

2023 年高考数学模拟试卷

注意事项

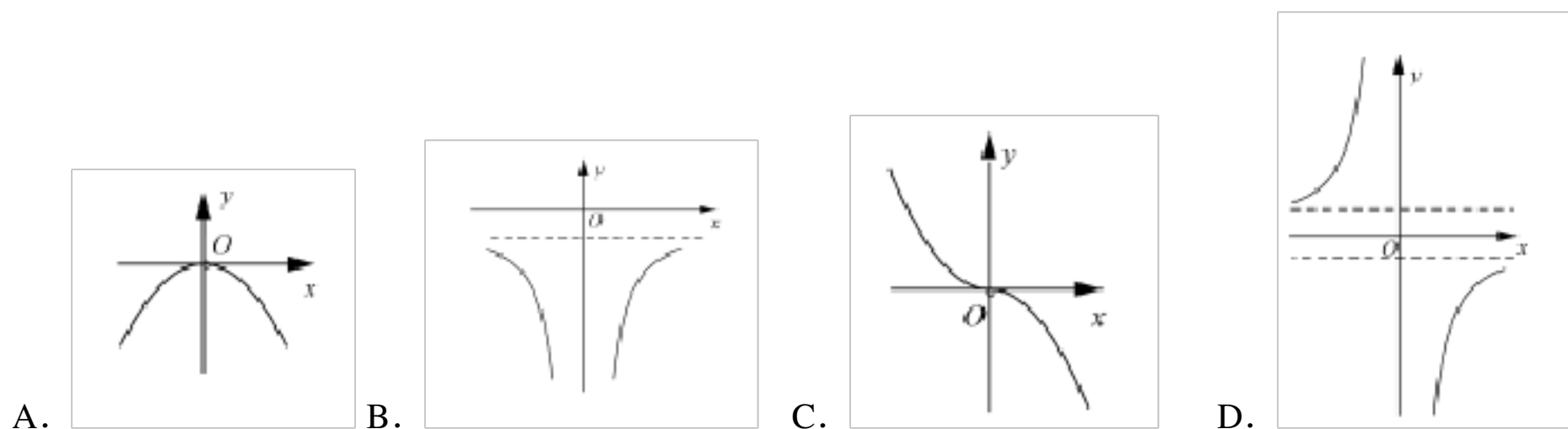
1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知抛物线 $x^2 = 4y$ 上一点 A 的纵坐标为 4，则点 A 到抛物线焦点的距离为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

2. 函数 $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$ (其中 e 是自然对数的底数) 的大致图像为 ()



3. 在 $\triangle ABC$ 中，“ $\tan B \tan C > 1$ ”是“ $\triangle ABC$ 为钝角三角形”的 ()

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，球 O_1 同时与以 A 为公共顶点的三个面相切，球 O_2 同时与以 C_1 为公共顶点的三个

面相切，且两球相切于点 F . 若以 F 为焦点， AB_1 为准线的抛物线经过 O_1, O_2 ，设球 O_1, O_2 的半径分别为 r_1, r_2 ，则 $\frac{r_1}{r_2} =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ C. $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $2-\sqrt{3}$

5. $a \parallel \alpha, b \parallel \beta, \alpha \parallel \beta$ ，则 a 与 b 位置关系是 ()

