2024 中考数学新定义及探究题专题 《圆与新定义》 （学生版）

通用的解题思路：

①对于圆中角度之间的等量关系，主要是两个方面：一是同弧或者等弧所对的圆周角相等，同弧或者等弧所对的圆心角是圆周角的两倍，二是圆内接四边形中外角等于内角的对角。

②对于求圆中的线段长度，主要从两个方向着手，首先看是否可以用垂径定理构建直角三角形，用勾股定理来求线段的长度；如果勾股定理行不通，则尝试着去找相似三角形，用相似三角形的对应线段成比例来求线段的长度。

经典例题

1．（长沙中考）我们不妨约定：对角线互相垂直的凸四边形叫做“十字形”．

（1）①在“平行四边形，矩形，菱形，正方形”中，一定是“十字形”的有_____；

②在凸四边形 ABCD 中，AB=AD 且 CB≠CD，则该四边形_____“十字形”．（填“是”或“不是”）

（2）如图 1，A，B，C，D 是半径为 1 的⊙O 上按逆时针方向排列的四个动点，AC 与 BD 交于点 E，∠ADB﹣∠CDB=∠ABD﹣∠CBD，当 $6\le AC^2+BD^2\le 7$ 时，求 OE 的取值范围；

（3）如图 2，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数，a＞0，c＜0）与 x 轴交于 A，C 两点（点 A 在点 C 的左侧），B 是抛物线与 y 轴的交点，点 D 的坐标为（0，﹣ac），记“十字形”ABCD 的面积为 S，记△AOB，△COD，△AOD，△BOC 的面积分别为 S_1，S_2，S_3，S_4．求同时满足下列三个条件的抛物线的解析式；

①$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$；②$\sqrt{S}\sqrt{S}=\sqrt{S_3}+\sqrt{S_4}$；③“十字形”ABCD 的周长为 $12\sqrt{10}$．

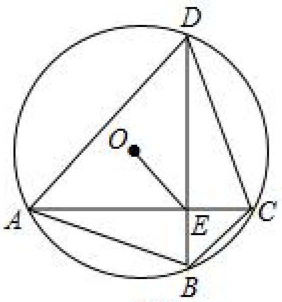


图1

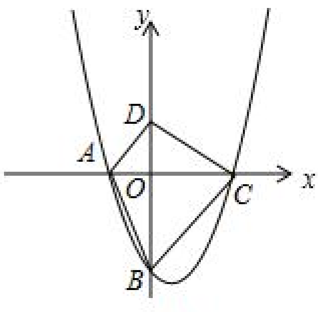


图2

2.（一中）定义:三角形一边上的点将该边分为两条线段，且这两条线段的积等于这个点到该边所对顶点连线的平方，则称这个点为三角形该边的“好点”.如图 1，△ABC 中，点 D 是 BC 边上一点，连结 AD，若 $AD^2 = BD \cdot CD$，则称点 D 是△ABC 中 BC 边上的“好点”.

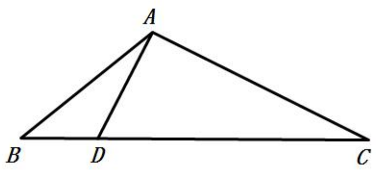
（1）如图 2，△ABC 的顶点是 4×3 网格图的格点，请仅用直尺画出 AB 边上的一个“好点”.

（2）△ABC 中，BC=9，$\tan B = \frac{4}{3}$，$\tan C = \frac{2}{3}$，点 D 是 BC 边上的“好点”，求线段 BD 的长.

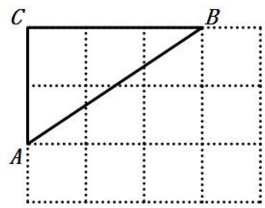
（3）如图 3，△ABC 是 O 的内接三角形，OH⊥AB 于点 H，连结 CH 并延长交 O 于点 D.

①求证：点 H 是△BCD 中 CD 边上的“好点”.

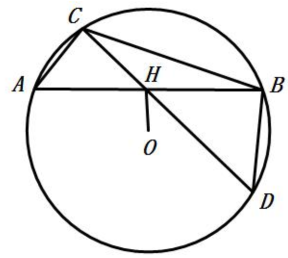
②若 O 的半径为 9，∠ABD=90°，OH=6，请直接写出 $\frac{CH}{DH}$ 的值.



(图1)



(图2)



(图3)

3．（青竹湖）我们不妨定义：有两边之比为 1：$\sqrt{3}$ 的三角形叫敬“勤业三角形”.

(1)下列各三角形中，一定是“勤业三角形”的是________；（填序号）

①等边三角形；②等腰直角三角形；③含 30° 角的直角三角形；④含120° 角的等腰三角形.

