计量经济学

线性回归模型的多种检验

计量经济学线性回归模型的多种检验

- 对计量经济学模型的检验涉及对回归模型的理论检验（经济意义检验）、统计检验、计量经济学检验、预测检验等。
- 理论检验（经济意义检验）指的是根据经济理论来判断估计参数的正负号是否合理、大小是否合适。
- 经济意义检验是第一位的。假如模型不能够经过经济意义检验，则必须找出原因，在找出原因的基础上对模型进行修正或重新估计模型。假如经过了经济意义检验，则可进行下一步的统计检验。

线性回归模型的多种检验

- 理论检验（经济意义检验）
- 统计检验
- 计量经济学检验
- 预测检验
- 这一节主要讨论多种统计检验

回归模型的统计检验

- 统计检验指的是根据统计学的理论，拟定回归参数估计值的统计可靠性。
- 统计检验主要涉及：回归方程估计原则误差的评价、拟合优度检验、回归模型的总体明显性检验和回归系数的明显性检验等。
- 这里主要讨论拟合优度检验、回归模型的总体明显性检验、回归系数的明显性检验等。

回归模型的统计检验

- 拟合优度检验
- 回归模型的总体明显性检验
- 回归系数的明显性检验
- 正态性检验
- 检验回归的函数形式:MWD检验
- 假设检验三联体
- 模型的构造稳定性检验
- 缺失变量检验和多出变量检验

拟合优度检验

- 总平方和、回归平方和、残差平方和
- 平方和的分解
- 拟合优度的定义
- 拟合优度与F统计量之间的联络
- 拟合优度等于实际值与拟合值之间简朴有关系数的平方

拟合优度检验

- 假如全部的观察值都落在回归直线上，就称为完全拟合。但这种情况极少见。一般情况下，回归后总会出现正的或负的残差，它们围绕在回归直线的周围。经过对这些残差的分析，有利于衡量回归直线拟合样本点的程度。
- 拟合优度指样本回归直线与观察值之间的拟合程度。
- 在简朴线性回归中，用决定系数衡量估计模型对观察值的拟合程度。在多元回归中，用多重决定系数和修正的多重决定系数来衡量。

拟合优度检验

- 要阐明多元回归模型对观察值的拟合情况，能够考察在Y的总变差中能够由解释变量解释的那部分变差的比重，即回归平方和与总离差平方和的比值。这一比值就称为多重决定系数，它一般用R^2表达。

总平方和、回归平方和、残差平方和

$$TSS=\sum\left(y_i-\overline{y}\right)^2$$

$$RSS=\sum\left(\hat{y}_i-\overline{y}\right)^2$$

$$ESS=\sum\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2=\sum\hat{u}_i{}^2$$

总平方和、回归平方和、残差平方和

- TSS即总离差平方和，它度量被解释变量Y的观察值本身的差别程度。
- RSS即回归平方和，即总变差中可由回归直线（即解释变量）解释的部分，表达解释变量对被解释变量的线性影响，所以也称为解释变差。它度量因变量Y的拟合值本身的差别程度。
- ESS即残差平方和，是总变差中不能够由回归直线解释的部分，是由解释变量对被解释变量的影响之外的原因所造成的，它度量实际值与拟合值之间的差别程度。

总平方和、回归平方和、残差平方和

- 显然，回归平方和RSS越大，残差平方和ESS越小，从而被解释变量总变差中能够由解释变量解释的那部分变差就越大，模型对观察数据的拟合程度就越高。
- 所以定义多重决定系数为解释变差占总变差的比重，用来表述解释变量对被解释变量的解释程度。

拟合优度的定义

- 拟合优度的定义：

$$TSS = RSS + ESS \Rightarrow 1 = \frac{RSS}{TSS} + \frac{ESS}{TSS}$$

$$R^2 = \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{ESS}{TSS}$$

- 含义：拟合优度越大，自变量对因变量的解释程度越高，自变量引起的变动占总变动的百分比越高，观察点在回归直线附近越密集。
- 取值范围：0-1。当拟合优度为1时，被解释变量的变化完全由回归直线解释，全部观察点都落在回归直线上；当它取值为0时，解释变量与被解释变量之间没有任何线性关系。

