 $y=a(x-1)^2-4a-m$

$a-4a-m=1$ ②

联立①②得$\begin{cases} m=\dfrac{7}{2} \\ a=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$

【小问 3 详解】

解：如图所示



$\because y=ax^2-2ax-3a=a(x+1)(x-3)$

当 $y=0$ 时，$x_1=-1, x_2=3$

$\therefore B(3,0)$

$\because C(0,-3a)$，$P(1,-4a)$

设直线 PC 的解析式为 $y=kx+t$

$\therefore \begin{cases} t=-3a \\ k+t=-4a \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} k=-a \\ t=-3a \end{cases}$

$\therefore$ 直线 PC 的解析式为 $y=-ax-3a$，

当 $y=0$ 时，$x=-3$

$\therefore E(-3,0)$

$\because$ 抛物线对称轴与 x 轴交于点 D，

$\therefore D(1,0)$

$\therefore ED=4, EB=6$，

勾股定理可得 $CE=\sqrt{CO^2+EO^2}=\sqrt{9+9a^2}=3\sqrt{1+a^2}$，

$PE=\sqrt{ED^2+PD^2}=\sqrt{16+16a^2}=4\sqrt{1+a^2}$

∵ $\angle CED=\angle BEP$， $\angle EDC=\angle BPE$

∴ $\triangle EDC\backsim\triangle EPB$

∴ $\dfrac{ED}{EP}=\dfrac{EC}{EB}$

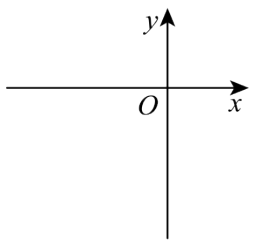
∴ $\dfrac{4}{4\sqrt{1+a^2}}=\dfrac{3\sqrt{1+a^2}}{6}$

解得： $a=-1$（正值舍去）

∴抛物线解析式为 $y=-x^2+2x+3$．

2.（2024·上海虹口二模 24）新定义：已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$（其中 $abc\neq 0$），我们把抛物线 $y=cx^2+ax+b$ 称为 $y=ax^2+bx+c$ 的“轮换抛物线”．例如：抛物线 $y=2x^2+3x+1$ 的“轮换抛物线”为 $y=x^2+2x+3$．

已知抛物线 C_1： $y=4mx^2+(4m-5)x+m$ 的“轮换抛物线”为 C_2，抛物线 C_1、C_2 与 y 轴分别交于点 E、F，点 E 在点 F 的上方，抛物线 C_2 的顶点为 P．



备用图

（1）如果点 E 的坐标为 $(0,1)$，求抛物线 C_2 的表达式；

（2）设抛物线 C_2 的对称轴与直线 $y=3x+8$ 相交于点 Q，如果四边形 $PQEF$ 为平行四边形，求点 E 的坐标；

（3）已知点 $M(-4,n)$ 在抛物线 C_2 上，点 N 坐标为 $\left(-2,-7\dfrac{1}{2}\right)$，当 $\triangle PMN\backsim\triangle PEF$ 时，求 m 的值．

【答案】（1） $y=x^2+4x-1$　　（2） $E\left(0,-\dfrac{2}{3}\right)$　　（3） $m=-1$ 或 $\dfrac{17}{32}$

【分析】本题考查的是二次函数综合题，重点考查二次函数的性质、平行四边形性质及相似三角形性质，

（1）将点 $E(0,1)$ 代入表达式，求出 m 的值，根据“轮换抛物线”定义写出即可；

（2）根据轮换抛物线定义得出抛物线 C_2 表达式及点 E、F 坐标，并求出 P、Q 坐标，根据平行四边形性质得出 $PQ=EF$ 列方程并解出 m 值，进而解决问题；

（3）先求 $M(-4,4m-5)$，结合求出的点 P、E、F 坐标得出 PN^2 及 PF^2，根据相似三角形性质得出关于 m 的方程，解方程即可解决.