- A. 平行 B. 异面
C. 相交 D. 平行或异面或相交

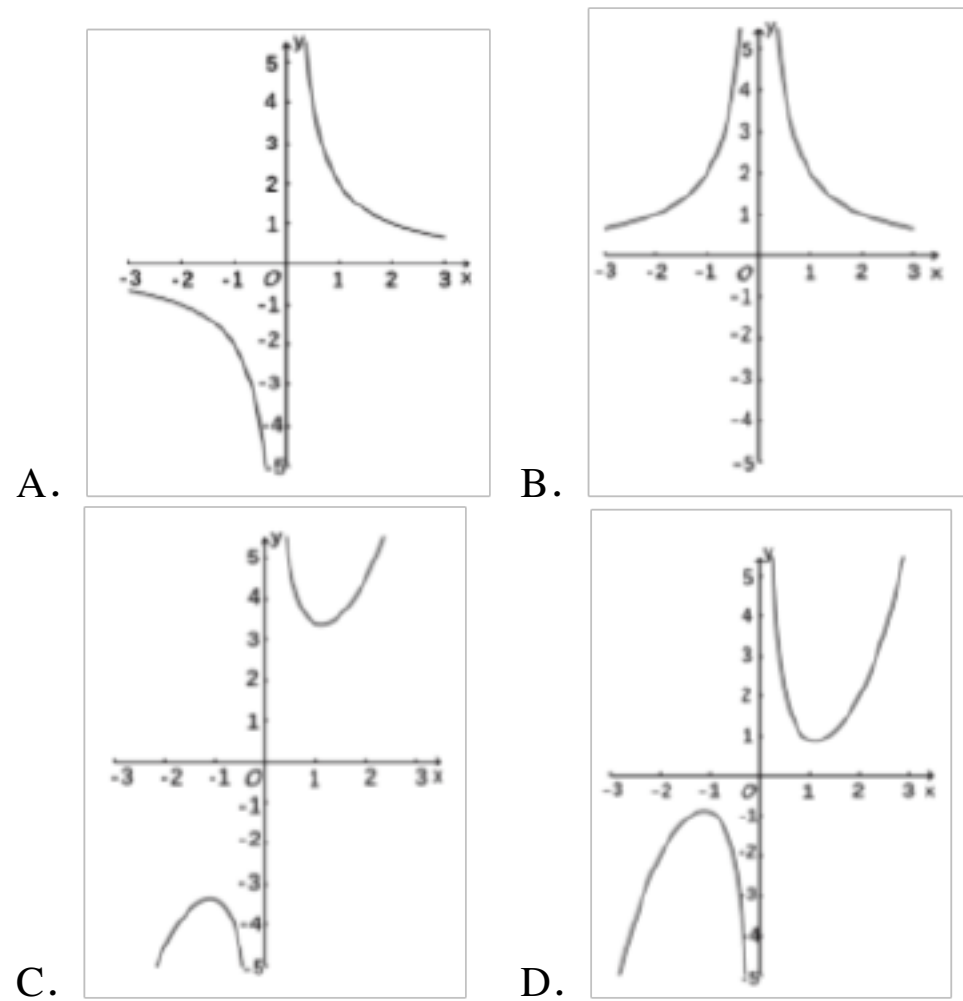
6. 已知直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长相等， $\angle ABC = 60^\circ$ ，则直线 BC_1 与平面 ACC_1A_1 所成角的正切值等于 ()

- A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{5}$

7. 已知函数 $f(x) = ax^2 - 4ax - \ln x$ ，则 $f(x)$ 在 $(1,4)$ 上不单调的一个充分不必要条件可以是 ()

- A. $a > -\frac{1}{2}$ B. $0 < a < \frac{1}{16}$ C. $a > \frac{1}{16}$ 或 $-\frac{1}{2} < a < 0$ D. $a > \frac{1}{16}$

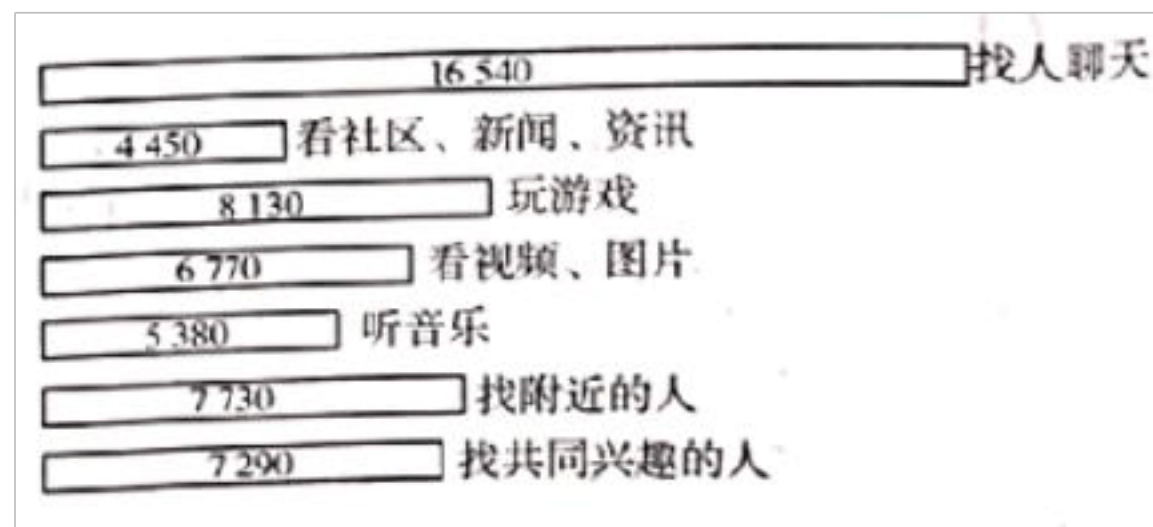
8. 函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(x^2 + 1)}$ 在 $[-3, 3]$ 的图象大致为()