平方和的分解

$$
\begin{aligned}
TSS &= \sum \left(y_i - \bar{y}\right)^2 \\
&= \sum \left[\left(y_i - \hat{y}_i\right) + \left(\hat{y}_i - \bar{y}\right)\right]^2 \\
&= \sum \left[\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 + 2\left(y_i - \hat{y}_i\right)\left(\hat{y}_i - \bar{y}\right) + \left(\hat{y}_i - \bar{y}\right)^2\right] \\
&= \sum \left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 + \sum \left(\hat{y}_i - \bar{y}\right)^2 + 2\sum \left(y_i - \hat{y}_i\right)\left(\hat{y}_i - \bar{y}\right) \\
&= ESS + RSS + 2\sum \left(y_i - \hat{y}_i\right)\left(\hat{y}_i - \bar{y}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum \left(y_i - \hat{y}_i\right)\left(\hat{y}_i - \bar{y}\right) &= \sum \hat{u}_i \left(\hat{y}_i - \bar{y}\right) = \sum \hat{u}_i \hat{y}_i - \sum \hat{u}_i \bar{y} \\
&= \sum \hat{u}_i \hat{y}_i - \bar{y} \sum \hat{u}_i = 0 - \bar{y} \cdot 0 = 0
\end{aligned}
$$

$$\rightarrow TSS = RSS + ESS$$

平方和分解的意义

- TSS=RSS+ESS
- 被解释变量Y总的变动（差别）=解释变量X引起的变动（差别）+除X以外的原因引起的变动（差别）
- 假如X引起的变动在Y的总变动中占很大百分比，那么X很好地解释了Y；不然，X不能很好地解释Y。

相应自由度的分解

- 总自由度：$df_T=n-1$
- 回归自由度：$df_R=k$（自变量的个数）
- 残差自由度：$df_E=n-k-1$
- 自由度分解：$df_T=df_R+df_E$

拟合优度等于实际值与拟合值之间简朴有关系数的平方

$$\rho_{y,\hat{y}}^{2}=\frac{\left[\frac{1}{n}\Sigma\left(y_i-\bar{y}\right)\left(\hat{y}_i-\bar{y}\right)\right]^2}{\frac{1}{n}\Sigma\left(y_i-\bar{y}\right)^2\frac{1}{n}\Sigma\left(\hat{y}_i-\bar{y}\right)^2}\qquad 分母=\frac{1}{n}TSS\,\frac{1}{n}RSS$$

$$分子中的\Sigma\left(y_i-\bar{y}\right)\left(\hat{y}_i-\bar{y}\right)=\Sigma\left(\hat{y}_i+\hat{u}_i-\bar{y}\right)\left(\hat{y}_i-\bar{y}\right)=\Sigma\left(\hat{y}_i-\bar{y}+\hat{u}_i\right)\left(\hat{y}_i-\bar{y}\right)$$

$$=\Sigma\left(\hat{y}_i-\bar{y}\right)\left(\hat{y}_i-\bar{y}\right)+\Sigma\hat{u}_i\left(\hat{y}_i-\bar{y}\right)=\Sigma\left(\hat{y}_i-\bar{y}\right)^2+\Sigma\hat{u}_i\left(\hat{y}_i-\bar{y}\right)=RSS+0$$

$$分子=\left(\frac{1}{n}RSS\right)^2\Rightarrow\rho_{y,\hat{y}}^{2}=\frac{分子}{分母}=\frac{\left(\frac{1}{n}RSS\right)^2}{\frac{1}{n}TSS\,\frac{1}{n}RSS}=\frac{RSS}{TSS}=R^2$$