【小问 1 详解】

解：抛物线 C_1：$y=4mx^2+(4m-5)x+m$ 与 y 轴交于点 E 坐标为 $(0,1)$，

当 $x=0$，$y=1$ 代入，得 $m=1$，

\ $4m-5=-1$，

$\therefore$ 抛物线 C_1 表达式为 $y=4x^2-x+1$，

$\therefore$ 抛物线 C_1 的“轮换抛物线”为 C_2 表达式为 $y=x^2+4x-1$；

【小问 2 详解】

解：抛物线 C_1：$y=4mx^2+(4m-5)x+m$，

当 $x=0$ 时，$y=m$，即与 y 轴交点为 $E(0,m)$，

Q 抛物线 C_1：$y=4mx^2+(4m-5)x+m$ 的“轮换抛物线”为 C_2，

$\therefore$ 抛物线 C_2 表达式为 $y=mx^2+4mx+(4m-5)$，

同理抛物线 C_2 与 y 轴交点为 $F(0,4m-5)$，

抛物线 C_2 对称轴为直线 $x=-\dfrac{4m}{2m}=-2$，

当 $x=-2$ 时，$y=-5$，

$\therefore$ 抛物线 C_2 的顶点坐标为 $P(-2,-5)$，

当 $x=-2$ 时，$y=3x+8=2$，

$\therefore$ 抛物线 C_2 的对称轴与直线 $y=3x+8$ 交点 $Q(-2,2)$，

$\because$点E在点F的上方，

$\therefore m > 4m - 5$，

解得：$m < \dfrac{5}{3}$，

$\therefore EF = m - (4m - 5) = 5 - 3m$，

$\because$四边形$PQEF$为平行四边形，

$\therefore PQ = EF$，即$2 - (-5) = 5 - 3m$，

解得：$m = -\dfrac{2}{3}$，

$\therefore E\left(0, -\dfrac{2}{3}\right)$；

【小问 3 详解】

解：$\because$点$M(-4, n)$在抛物线C_2上，

当$x = -4$时，$y = mx^2 + 4mx + (4m - 5) = 4m - 5$，即$M(-4, 4m - 5)$，

$\because$点N坐标为$\left(-2, -7\dfrac{1}{2}\right)$，$P(-2, -5)$，$E(0, m)$，$F(0, 4m - 5)$，

$\therefore PN^2 = (-2 + 2)^2 + \left(-5 + 7\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$，$PF^2 = (-2)^2 + (4m - 5 + 5)^2 = 4 + 16m^2$，

$\because S_{\triangle PEF} = \dfrac{1}{2}EF \cdot |x_P| = \dfrac{1}{2}(5 - 3m) \times 2 = 5 - 3m$，

$S_{\triangle PMN} = \dfrac{1}{2}PN \cdot |x_M - x_P| = \dfrac{1}{2} \times \left(-5 + 7\dfrac{1}{2}\right) \times (-2 + 4) = \dfrac{5}{2}$，

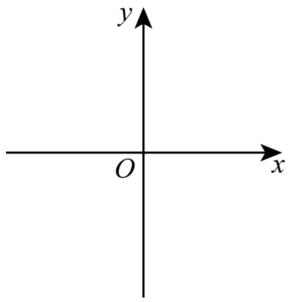
$\because \triangle PMN \backsim \triangle PEF$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle PEF}}{S_{\triangle PMN}} = \left(\dfrac{PF}{PN}\right)^2 = \dfrac{PF^2}{PN^2}$

$\therefore \dfrac{5 - 3m}{\frac{5}{2}} = \dfrac{4 + 16m^2}{\frac{25}{4}}$，

解得：$m_1 = -1, m_2 = \dfrac{17}{32}$.

3.（2024·上海黄浦二模 24）问题：已知抛物线 L：$y=x^2-2x$，抛物线 W 的顶点在抛物线 L 上（非抛物线 L 的顶点）且经过抛物线 L 的顶点．请求出一个满足条件的抛物线 W 的表达式．



（1）解这个问题的思路如下：先在抛物线 L 上任取一点（非顶点），你所取的点是____①____；再将该点作为抛物线 W 的顶点，可设抛物线 W 的表达式是____②____；然后求出抛物线 L 的顶点是____③____；再将抛物线 L 的顶点代入所设抛物线 W 的表达式，求得其中待定系数的值为____④____；最后写出抛物线 W 的表达式是____⑤____．