9. 近年来, 随着 4G 网络的普及和智能手机的更新换代, 各种方便的 *app* 相继出世, 其功能也是五花八门. 某大学为了调查在校大学生使用 *app* 的主要用途, 随机抽取了 56290 名大学生进行调查, 各主要用途与对应人数的结果统计如图所示, 现有如下说法:

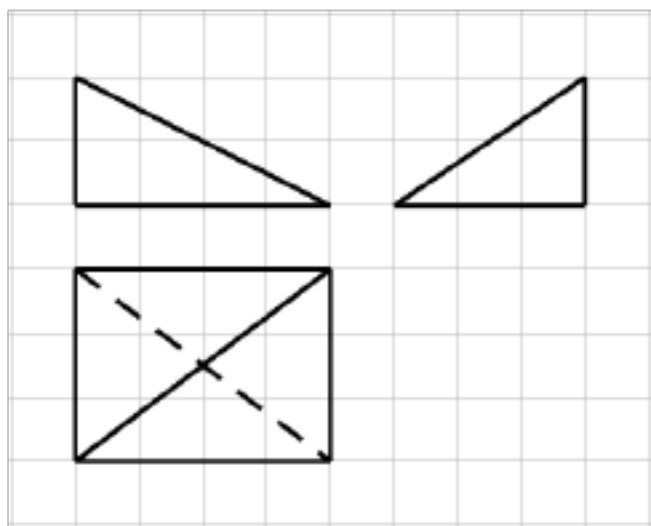
- ①可以估计使用 *app* 主要听音乐的大学生人数多于主要看社区、新闻、资讯的大学生人数;
- ②可以估计不足 10% 的大学生使用 *app* 主要玩游戏;
- ③可以估计使用 *app* 主要找人聊天的大学生超过总数的 $\frac{1}{4}$.

其中正确的个数为 ()



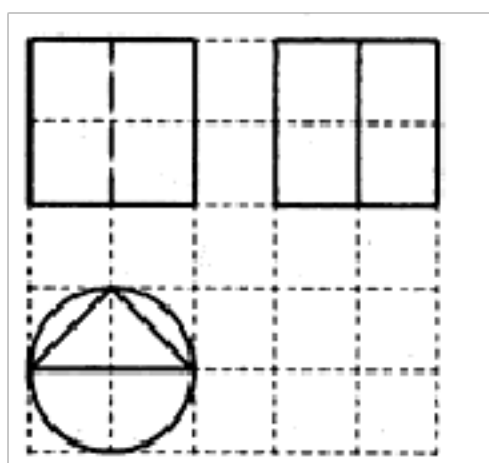
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

10. 某三棱锥的三视图如图所示，网格纸上小正方形的边长为1，则该三棱锥外接球的表面积为（ ）



- A. 27π B. 28π C. 29π D. 30π

11. 一个组合体的三视图如图所示（图中网格小正方形的边长为1），则该几何体的体积是（ ）



- A. $2\pi - \frac{1}{2}$ B. $2\pi - 1$ C. $2\pi - 2$ D. $2\pi - 4$

12. 一袋中装有5个红球和3个黑球（除颜色外无区别），任取3球，记其中黑球数为 X ，则 $E(X)$ 为（ ）

- A. $\frac{9}{8}$ B. $\frac{7}{8}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{62}{56}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 的右准线与渐近线的交点在抛物线 $y^2 = 2px$ 上，则实数 p 的值为_____.