(2)如图 1，$\triangle ABC$ 是$\odot O$ 的内接三角形，AC 为直径，D 为 AB 上一点，且 $BD=2AD$，作 $DE \perp OA$，交线段 OA 于点 F，交$\odot O$ 于点 E，连接 BE 交 AC 于点 G．试判断$\triangle AED$ 和$\triangle ABE$ 是否是“勤业三角形”？如果是，请给出证明，并求出 $\dfrac{ED}{BE}$ 的值；如果不是，请说明理由；

(3)如图 2，在（2）的条件下，当 AF：FG＝2：3 时，求 $\angle BED$ 的余弦值.

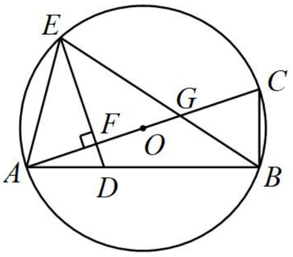


图 1

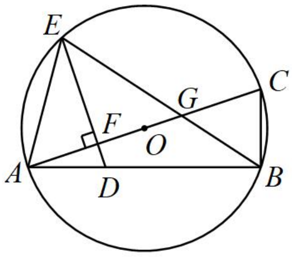


图 2

4．（华益）约定：若三角形一边上的中线将三角形分得的两个小三角形中有一个三角形与原三角形相似，我们则称原三角形为关于该边的"华益美三角"．例如，如图 1，在 ABC 中，AD 为边 BC 上的中线，$\triangle ABD$ 与 ABC 相似，那么称 ABC 为关于边 BC 的"华益美三角"．

(1)如图 2，在 ABC 中，$BC=\sqrt{2}AB$，求证：ABC 为关于边 BC 的"华益美三角"；

(2)如图 3，已知 ABC 为关于边 BC 的"华益美三角"，点 D 是 ABC 边 BC 的中点，以 BD 为直径的⊙O 恰好经过点 A．

①求证：直线 CA 与 O 相切；

②若 O 的直径为 $2\sqrt{6}$，求线段 AB 的长；

(3) 已知 ABC 为关于边 BC 的"华益美三角"，$BC=4$，$\angle B=30°$，求 ABC 的面积．

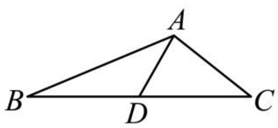


图1

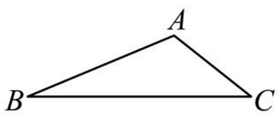


图2

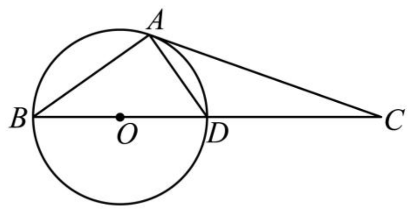


图3

5．（华益）约定：三角形的一条中线将三角形分成两个小三角形，如果其中的一个小三角形与原三角形相似，那么称原三角形为“华益三角”，这条中线叫做原三角形的“华益中线”，这条中线所在的边叫做“华益边”，原三角形与小三角形的相似比叫做“华益比”．

(1)如图 1，已知CD是 ABC边AB上的中线，若 $ABC\backsim ACD$，那么 ABC就是“华益三角”，中线CD是 ABC的“华益中线”，边AB就是 ABC的“华益边”．爱思考的你们一定能发现：“华益三角”的“华益比”总是一个定值，以图 1 为例，求出“华益比”；

(2)如图 2，已知在 ABC中，$AB=\sqrt{2},\angle A=45°,AC=\sqrt{3}+1$，求证： ABC是“华益三角”；

(3)如图 3，已知 ABC是“华益三角”，边AB是 ABC的“华益边”， ABC的外接圆 O的半径是 2．

①若$\angle A$是一个锐角，求$\dfrac{BC}{\sin A}$的值；

②记$AB=2x,BC=\sqrt{2}y$，若$x=1$，求y的值．

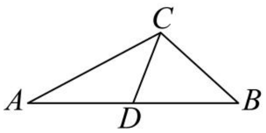


图1

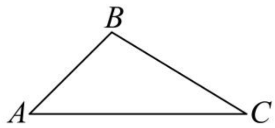


图2

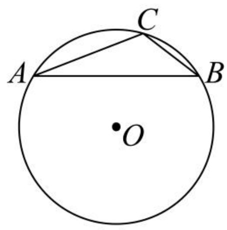


图3

6．（北雅）如图 1，⊙O 的半径为 r（$r>0$），若点 P' 在射线 OP 上，满足 $OP'\cdot OP=r^2$，则称点 P' 是点 P 关于⊙O 的“反演点”．