（2）用同样的方法，你还可以获得其他满足条件的抛物线 W，请再写出一个抛物线 W 的表达式．

（3）如果问题中抛物线 L 和 W 在 x 轴上所截得的线段长相等，求抛物线 W 的表达式．

【答案】（1）$y=-x^2$　　（2）$y=-(x-2)^2$

（3）$y=-\left(x-\sqrt{2}-1\right)^2+1$ 或 $y=-\left(x+\sqrt{2}-1\right)^2+1$

【分析】本题考查二次函数的图像和性质，掌握待定系数法求函数解析式是解题的关键．

（1）根据题目所给方法，给定顶点坐标为 $(0,0)$ 计算即可解题；

（2）仿照（1）中的方法，给定坐标为 $(2,0)$ 计算即可解题；

（3）抛物线 W 的顶点坐标为 $\left(m,m^2-2m\right)(m\neq 1)$，把抛物线 L 的顶点是 $(1,-1)$ 代入求出 a 的值，然后再根据抛物线 L 和 W 在 x 轴上所截得的线段长相等得到抛物线 M 过 $(m+1,0)$，代入得 $-1+m^2-2m=0$，求出 m 值，即可得到解析式．

【小问 1 详解】

先在抛物线 L 上任取一点（非顶点），你所取的点是 $(0,0)$；再将该点作为抛物线 W 的顶点，可设抛物线 W 的表达式是 $y=ax^2$；然后求出抛物线 L 的顶点是 $(1,-1)$；再将抛物线 L

的顶点代入所设抛物线 W 的表达式，求得其中待定系数的值为 $a=-1$；最后写出抛物线 W 的表达式是 $y=-x^2$.

【小问 2 详解】

解： $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$，

∴抛物线 L 的顶点是 $(1,-1)$，

取抛物线 W 的顶点坐标为 $(2,0)$，

设抛物线 W 的解析式为 $y=a(x-2)^2$，把 $(1,-1)$ 代入得： $a=-1$，

∴抛物线 W 的解析式为 $y=-(x-2)^2$；

【小问 3 详解】

解：令 $y=0$，则 $x^2-2x=0$，解得： $x_1=0$， $x_2=2$，

∴抛物线 L 在 x 轴上所截得的线段长为 2，

设抛物线 W 的顶点坐标为 $(m,m^2-2m)(m\neq 1)$，

设解析式为 $y=a(x-m)^2+m^2-2m$，把 $(1,-1)$ 代入得： $a(m-1)^2+m^2-2m=-1$，

整理得 $(a+1)(m-1)^2=0$，即 $a=-1$，

∴ $y=-(x-m)^2+m^2-2m$，

又∵抛物线 L 和 W 在 x 轴上所截得的线段长相等，

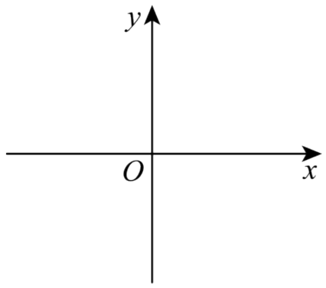
∴抛物线 M 在 x 轴上所截得的线段长为 2，

∴抛物线 M 过 $(m+1,0)$，代入得 $-1+m^2-2m=0$，

解得： $m=\sqrt{2}+1$ 或 $m=-\sqrt{2}+1$，

∴抛物线的解析式为 $y=-\left(x-\sqrt{2}-1\right)^2+1$ 或 $y=-\left(x+\sqrt{2}-1\right)^2+1$.

4.（2024·上海金山二模 24）已知：抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 $A(3,0)$、$B(0,-3)$，顶点为 P.