14. 从集合 $\{1,2,3\}$ 中随机取一个元素，记为 a ，从集合 $\{2,3,4\}$ 中随机取一个元素，记为 b ，则 $a \leq b$ 的概率为_____.

15. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1 (m > 0, n > 0)$ 有相同的焦点 F_1, F_2 ，其中 F_1 为左

焦点.点 P 为两曲线在第一象限的交点， e_1, e_2 分别为曲线 C_1, C_2 的离心率，若 $\triangle PF_1F_2$ 是以 PF_1 为底边的等腰三角形，则 $e_2 - e_1$ 的取值范围为_____.

16. 若复数 Z 满足 $(1-2i)Z = -\frac{1}{2}(2+i)$ ，其中 i 为虚数单位，则 Z 的共轭复数在复平面内对应点的坐标为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - x^2 - kx$ (其中 e 为自然对数的底, k 为常数) 有一个极大值点和一个极小值点.

(1) 求实数 k 的取值范围;

(2) 证明: $f(x)$ 的极大值不小于 1.

18. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 和通项 a_n 满足 $2S_n + a_n = 1 (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 已知数列 $\{b_n\}$ 中, $b_1 = 3a_1, b_{n+1} = b_n + 1 (n \in \mathbb{N}^*)$, 求数列 $\{a_n + b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分) 山东省 2020 年高考将实施新的高考改革方案. 考生的高考成绩将由 3 门统一高考科目成绩和自主选择的 3 门普通高中学业水平等级考试科目成绩组成, 总分为 750 分. 其中, 统一高考科目为语文、数学、外语, 自主选择的 3 门普通高中学业水平等级考试科目是从物理、化学、生物、历史、政治、地理 6 科中选择 3 门作为选考科目, 语、数、外三科各占 150 分, 选考科目成绩采用“赋分制”, 即原始分数不直接用, 而是按照学生分数在本科目考试的排名来划

分等级并以此打分得到最后得分. 根据高考综合改革方案, 将每门等级考试科目中考生的原始成绩从高到低分为 A、B+

B、C+、C、D+、D、E 共 8 个等级. 参照正态分布原则, 确定各等级人数所占比例分别为 3%、7%、16%、24%、24%、

16%、7%、3% 等级考试科目成绩计入考生总成绩时, 将 A 至 E 等级内的考生原始成绩, 依照等比例转换法则, 分别转

换到 91-100、81-90、71-80、61-70、51-60、41-50、31-40、21-30 八个分数区间, 得到考生的等级成绩.

举例说明.

某同学化学学科原始分为 65 分, 该学科 C+ 等级的原始分分布区间为 58~69, 则该同学化学学科的原始成绩属 C+ 等

级. 而 C+ 等级的转换分区间为 61~70, 那么该同学化学学科的转换分为:

设该同学化学学科的转换等级分为 x , $\frac{69-65}{65-58} = \frac{70-x}{x-61}$, 求得 $x \approx 66.73$.

四舍五入后该同学化学学科赋分成绩为 67.

(1) 某校高一年级共 2000 人, 为给高一学生合理选科提供依据, 对六个选考科目进行测试, 其中物理考试原始成绩

基本服从正态分布 $\xi \sim N(60, 12^2)$.

(i) 若小明同学在这次考试中物理原始分为 84 分, 等级为 B+, 其所在原始分分布区间为 82~93, 求小明转换后的物理成绩;

(ii) 求物理原始分在区间 (72, 84) 的人数;

(2) 按高考改革方案, 若从全省考生中随机抽取 4 人, 记 X 表示这 4 人中等级成绩在区间 [61, 80] 的人数, 求 X 的分布列和数学期望.

(附: 若随机变量 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma) = 0.682$, $P(\mu - 2\sigma < \xi < \mu + 2\sigma) = 0.954$,

$P(\mu - 3\sigma < \xi < \mu + 3\sigma) = 0.997$)

20. (12分) 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数, $0 \leq \alpha < 2\pi$), 以坐标原点 O

为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{3}$ ($\rho \in \mathbf{R}$), 曲线 C 与直线 l 其中的一个交点为 A ,

且点 A 极径 $\rho_0 \neq 0$, 极角 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

(1) 求曲线 C 的极坐标方程与点 A 的极坐标;

(2) 已知直线 m 的直角坐标方程为 $x - \sqrt{3}y = 0$, 直线 m 与曲线 C 相交于点 B (异于原点 O), 求 ΔAOB 的面积.