(1)若点 A 关于⊙O 的“反演点”是本身，那么点 A 与⊙O 的位置关系为（　　）

A．点 A 在⊙O 内　　B．点 A 在⊙O 上　　C．点 A 在⊙O 外

(2)如图 1，若⊙O 的半径为 4，点 P' 是点 P 关于⊙O 的“反演点”，且 $PP'=6$，过点 P 的直线与⊙O 相切于点 Q，求 PQ 长．

(3)如图 2，若⊙O 的半径为 4，点 Q 在⊙O 上，点 A 在⊙O 内，且 $OA=2$，点 Q'、A' 分别是点 Q、A 关于⊙O 的“反演点”，过点 A' 作 $A'B\perp A'O$ 且 $A'B=A'O$，连接 BQ'，$Q'A'$，求 $BQ'+\frac{1}{2}Q'A'$ 的最小值．

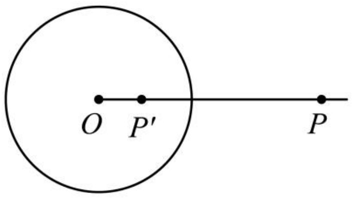


图1

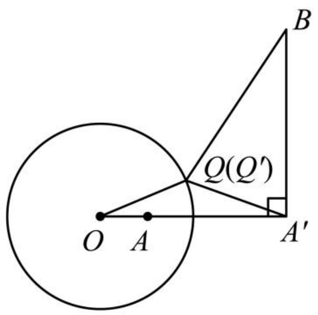


图2

7.（青竹湖）定义：两个角对应互余，且这两个角的夹边对应相等的两个三角形叫做“青竹三角形”．如图1，在$\triangle ABC$和DEF中，若$\angle A+\angle E=\angle B+\angle D=90°$，且$AB=DE$，则$\triangle ABC$和$DEF$是“青竹三角形”．

$\therefore \angle BAC=\angle ACD=45°$

（1）以下四边形中，一定能被一条对角线分成两个“青竹三角形”的是_；（填序号）

①平行四边形；②矩形；③菱形；④正方形．

（2）如图2，$\triangle ABC$，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，点D是AB上任意一点（不与点A、B重合），设AD、BD、CD的长分别为a、b、c，请写出图中的一对“青竹三角形”，并用含a、b的式子来表示c^2；

（3）如图3，⊙O的半径为4，四边形$ABCD$是⊙O的内接四边形，且$\triangle ABC$和$\triangle ADC$是“青竹三角形”．

①求AD^2+BC^2的值；

②若$\angle BAC=\angle ACD$，$\angle ABC=75°$，求$\triangle ABC$和$\triangle ADC$的周长之差．

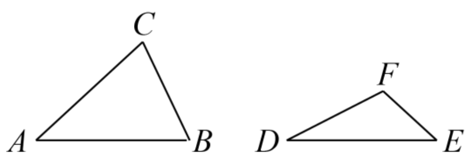


图1

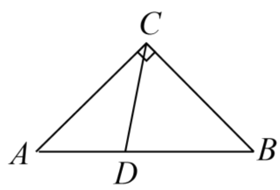


图2

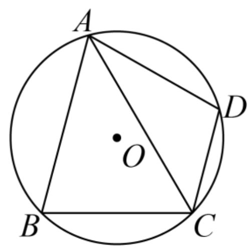


图3

8．（中雅）在平面直角坐标系 xOy 中，给出如下定义：若点 P 在图形 M 上，点 Q 在图形 N 上，称线段 PQ 长度的最小值为图形 M，N 的“雅近值”，记为 d（M，N），特别地，若图形 M，N 有公共点，规定 d（M，N）＝0．

(1)如图 1，⊙O 的半径为 2，

①点 A（1，0），B（3，4），则 d（A，⊙O）＝______，d（B，⊙O）＝______．

②已知直线 l：$y=\frac{4}{3}x+4$ 与⊙O，求直线 l 与⊙O 的雅近值 d（l，⊙O）．

(2)如图 2，C 为 x 轴正半轴上的一点，⊙C 的半径为 1，直线 $y=ax+b$（$a\neq0$）与 x 轴交于点 D，与 y 轴交于点 E．

①若 $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$b=\frac{5\sqrt{3}}{3}$，线段 DE 与⊙C 的“雅近值”d（DE，⊙O）＜$\frac{1}{2}$，请直接写出圆心 C 的横坐标 m 的取值范围；

②若 $b=2\sqrt{2}$，圆心 C 的横坐标 $m=\sqrt{2}$，直线 DE 与⊙C 的“雅近值”d（DE，⊙C）＝0，求 a 的取值范围．

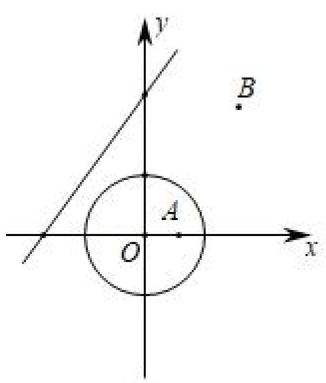


图1

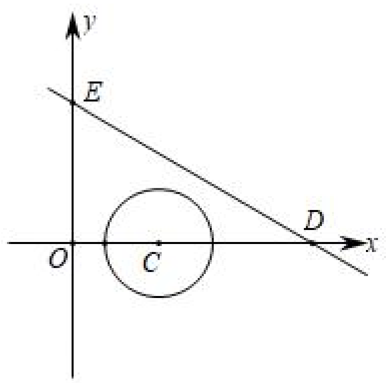


图2

9．（广益）婆罗摩芨多是公元 7 世纪古印度伟大的数学家，他在三角形、四边形、零和负数的运算规则，二次方程等方面均有建树，他也研究过对角线互相垂直的圆内接四边形，我们把这类对角线互相垂直的圆内接四边形称为“婆氏四边形”．