$\rho_{y,\hat{y}}^{2}$和R^2一样，也是说明拟合的$\hat{y}_i$与实际的y_i的相关程度的，

说明$\hat{y}_i$拟合得约好。

修正的决定系数

- 在应用过程中人们发觉，伴随模型中解释变量的增多，多重决定系数的值往往会变大，从而增长模型的解释功能。这给人一种错觉，即要使模型拟合得好，就必须增长解释变量。但是另一方面，在样本容量一定的情况下，增长解释变量必然会使得待估参数的个数增长，从而损失自由度；而且在实际中，有些解释变量的增长根本就是不必要的。对于这些不必要的解释变量的引入不但对于估计成果无益，同步还意味着预测的精确度的降低。也就是说，不应该仅根据决定系数是否增大来决定某解释变量是否应引入模型。
- 实际上，研究模型的拟合优度时，经常并不简朴地仅依托多重决定系数，更常考虑的是修正的决定系数。

修正的决定系数

- 修正的决定系数对决定系数进行调整的思绪是:将残差平方和与总离差平方和分别除以各自的自由度，以剔除变量个数对拟合优度的影响。

修正的决定系数

修正的决定系数的公式为:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\dfrac{\sum e_i^2}{n-k-1}}{\dfrac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1}}$$

其中$n-k-1$为$\sum e_i^2$的自由度，$n-1$为$\sum (y_i-\bar{y})^2$的自由度。当增加一个对解释变量有较大影响的解释变量时，残差平方和$\sum e_i^2$减小比$n-k-1$减小更显著，从而修正的决定系数$\bar{R}^2$就会增加。如果增加的解释变量对被解释变量没有多大影响，残差平方和$\sum e_i^2$减小得不如$n-k-1$减小得明显，从而$\bar{R}^2$会减小，表明不应该引入这个不重要的解释变量。

修正的决定系数

引入修正的决定系数的作用：

- 用自由度调整后，能够消除拟合优度评价中解释变量多少对决定系数计算的影响；
- 对于包括的解释变量个数不同的模型，能够用调整后的决定系数直接比较它们的拟合优度的高下，但不能直接用未调整的决定系数来比较。

修正的决定系数

修正的多重决定系数与未经修正的决定系数之间的关系如下：

$$\bar{R}^2 = R^2 - \frac{k}{n-k-1}\left(1-R^2\right)$$ （推导过程略，可自己推导）

可以看出，$\bar{R}^2 \le R^2$，即修正的决定系数不大于未经修正的决定系数。随着解释变量的增加，$\bar{R}^2$将越来越小于R^2。如果n很大，则$\bar{R}^2$与R^2相差很小。

修正的决定系数比一般的决定更准确地反映了解释变量对被解释变量的影响程度，因此一般情况下，修正的决定系数比一般的决定系数应用更广泛。

修正的决定系数还有一个特点，即它可能为负。当 $R^2 < \dfrac{k}{n-k-1}$时，修正的决定系数为负（推导过程略，可自己推导）。此时修正的决定系数将失去意义，作$\bar{R}^2=0$处理。事实上，$\bar{R}^2$只适用于被解释变量与解释变量的整体相关程度比较高的情况。

需要阐明的问题

- 在实际应用中，我们往往希望所建立模型的决定系数或修正的决定系数越大越好。但应注意，决定系数只是对模型拟合优度的度量，决定系数或修正的决定系数越大，只能阐明列入模型的解释变量对被解释变量整体的影响程度很大，并不能阐明模型中各个解释变量对被解释变量的影响程度明显。所以在选择模型时，不能单纯地凭决定系数的高下来断定模型的优劣，有时从模型的经济意义和整体可靠程度的角度出发，能够合适降低对决定系数的要求。

需要阐明的问题

- 在消费模型中，$R^2>0.28\rightarrow F>3.80\rightarrow$该线性模型在0.99的水平下明显成立。

有许多著名的模型，R^2不大于 0.5，支持了主要的结论，例如收入差距的倒U型规律。

不要片面追求拟合优度

什么时候增长新的解释变量

- 在实际中，为了解释某一现象，研究者往往面对怎样取舍若干解释变量的问题。一般的做法是，只要修正的鉴定系数值增长（虽然修正的鉴定系数可能不不小于非修正的鉴定系数的值），就能够增长解释变量。但是什么时候修正的鉴定系数值开始增长呢？能够证明，假如增长变量的系数的t的绝对值不小于1，修正的鉴定系数就会增长。