21. (12分) 某调查机构对某校学生做了一个是否同意生“二孩”抽样调查, 该调查机构从该校随机抽查了 100 名不同性别的学生, 调查统计他们是同意父母生“二孩”还是反对父母生“二孩”, 现已得知 100 人中同意父母生“二孩”占 60%, 统计情况如下表:

	同意	不同意	合计
男生	a	5	
女生	40	d	
合计			100

(1) 求 a, d 的值, 根据以上数据, 能否有 97.5% 的把握认为是否同意父母生“二孩”与性别有关? 请说明理由;

(2) 将上述调查所得的频率视为概率, 现在从所有学生中, 采用随机抽样的方法抽取 4 位学生进行长期跟踪调查, 记被抽取的 4 位学生中持“同意”态度的人数为 X , 求 X 的分布列及数学期望.

$$K_2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

附:

$P(k^2 \geq k_0)$	0.15	0.100	0.050	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

22. (10分) 设 $f(x) = (a-4)\log_a x - \frac{3}{a-1}x + \frac{3}{a-1}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

(1) 证明: 当 $a = 4$ 时, $\ln x + f(x) \leq 0$;

(2) 当 $x \geq 1$ 时 $f(x) \leq 0$, 求整数 a 的最大值. (参考数据: $\ln 2 \approx 0.69, \ln 3 \approx 1.10, \ln 5 \approx 1.61, \ln 7 \approx 1.95$)

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

试题分析：抛物线 $x^2 = 4y$ 焦点在 y 轴上，开口向上，所以焦点坐标为 $(0,1)$ ，准线方程为 $y = -1$ ，因为点 A 的纵坐标为 4，所以点 A 到抛物线准线的距离为 $4+1=5$ ，因为抛物线上的点到焦点的距离等于到准线的距离，所以点 A 与抛物线焦点的距离为 5.

考点：本小题主要考查应用抛物线定义和抛物线上点的性质抛物线上的点到焦点的距离，考查学生的运算求解能力.

点评：抛物线上的点到焦点的距离等于到准线的距离，这条性质在解题时经常用到，可以简化运算.

2、D

【解析】

由题意得，函数定义域为 $x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq 0$ ，所以定义域关于原点对称，

$$f(-x) = \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1+\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}} = -\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} = -f(x)$$

且 $f(x)$ 为奇函数，所以函数为奇函数，图象关于原点对称，

故选 D.

3、C

【解析】

分析：从两个方向去判断，先看 $\tan A \tan B > 1$ 能推出三角形的形状是锐角三角形，而非钝角三角形，从而得到充分性

不成立，再看当三角形是钝角三角形时，也推不出 $\tan A \tan B > 1$ 成立，从而必要性也不满足，从而选出正确的结果.

详解：由题意可得，在 $\triangle ABC$ 中，因为 $\tan A \tan B > 1$ ，

$$\text{所以 } \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} > 1, \text{ 因为 } 0 < A < \pi, 0 < B < \pi,$$

$$\text{所以 } \sin A \sin B > 0, \cos A \cos B > 0,$$

结合三角形内角的条件，故 A,B 同为锐角，因为 $\sin A \sin B > \cos A \cos B$ ，

$$\text{所以 } \cos A \cos B - \sin A \sin B < 0, \text{ 即 } \cos(A+B) < 0, \text{ 所以 } \frac{\pi}{2} < A+B < \pi,$$

$$\text{因此 } 0 < C < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \triangle ABC \text{ 是锐角三角形，不是钝角三角形，}$$

所以充分性不满足，

反之，若 $\triangle ABC$ 是钝角三角形，也推不出“ $\tan A \tan B > 1$ ”，故必要性不成立，

所以为既不充分也不必要条件，故选 D.

点睛：该题考查的是有关充分必要条件的判断问题，在解题的过程中，需要用到不等式的等价转化，余弦的和角公式，

诱导公式等，需要明确对应此类问题的解题步骤，以及三角形形状对应的特征.