（1）若平行四边形 $ABCD$ 是“婆氏四边形”，则四边形 $ABCD$ 是．（填序号）

①矩形；②菱形；③正方形

（2）如图 1，$Rt\quad ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，以 AB 为弦的⊙O 交 AC 于 D，交 BC 于 E，连接 DE、AE、BD，$AB=6$，$\sin C=\dfrac{3}{5}$，若四边形 $ABED$ 是“婆氏四边形”，求 DE 的长．

（3）如图 2，四边形 $ABCD$ 为⊙O 的内接四边形，连接 AC，BD，OA，OB，OC，OD，已知$\angle BOC+\angle AOD=180°$．

①求证：四边形 $ABCD$ 是“婆氏四边形”；

②当 $AD+BC=4$ 时，求⊙O 半径的最小值．

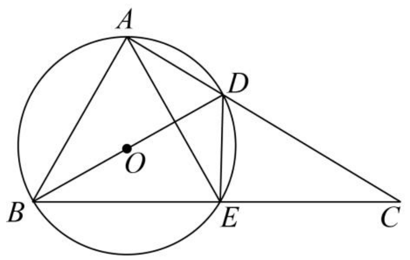


图 1

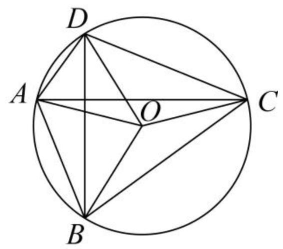


图 2

10．（雅礼）圆内各几何要素之间存在一定的数量关系和位置关系，这也是国内外数学家感兴趣的研究对象，其中就有对角线互相垂直的圆内接四边形．我们把这类对角线互相垂直的圆内接四边形称为“雅系四边形”．

(1)若平行四边形 $ABCD$ 是“雅系四边形”，则四边形 $ABCD$ 是______（填序号）；

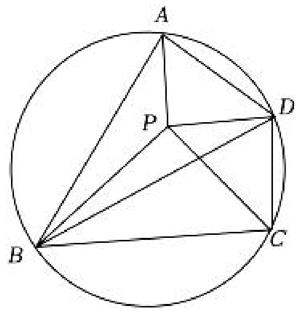
①矩形；②菱形；③正方形

(2)如图，四边形 $ABCD$ 内接于圆，P 为圆内一点，$\angle APD=\angle BPC=90^\circ$，且 $\angle ADP=\angle PBC$，求证：四边形 $ABCD$ 为“雅系四边形”；

(3)在（2）的条件下，$BD=3$，且 $AB=\sqrt{2}DC$．

①当 $DC=2\sqrt{2}$ 时，求 AC 的长度；

②当 DC 的长度最小时，请直接写出 $\tan\angle ADP$ 的值．



11．（青竹湖）定义：有一组对角互补且一组邻边相等的四边形叫做“完美四边形”．

(1)如图 1，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，且对角线 BD 平分 $\angle ABC$，四边形 $ABCD$_______（填“是”或者“不是”）“完美四边形”，若 $\angle ABC = 90°$，且 $AD = 2$，则 $\odot O$ 的直径为_；

(2)如图 2，四边形 $ABCD$ 中，AC 平分 $\angle BAD$，$CE \perp AB$ 于 E，$AD + BE = AE$．求证：四边形 $ABCD$ 为“完美四边形”；

(3)如图 3，在“完美四边形” $ABCD$ 中，$AB = AD$，$AC = 8$，$\angle BAD = 60°$，对角线 AC 与 BD 相交于点 P，设 $BC = x$，$CP = y$，求 y 与 x 的函数关系式，并求 y 的最大值．

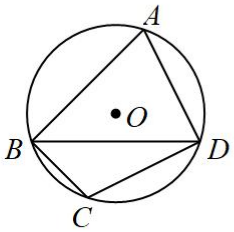


图1

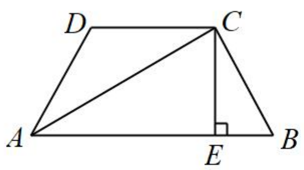


图2

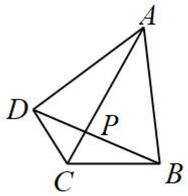


图3

12．（师大附中）若凸四边形的两条对角线所夹锐角为$60°$，我们称这样的凸四边形为“美丽四边形”.