在Eviews中的实现

- 许多的计量经济学软件能够给出决定系数和修正的决定系数，从而实现拟合优度检验。Eviews中一样能够实现这一目的。估计完回归方程后的成果中自动会包括决定系数和修正的决定系数。
- 例。

决定系数的值多大合适？

问题：$\overline{R}^2$ 多大才算通过拟合优度检验？

决定系数的值越高，拟合得越好。但什么是高？回归中使用时间序列数据还是横截面数据有不同的原则。对时间序列数据来说，决定系数的值在0.8、0.9以上是很常见的事，而在横截面数据的情况下，0.4、0.5的决定系数值有时也不能算低。

赤池信息准则和施瓦茨准则

- 为了比较所含解释变量个数不同的多元回归模型的拟合优度，常用的原则还有:
- 赤池信息准则（Akaike information criterion, AIC）

$$AIC = \ln \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n} + \frac{2(k+1)}{n}$$

- 施瓦茨准则（Schwarz criterion，SC）

$$AC = \ln \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n} + \frac{k}{n} \ln n$$

- 这两准则均要求仅当所增长的解释变量能够降低AIC值或SC值时才在原模型中增长该解释变量。

回归模型的总体明显性检验

- 拟合优度检验能够阐明模型对样本数据的近似情况。模型的总体明显性检验则一般用来检验全部解释变量对被解释变量的共同影响是否明显。

回归模型的总体明显性检验

检验全部解释变量对被解释变量的共同影响是否显著，或者说，检验回归的总体显著性（overall significance），检验模型中被解释变量与解释变量之间的线性关系在总体上是否显著成立，也就是检验模型中的参数是否显著不为0：

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0; H_1: \beta_1$、$\beta_2$、$\cdots$ β_k至少有一个不为0

构造统计量$F = \dfrac{ESS/k}{RSS/(n-k-1)} \sim F(k, n-k-1)$,

对于给定的n, k和α，如果$F > F_\alpha(k, n-k-1)$，可以拒绝H_0，即回归是总体显著的；反之则不能拒绝H_0，即回归显示的线性关系不显著。

回归模型的总体明显性检验

- 大部分的计量经济学软件能够实现回归模型的总体明显性检验。Eviews中也能够轻松地实现。估计完方程后的成果中自动会给出F统计量的值与伴随概率。

拟合优度检验和F检验的关系

- F检验和拟合优度检验都是把总变差TSS分解为回归平方和与残差平方和，并在这一分解的基础上构造统计量进行的检验。区别在于前者有精确的分布而后者没有。一般来说，模型对观察值的拟合程度越高，模型总体线性关系的明显性越强。

拟合优度检验和F检验的关系

- F明显==>拟合优度必然明显

$$F=\frac{\frac{RSS}{k}}{\frac{ESS}{n-k-1}}=\frac{S_r^2}{S_e^2}$$

$$F=\frac{(n-k-1)RSS}{kESS}=\frac{(n-k-1)RSS}{k(TSS-RSS)}=\frac{(n-k-1)\frac{RSS}{TSS}}{k\left(\frac{TSS-RSS}{TSS}\right)}$$

$$F=\frac{(n-k-1)R^2}{k(1-R^2)}$$

拟合优度检验和F检验的关系

- 反过来有

$$R^2 = \frac{kF}{(n-k-1)+kF}$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{(n-k-1)+kF}$$

- 能够看出，伴随决定系数和修正的决定系数的增长，F统计量的值也不断增大；反过来也是如此。这阐明两者之间具有一致性。但是，决定系数和修正的决定系数只能提供一种模糊的推测，它们的值要到达多少才算模型经过了检验并没有拟定的界线；而F检验则不同，它能够在给定明显性水平下，给出统计意义上严格的结论。

拟合优度检验和F检验的关系

F与$\bar{R}^2$同向变化：当$\bar{R}^2=0$时，$F=0$；

$\bar{R}^2$越大，F值也越大；

当$\bar{R}^2=1$时，F为无穷大。