4、D

【解析】

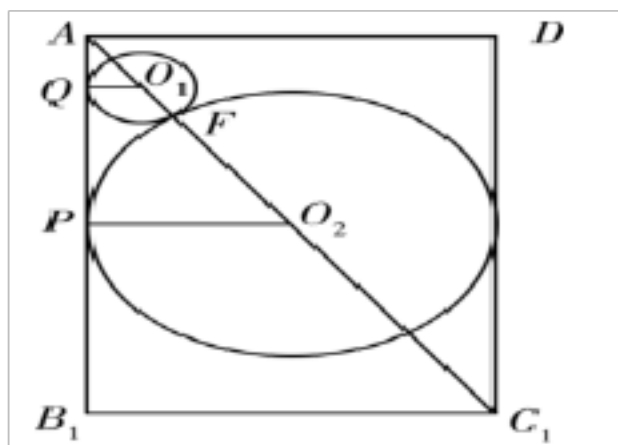
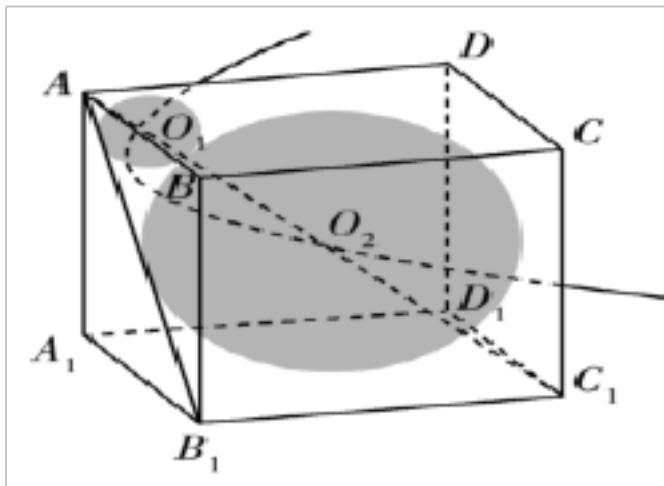
由题先画出立体图，再画出平面 $ABCD$ 处的截面图，由抛物线第一定义可知，点 O_2 到点 F 的距离即半径 r_2 ，也即点 O_2 到面 CDD_1C_1 的距离，点 O_2 到直线 AB_1 的距离即点 O_2 到面 ABB_1A_1 的距离因此球 O_2 内切于正方体，设 $r_2 = 1$ ，两球球心和公切点都在体对角线 AC_1 上，通过几何关系可转化出 r_1 ，进而求解

【详解】

根据抛物线的定义，点 O_2 到点 F 的距离与到直线 AB_1 的距离相等，其中点 O_2 到点 F 的距离即半径 r_2 ，也即点 O_2 到面 CDD_1C_1 的距离，点 O_2 到直线 AB_1 的距离即点 O_2 到面 ABB_1A_1 的距离，因此球 O_2 内切于正方体，不妨设 $r_2 = 1$ ，两个球心 O_1, O_2 和两球的切点 F 均在体对角线 AC_1 上，两个球在平面 $ABCD$ 处的截面如图所示，则

$O_2F = r_2 = 1, AO_2 = \frac{AC}{2} = \sqrt{3}$ ，所以 $AF = AO_2 - O_2F = \sqrt{3} - 1$ 。又因为 $AF = AO_1 + O_1F = \sqrt{3}r_1 + r_1$ ，因此 $(\sqrt{3} + 1)r_1 = \sqrt{3} - 1$ ，

得 $r_1 = 2 - \sqrt{3}$ ，所以 $\frac{r_1}{r_2} = 2 - \sqrt{3}$ 。



故选：D

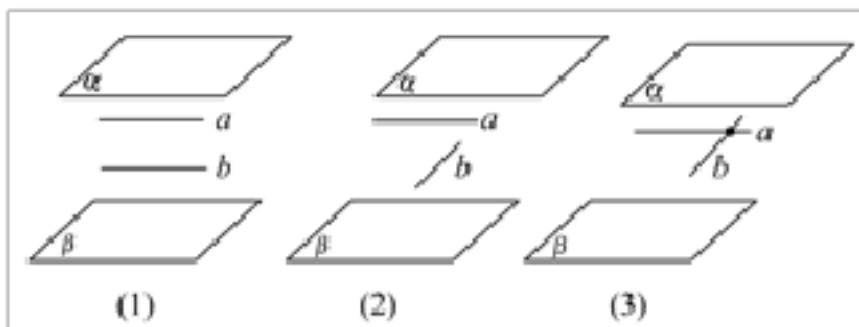
【点睛】

本题考查立体图与平面图转化，抛物线几何性质的使用，内切球的性质，数形结合思想，转化思想，直观想象与数学运算的核心素养

5、D

【解析】

结合图(1)，(2)，(3)所示的情况，可得 a 与 b 的关系分别是平行、异面或相交。



选 D.