(1)①在“平行四边形、梯形、菱形、正方形”中，一定不是“美丽四边形”的有_；

②若矩形$ABCD$是“美丽四边形”，且$AB=3$，则$BC=$_；

(2)如图1，“美丽四边形”$ABCD$内接于⊙O，AC与BD相交于点P，且对角线AC为直径，$AP=1$，$PC=5$，求另一条对角线BD的长；

(3)如图2，平面直角坐标系中，已知“美丽四边形”$ABCD$的四个顶点$A\left(-3,0\right)$、$C\left(2,0\right)$，B在第三象限，D在第一象限，AC与BD交于点O，且四边形$ABCD$的面积为$15\sqrt{3}$，若二次函数$y=ax^2+bx+c$（a、b、c为常数，且$a\neq 0$）的图象同时经过这四个顶点，求a的值.

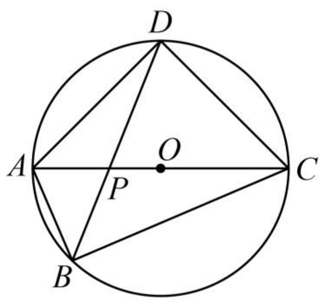


图1

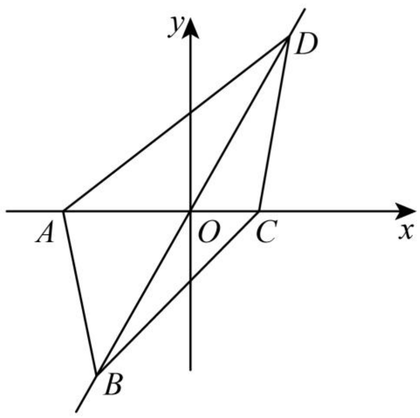


图2

2024 中考数学新定义及探究题专题《圆与新定义》(解析版)

通用的解题思路:

①对于圆中角度之间的等量关系,主要是两个方面:一是同弧或者等弧所对的圆周角相等,同弧或者等弧所对的圆心角是圆周角的两倍,二是圆内接四边形中外角等于内角的对角。

②对于求圆中的线段长度,主要从两个方向着手,首先看是否可以用垂径定理构建直角三角形,用勾股定理来求线段的长度;如果勾股定理行不通,则尝试着去找相似三角形,用相似三角形的对应线段成比例来求线段的长度。

经典例题

1.(长沙中考)我们不妨约定:对角线互相垂直的凸四边形叫做"十字形".

(1)①在"平行四边形,矩形,菱形,正方形"中,一定是"十字形"的有_____;

②在凸四边形 ABCD 中,AB=AD 且 CB≠CD,则该四边形_____"十字形".(填"是"或"不是")

(2)如图 1,A,B,C,D 是半径为 1 的⊙O 上按逆时针方向排列的四个动点,AC 与 BD 交于点 E,∠ADB﹣∠CDB=∠ABD﹣∠CBD,当 $6\le AC^2+BD^2\le 7$ 时,求 OE 的取值范围;

(3)如图 2,在平面直角坐标系 xOy 中,抛物线 $y=ax^2+bx+c$(a,b,c 为常数,a>0,c<0)与 x 轴交于 A,C 两点(点 A 在点 C 的左侧),B 是抛物线与 y 轴的交点,点 D 的坐标为(0,﹣ac),记"十字形"ABCD 的面积为 S,记△AOB,△COD,△AOD,△BOC 的面积分别为 S_1,S_2,S_3,S_4.求同时满足下列三个条件的抛物线的解析式;

①$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$;②$\sqrt{S}\sqrt{S}=\sqrt{S_3}+\sqrt{S_4}$;③"十字形"ABCD 的周长为 $12\sqrt{10}$.

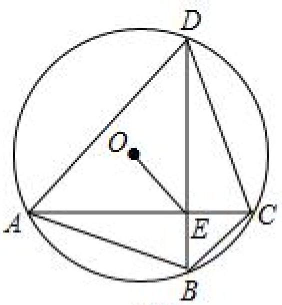


图1

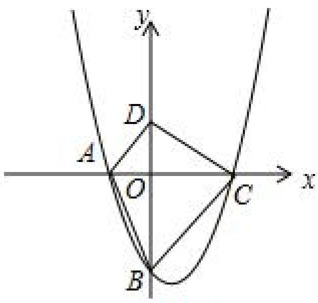
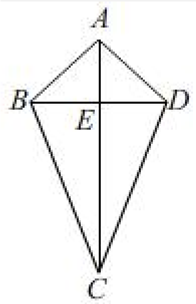