（1）求抛物线的解析式及顶点 P 的坐标；

（2）平移抛物线，使得平移后的抛物线顶点 Q 在直线 AB 上，且点 Q 在 y 轴右侧．

①若点 B 平移后得到的点 C 在 x 轴上，求此时抛物线的解析式；

②若平移后的抛物线与 y 轴相交于点 D，且 $\triangle BDQ$ 是直角三角形，求此时抛物线的解析式．

【答案】（1）$y=x^2-2x-3$，顶点 P 的坐标是 $(1,-4)$

（2）① $y=x^2-4x+3$；② $y=x^2-2x-1$

【分析】（1）把点 A 和点 B 的坐标代入二次函数的解析式，用待定系数法求解即可；

（2）①先求直线 AB 的解析式，设 Q 点的坐标是 $(t,t-3)$，再根据抛物线平称的规律求解即可；

②抛物线与 y 轴的交点是 D（0，t^2+t-3），分两种情况：$\angle BDQ=90°$ 或 $\angle BQD=90°$，根据等腰直角三角形的性质求解即可．

【小问 1 详解】

由题意得：$\begin{cases}9+3b+c=0\\c=-3\end{cases}$，

$\therefore b=-2,c=-3$，抛物线的解析式为 $y=x^2-2x-3$，

$y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，顶点 P 的坐标是 $(1,-4)$．

【小问 2 详解】

①设直线 AB 的解析式是 $y=mx+n$，

$\therefore \begin{cases}3m+n=0\\n=-3\end{cases}$，

$\therefore m=1,n=-3$，

∴直线 AB 的解析式是 $y=x-3$，

设 Q 点的坐标是 $(t,t-3)$，其中 $t>0$，此时抛物线的解析式是 $y=(x-t)^2+t-3$，

∵点 B 平移后得到的点 C 在 x 轴上，

∴抛物线向上平移了 3 个单位，

∴$t-3=-1$，即 $t=2$，

∴此时抛物线的解析式是 $y=(x-2)^2+2-3$，即 $y=x^2-4x+3$.

②抛物线 $y=(x-t)^2+t-3$，与 y 轴的交点是 D（0，t^2+t-3），

如果 $\angle BDQ=90°$，即 $DQ\perp y$ 轴不合题意，

如果 $\angle BQD=90°$，

∵ $\angle AOB=90°$，$AO=BO$，

∴ $\angle OAB=\angle OBA=45°$，

∴ $\angle QBD=\angle BDQ=45°$，

∴ $QB=QD$，

作 $QE\perp y$ 轴，则 $BE=DE$，

∴ $QE=\frac{1}{2}BD$，

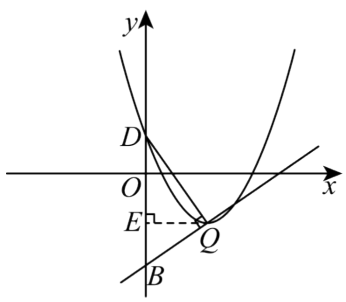
∵ $QE=t$，$BD=t^2+t$，

∴ $t=\frac{1}{2}(t^2+t)$，

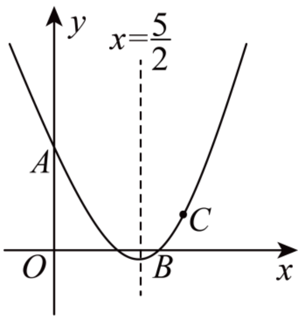
解得 $t_1=0$（不合题意，舍去）或 $t_2=1$，

∴ $t=1$，

此时抛物线的解析式是 $y=(x-1)^2+1-3$，即 $y=x^2-2x-1$.



5.（2024·上海静安二模 24）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线关于直线 $x=\frac{5}{2}$ 对称，且经过点 $A(0,3)$ 和点 $B(3,0)$，横坐标为 4 的点 C 在此抛物线上.



（1）求该抛物线的表达式；

（2）联结 AB、BC、AC，求 $\tan\angle BAC$ 的值；

（3）如果点 P 在对称轴右方的抛物线上，且 $\angle PAC=45°$，过点 P 作 $PQ\perp y$ 轴，垂足为 Q，请说明 $\angle APQ=\angle BAC$，并求点 P 的坐标.

【答案】（1）该抛物线的表达式为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+3$；

（2）$\tan\angle BAC=\frac{1}{3}$　　（3）点 P 的坐标为 $\left(\frac{17}{3},\frac{44}{9}\right)$.