6、D

【解析】

以 A 为坐标原点, AE 所在直线为 x 轴, AD 所在直线为 y 轴, AA_1 所在直线为 z 轴,

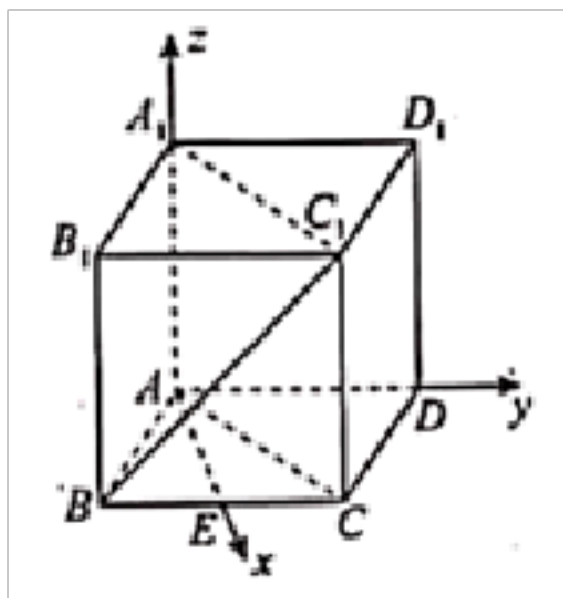
建立空间直角坐标系. 求解平面 $A_1CC_1A_1$ 的法向量, 利用线面角的向量公式即得解.

【详解】

如图所示的直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, $\angle ABC = 60^\circ$, 取 BC 中点 E ,

以 A 为坐标原点, AE 所在直线为 x 轴, AD 所在直线为 y 轴, AA_1 所在直线为 z 轴,

建立空间直角坐标系.



设 $AB = 2$, 则 $A(0,0,0)$, $A_1(0,0,2)$, $B(\sqrt{3}, -1, 0)$, $C(\sqrt{3}, 1, 0)$, $C_1(\sqrt{3}, 1, 2)$,

$\overrightarrow{BC_1} = (0, 2, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (\sqrt{3}, 1, 0)$, $\overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 2)$.

设平面 $A_1CC_1A_1$ 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = \sqrt{3}x + y = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 2z = 0, \end{cases} \quad \text{取 } x = 1,$$

得 $\vec{n} = (1, -\sqrt{3}, 0)$.

设直线 BC_1 与平面 $A_1CC_1A_1$ 所成角为 θ ,

$$\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{BC_1} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{BC_1}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|-2\sqrt{3}|}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{4}} = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\therefore \cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

\therefore 直线 BC_1 与平面 $A_1CC_1A_1$ 所成角的正切值等于 $\frac{\sqrt{15}}{5}$

故选: D

【点睛】

本题考查了向量法求解线面角，考查了学生空间想象，逻辑推理，数学运算的能力，属于中档题.

7、D

【解析】

先求函数在 $(1,4)$ 上不单调的充要条件，即 $f'(x)=0$ 在 $(1,4)$ 上有解，即可得出结论.

【详解】

$$f'(x) = 2ax - 4a - \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 - 4ax - 1}{x},$$

若 $f(x)$ 在 $(1,4)$ 上不单调，令 $g(x) = 2ax^2 - 4ax - 1$,

则函数 $g(x) = 2ax^2 - 4ax - 1$ 对称轴方程为 $x = 1$

在区间 $(1,4)$ 上有零点（可以用二分法求得）.