图2

【详解】解:(1)①∵菱形,正方形的对角线互相垂直,∴菱形,正方形是:"十字形",∵平行四边形,矩形的对角线不一定垂直,∴平行四边形,矩形不是"十字形",故答案为菱形,正方形;

②如图,

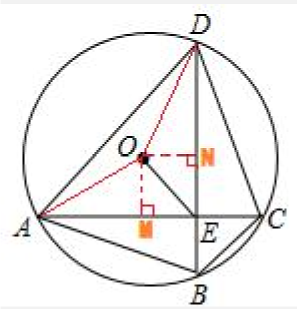


当 CB=CD 时，在△ABC 和△ADC 中，$\begin{cases} AB = AD \\ CB = CD \\ AC = AC \end{cases}$，∴△ABC≌△ADC（SSS），∴∠BAC=∠DAC，∵AB=AD，

∴AC⊥BD，∴当 CB≠CD 时，四边形 ABCD 不是“十字形”，故答案为不是；

（2）∵∠ADB+∠CBD=∠ABD+∠CDB，∠CBD=∠CAD,∠CDB=∠CAB，∴∠ADB+∠CAD=∠ABD+∠CAB，

∴180°﹣∠AED=180°﹣∠AEB，∴∠AED=∠AEB=90°，∴AC⊥BD，过点 O 作 OM⊥AC 于 M，ON⊥BD 于 N，连接 OA，OD，



∴OA=OD=1，$OM^2=OA^2-AM^2$，$ON^2=OD^2-DN^2$，AM=$\frac{1}{2}$AC，DN=$\frac{1}{2}$BD，四边形 OMEN 是矩形，

∴ON=ME，$OE^2=OM^2+ME^2$，∴$OE^2=OM^2+ON^2=2-\frac{1}{4}(AC^2+BD^2)$，∵$6\leq AC^2+BD^2\leq 7$，∴$2-\frac{7}{4}\leq OE^2\leq 2-\frac{3}{2}$，

∴$\frac{1}{4}\leq OE^2\leq\frac{1}{2}$，∴$\frac{1}{2}\leq OE\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$；

（3）由题意得，A（$\frac{-b-\sqrt{\ }}{2a}$，0），B（0，c），C（$\frac{-b+\sqrt{\ }}{2a}$，0），D（0，﹣ac），∵a＞0，c＜0，

∴OA=$\frac{\sqrt{\ }+b}{2a}$，OB=﹣c，OC=$\frac{\sqrt{\ }-b}{2a}$，OD=﹣ac，AC=$\frac{\sqrt{\ }}{a}$，BD=﹣ac﹣c，

∴S=$\frac{1}{2}$AC•BD=﹣$\frac{1}{2}$（ac+c）×$\frac{\sqrt{\ }}{a}$，S_1=$\frac{1}{2}$OA•OB=﹣$\frac{c(\sqrt{\ }+b)}{4a}$，$S_2$=$\frac{1}{2}$OC•OD=﹣$\frac{c(\sqrt{\ }-b)}{4}$，

S_3=$\frac{1}{2}$OA×OD=﹣$\frac{c(\sqrt{\ }+b)}{4}$，S_4=$\frac{1}{2}$OB×OC=﹣$\frac{c(\sqrt{\ }-b)}{4a}$，∵$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$，

$\sqrt{S}=\sqrt{S_3}+\sqrt{S_4}$，

∴$\frac{\sqrt{-c(\sqrt{\ }+b)}}{\sqrt{4a}}+\frac{\sqrt{-c(\sqrt{\ }-b)}}{2}=\frac{\sqrt{-c(\sqrt{\ }+b)}}{2}+\frac{\sqrt{-c(\sqrt{\ }-b)}}{\sqrt{4a}}$，∴$\sqrt{4a}$=2，∴a=1，

∴S=﹣c$\sqrt{\Delta}$，S_1=﹣$\frac{c(\sqrt{\ }+b)}{4a}$，$S_4$=﹣$\frac{c(\sqrt{\ }-b)}{4a}$，∵$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$，∴S=$S_1$+$S_2$+2$\sqrt{S_1S_2}$，

∴﹣c$\sqrt{\Delta}$=﹣$\frac{c\sqrt{\Delta}}{2}+2\sqrt{\frac{c^2\cdot(-4c)}{16}}$，∴$-\frac{c\sqrt{\Delta}}{2}=-c\sqrt{c}$ ∴$\sqrt{b^2-4c}=\sqrt{-4c}$ ∴b=0，

∴A（$\sqrt{-c}$，0），B（0，c），C（$\sqrt{-c}$，0），d（0，﹣c），∴四边形ABCD是菱形，∴4AD=12$\sqrt{10}$，

∴AD=3$\sqrt{10}$，即：AD^2=90，∵AD^2=c^2﹣c，∴c^2﹣c=90，∴c=﹣9或c=10（舍），即：y=x^2﹣9.