【分析】（1）运用待定系数法求解；

（2）先证得 VAOB 是等腰直角三角形，可得 $\angle ABO=45°$，$AB=\sqrt{2}OA=3\sqrt{2}$，过点 C 作 $CE\perp x$ 轴于 E，则 $\angle BEC=90°$，$CE=1$，$OE=4$，进而证得 VBCE 是等腰直角三角形，可得 $\angle CBE=45°$，$BC=\sqrt{2}CE=\sqrt{2}$，推出 $\angle ABC=90°$，再运用三角函数定义即可求得答案；

（3）连接 AB，先证得 $\angle APQ=\angle BAC$，得出 $\tan\angle APQ=\tan\angle BAC=\frac{1}{3}$，即 $\frac{AQ}{PQ}=\frac{1}{3}$，设 $PQ=m$，则 $AQ=\frac{1}{3}m$，可得 $OQ=3+\frac{1}{3}m$，得出 $P\left(m,3+\frac{1}{3}m\right)$，代入抛物线解析式求得 $m=\frac{17}{3}$，即可求得答案.

【小问 1 详解】

解：Q 抛物线关于直线 $x=\frac{5}{2}$ 对称，

$\therefore$ 设抛物线的解析式为 $y=a\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+k$，把 $A(0,3)$、$B(3,0)$ 代入，

得：$\begin{cases}\dfrac{25}{4}a+k=3\\ \dfrac{1}{4}a+k=0\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ k=-\dfrac{1}{8}\end{cases}$，

$\therefore y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{2}x+3$，

$\therefore$ 该抛物线的表达式为 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{2}x+3$；

【小问 2 详解】

解：在 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{2}x+3$ 中，令 $x=4$，得 $y=\dfrac{1}{2}\times 4^2-\dfrac{5}{2}\times 4+3=1$，

$\therefore C(4,1)$，

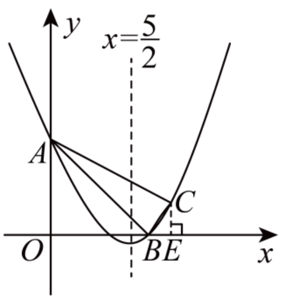
Q $A(0,3)$、$B(3,0)$，

$\therefore OA=OB=3$，

$\therefore$VAOB 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle ABO=45^\circ$， $AB=\sqrt{2}OA=3\sqrt{2}$，

如图，过点 C 作 $CE\perp x$ 轴于 E，则 $\angle BEC=90^\circ$， $CE=1$， $OE=4$，



$\therefore BE=OE-OB=4-3=1$，

$\therefore BE=CE$，

$\therefore \triangle BCE$ 是等腰直角三角形，

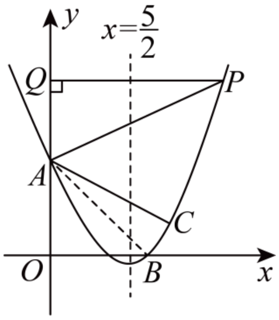
$\therefore \angle CBE=45^\circ$， $BC=\sqrt{2}CE=\sqrt{2}$，

$\therefore \angle ABC=180^\circ-\angle ABO-\angle CBE=90^\circ$，

$\therefore \tan\angle BAC=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{3}$；

【小问 3 详解】

证明：如图，连接 AB，



由（2）知 $\triangle AOB$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle BAO=45^\circ$，

$\because \angle PAC=45^\circ$，

$\therefore \angle PAQ+\angle BAC=180^\circ-\angle BAO-\angle PAC=90^\circ$，

$\because PQ\perp y$ 轴，

$\therefore \angle PQA=90^\circ$，

$\therefore \angle PAQ+\angle APQ=90^\circ$，

$\therefore \angle APQ=\angle BAC$，

$\therefore \tan\angle APQ=\tan\angle BAC=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore \dfrac{AQ}{PQ}=\dfrac{1}{3}$，

设 $PQ=m$，则 $AQ=\dfrac{1}{3}m$，

$\therefore OQ=OA+AQ=3+\dfrac{1}{3}m$，

$\therefore P\left(m,3+\dfrac{1}{3}m\right)$，

$\because$ 点 P 在对称轴右方的抛物线上，

$\therefore 3+\dfrac{1}{3}m=\dfrac{1}{2}m^2-\dfrac{5}{2}m+3$，且 $m>\dfrac{5}{2}$，

解得：$m=\dfrac{17}{3}$，