当 $a = 0$ 时，显然不成立；

$$\text{当 } a \neq 0 \text{ 时，只需 } \begin{cases} a > 0 \\ g(1) = -2a - 1 < 0 \\ g(4) = 16a - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\text{或 } \begin{cases} a < 0 \\ g(1) = -2a - 1 > 0 \\ g(4) = 16a - 1 < 0 \end{cases}, \text{ 解得 } a > \frac{1}{16} \text{ 或 } a < -\frac{1}{2}.$$

故选:D.

【点睛】

本题考查含参数的函数的单调性及充分不必要条件，要注意二次函数零点的求法，属于中档题.

8、C

【解析】

先根据函数奇偶性排除 B，再根据函数极值排除 A；结合特殊值即可排除 D，即可得解.

【详解】

$$\text{函数 } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(x^2 + 1)},$$

$$\text{则 } f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{\ln(x^2 + 1)} = -f(x), \text{ 所以 } f(x) \text{ 为奇函数，排除 B 选项；}$$

$$\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时， } f(x) \approx \frac{e^x}{\ln x^2} \rightarrow +\infty, \text{ 所以排除 A 选项；}$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时， } f(1) = \frac{e - e^{-1}}{\ln(1+1)} = \frac{e - e^{-1}}{\ln 2} \approx \frac{2.72 - 0.37}{0.69} \approx 3.4, \text{ 排除 D 选项；}$$

综上所述，C 为正确选项，

故选：C.

【点睛】

本题考查根据函数解析式判断函数图像，注意奇偶性、单调性、极值与特殊值的使用，属于基础题.

9、C

【解析】

根据利用 *app* 主要听音乐的人数和使用 *app* 主要看社区、新闻、资讯的人数作大小比较，可判断①的正误；计算使用 *app* 主要玩游戏的大学生所占的比例，可判断②的正误；计算使用 *app* 主要找人聊天的大学生所占的比例，可判断③的正误.综合得出结论.

【详解】

使用 *app* 主要听音乐的人数为 5380，使用 *app* 主要看社区、新闻、资讯的人数为 4450，所以①正确；

使用 *app* 主要玩游戏的人数为 8130，而调查的总人数为 56290， $\frac{8130}{56290} \approx 0.14$ ，故超过 10% 的大学生使用 *app* 主要玩游戏，所以②错误；

使用 *app* 主要找人聊天的大学生人数为 16540，因为 $\frac{16540}{56290} > \frac{1}{4}$ ，所以③正确.

故选：C.

【点睛】

本题考查统计中相关命题真假的判断，计算出相应的频数与频率是关键，考查数据处理能力，属于基础题.

10、C

【解析】

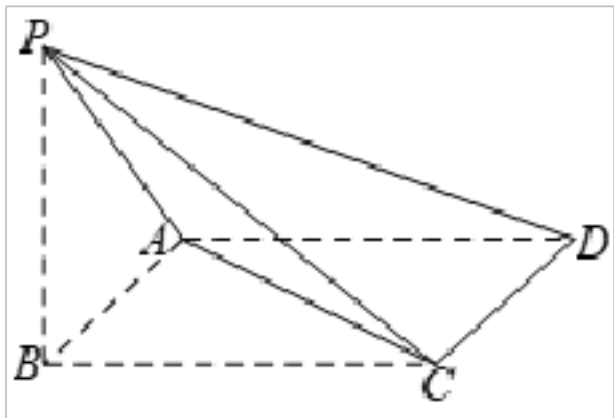
作出三棱锥的实物图 $P-ACD$ ，然后补成直四棱锥 $P-ABCD$ ，且底面为矩形，可得知三棱锥 $P-ACD$ 的外接球和

直四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球为同一个球，然后计算出矩形 $ABCD$ 的外接圆直径 AC ，利用公式 $2R = \sqrt{PB^2 + AC^2}$

可计算出外接球的直径 $2R$ ，再利用球体的表面积公式即可得出该三棱锥的外接球的表面积.

【详解】

三棱锥 $P-ACD$ 的实物图如下图所示：



将其补成直四棱锥 $P-ABCD$ ， $PB \perp$ 底面 $ABCD$ ，

可知四边形 $ABCD$ 为矩形，且 $AB = 3$ ， $BC = 4$ 。

矩形 $ABCD$ 的外接圆直径 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$ ，且 $PB = 2$ 。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/158012124042006047>