2.（一中）定义:三角形一边上的点将该边分为两条线段，且这两条线段的积等于这个点到该边所对顶点连线的平方，则称这个点为三角形该边的“好点”.如图1，△ABC中，点D是BC边上一点，连结AD，若$AD^2=BD\cdot CD$，则称点D是△ABC中BC边上的“好点”.

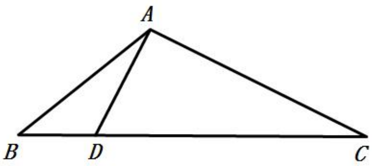
（1）如图2，△ABC的顶点是4×3网格图的格点，请仅用直尺画出AB边上的一个“好点”.

（2）△ABC中，BC=9，$\tan B=\frac{4}{3}$，$\tan C=\frac{2}{3}$，点D是BC边上的“好点”，求线段BD的长.

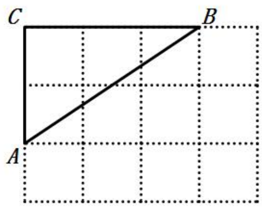
（3）如图3，△ABC是⊙O的内接三角形，OH⊥AB于点H，连结CH并延长交⊙O于点D.

①求证：点H是△BCD中CD边上的“好点”.

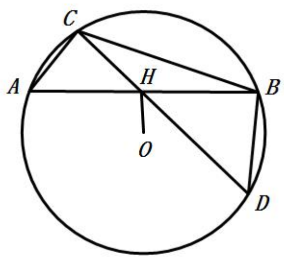
②若⊙O的半径为9，∠ABD=90°，OH=6，请直接写出$\frac{CH}{DH}$的值.



(图1)

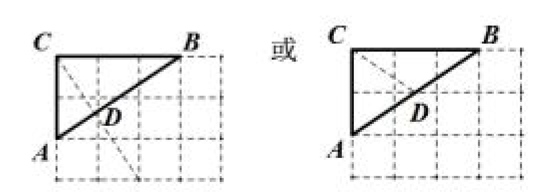


(图2)



(图3)

【详解】(1）如图所示：D点及为AB边上的“好点”

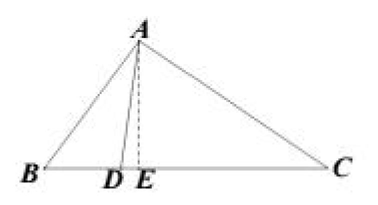


（2）作 AE⊥BC 于点 E，由 $\tan B=\frac{4}{3}$，$\tan C=\frac{2}{3}$ 可设 AE=4x，则 BE=3x，CE=6x，∴BC=9x=9，

∴ $x=1$，

∴BE=3，CE=6，AE=4，设 DE=a，

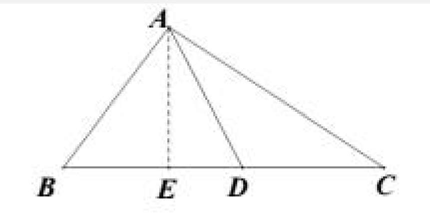
①若点 D 在点 E 左侧，



由点 D 是 BC 边上的“好点”知，$AD^2=BD\cdot CD$，∴ $a^2+4^2=(3-a)(6+a)$，即 $2a^2+3a-2=0$，

解得 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=-2$（舍去），∴ $BD=3-a=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.

②若点 D 在点 E 右侧，



由点 D 是 BC 边上的“好点”知，$AD^2=BD\cdot CD$，∴ $a^2+4^2=(3+a)(6-a)$，即 $2a^2-3a-2=0$，

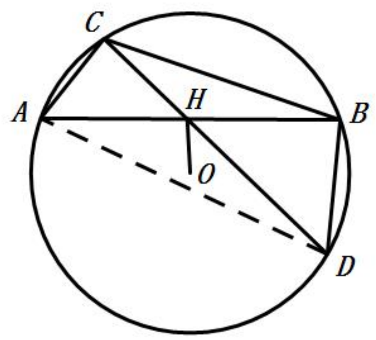
解得 $a_1=2$，$a_2=-\frac{1}{2}$（舍去），∴ $BD=3+a=3+2=5$.∴ $BD=\frac{5}{2}$ 或 5.

（3）①∵∠CHA=∠BHD，∠ACH=∠DBH，∴△AHC∽△DHB，∴ $\frac{AH}{DH}=\frac{CH}{BH}$，即

$AH\cdot BH=CH\cdot DH$，

∵OH⊥AB，∴AH=BH，∴ $BH^2=CH\cdot DH$，∴点 H 是△BCD 中 CD 边上的“好点”.

②连接 AD.



(图3)

∵∠ABD=90°，∴AD 为直径，∵OH⊥AB，OH=6，∴ $AH=\sqrt{OA^2-OH^2}=3\sqrt{5}$ ，BD=2OH=12，

∴BH=AH= $3\sqrt{5}$ ，∴ $DH=\sqrt{BD^2+BH^2}=3\sqrt{21}$ ，由①得：$BH^2=CH\cdot DH$，即 $\left(3\sqrt{5}\right)^2=CH\ 3\sqrt{21}$，

∴CH= $\frac{5\sqrt{21}}{7}$ ，∴ $\frac{CH}{DH}=\frac{5}{21}$.

3.（青竹湖）我们不妨定义：有两边之比为 1：$\sqrt{3}$ 的三角形叫敬“勤业三角形”.

(1)下列各三角形中，一定是“勤业三角形”的是________；（填序号）

①等边三角形；②等腰直角三角形；③含 30° 角的直角三角形；④含 120° 角的等腰三角形.

(2)如图 1，$\triangle ABC$ 是⊙O 的内接三角形，AC 为直径，D 为 AB 上一点，且 $BD=2AD$，作 $DE\perp OA$，交线段 OA 于点 F，交⊙O 于点 E，连接 BE 交 AC 于点 G．试判断$\triangle AED$ 和$\triangle ABE$ 是否是“勤业三角形”？如果是，请给出证明，并求出 $\frac{ED}{BE}$ 的值；如果不是，请说明理由；

(3)如图 2，在（2）的条件下，当 AF：FG＝2：3 时，求∠BED 的余弦值.

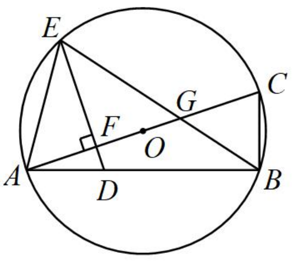


图 1

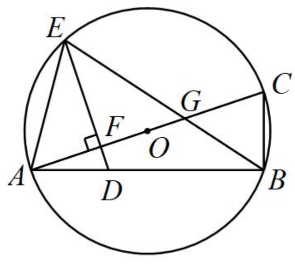


图 2

【详解】（1）解：①等边三角形各边的比值为 1，故等边三角形不是“勤业三角形”；

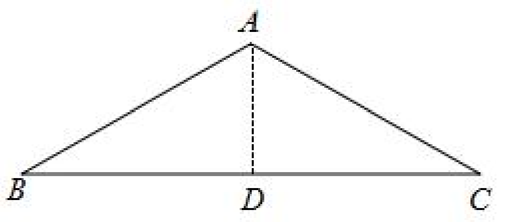
②等腰直角三角形两直角边的比值为 1，直角边与斜边的比为 $1:\sqrt{2}$，故等腰直角三角形不

是“勤业三角形”；

③设含30°角的直角三角形的最短边长为a，则斜边长为$2a$，另一条直角边长为$\sqrt{3}a$，

$a:\sqrt{3}a=1:\sqrt{3}$，故含30°角的直角三角形是“勤业三角形”；

④如图： ABC中，$AB=AC$，$\angle A=120^\circ$，过点A作$AD\perp BC$于点D，

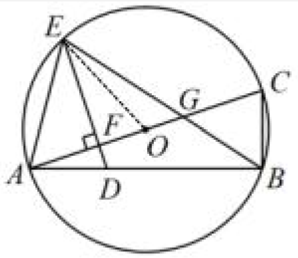


$\therefore \angle B=\angle C=30^\circ$，设$AD=a$，则$AB=AC=2a$，$BD=DC=\sqrt{3}a$，$\therefore BC=2\sqrt{3}a$，

$\therefore AB:BC=AC:BC=1:\sqrt{3}$，

$\therefore$含120°角的等腰三角形是“勤业三角形”；故答案为：③④；

（2）解：$\triangle AED$和$\triangle ABE$都是“勤业三角形”，证明如下：如图：连接OE，设$\angle ABE=\alpha$，



$\therefore \angle AOE=2\angle ABE=2\alpha$，$OA=OE$，

$\therefore \angle OAE=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle AOE)=\frac{1}{2}(180^\circ-2\alpha)=90^\circ-\alpha$，

又 $DE\perp AC$，$\therefore \angle AED+\angle OAE=90^\circ$，即$\angle AED+90^\circ-\alpha=90^\circ$，$\therefore \angle AED=\angle ABE=\alpha$，

又 $\angle EAD=\angle BAE$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle AEB$，$\therefore \frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AE}=\frac{DE}{EB}$，$\therefore AE^2=AD\cdot AB$，

$BD=2AD$，

$\therefore AD=\frac{1}{3}AB$，$\therefore AE^2=\frac{1}{3}AB^2$，$AE^2=3AD^2$，$\therefore \frac{AE}{AB}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\frac{AD}{AE}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，

$\therefore \triangle AED$和$\triangle ABE$都是“勤业三角形”，$\therefore \frac{DE}{EB}=\frac{AE}{AB}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

（3）解：如图：过点G作$GI\parallel AB$交DE于点I，