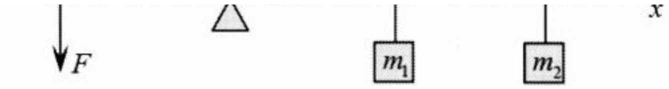
高中物理强基计划-第1部分-静力学

在高中课程的静力学模块中，我们学习了常见的力(重力、弹力、摩擦力)的性质、力的运算、共点力作用下的平衡等内容。在这个模块的课程中，我们将介绍一些重力、弹力、摩擦力的延伸和拓展内容，以及一般情况下(非共点力作用)的平衡条件及分析技巧。

1、重心的确定

从作用效果上看，物体各部分受到的重力集中于一点，这一点叫做物体的重心。在高中物理课程中我们已经学习过：质量均匀分布的、形状规则的物体，重心就在其几何中心上；并且知道可以通过悬挂法来找到物体的重心。那么，一般情况下物体的重心如何计算呢，下面我们就来研究这个问题。

我们先来看一个简单的例子。如图所示，质量不计的轻杠杆的支点为0，右端悬挂两个重物m、m_2。为了叙述方便建立如图所示的坐标轴，支点O为坐标原点，m、m_2 的位置坐标分别为x_1、x_2。为了使杠杆保持平衡，需要在左侧与0点距离为d 的点施加力F，由杠杆平衡原理可得：$Fd=m_1gx_1+m_2gx_2$。现在假想m_1、m_2的重力等效作用在某一个点上，那么这个点坐标是多少呢?



假设等效作用点的坐标为x，由于重力等效作用于该点时能产生同样的作用效果，即杠杆仍然保持平衡，可得：$Fd=(mg+m_2g)x$。

联立可得：$x=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$

上式即为重力等效作用点的位置，也就是m、m_2 两体系统重心的位置。类似的我们可以给出质点

组的重心位置坐标公式。

1. 质点组的重心

假设物体(质点组)可以看做由n个小物体(质点)组成，用m、m_2,. 和(x_1,y,z_1)、(x_2,y_2,z_2),..

分别表示各小物体(质点)的质量和位置坐标，则整体的重心位置坐标为：

$$\begin{cases} y_c = \dfrac{y_1m_1 + y_2m_2 + \cdots y_nm_n}{m_1 + m_2 + \cdots m_n} = \dfrac{\sum m_iy_i}{\sum m_i} \\ z_c = \dfrac{z_1m_1 + z_2m_2 + \cdots z_nm_n}{m_1 + m_2 + \cdots m_n} = \dfrac{\sum m_iz_i}{\sum m_i} \end{cases}$$

2. 计算重心的方法

对于一些形状不规则的物体，可能不方便直接应用上面的坐标公式求解。这时，我们可以应用对称、割补、微元等物理思想方法来处理。

(1)对称法：如果一个物体的质量分布具有某种轴对称性，则重心必在该对称轴上。

(2)割补法：对于形状不规则的物体，可以考虑通过分割、填补等办法，转化成若干可以求解的规则图形，再利用公式进行求解。

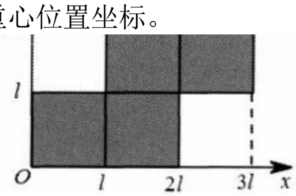
(3)微元法：将物体分割成很多极小部分(微元),在微元限度内研究对象可能会得到简化；或者微元之间可能存在某种关联，彼此可以相消，从而使问题可以比较容易地解决。

在实际处理问题时，可能需要灵活地运用多种方法，才能较好地解决问题。

在后续课程的学习中，我们会碰到“质心”这个概念。质心是指：当需要将质点组处理成一个质点时，可以认为质点组的全部质量都等效作用于一个点上，这个点就是系统的质心。

一般情况下，认为重力加速度是不变的，因此重心和质心实际是同一个位置。在坐标系中，质心和重心的计算式相同，我们介绍的求重心的方法其实也就是求质心的方法。

【例1】 如图所示，阴影部分的物体由四块边长均为1、质量均匀分布均的正方形拼接组成， 建立如图所示的坐标系，求该物体的重心位置坐标。



【解析】每个小正方形的重心都在其各自的几何中心上，坐标分别为 $\left(\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right)$ $\left(\frac{3l}{2},\frac{l}{2}\right)$ $\left(\frac{3l}{2},\frac{3l}{2}\right)$ $\left(\frac{5l}{2},\frac{3l}{2}\right)$

则根据重心坐标公式可得重心坐标为：

$$x_c=\frac{\frac{}{2}\times m+\frac{}{2}\times m+\frac{}{2}\times m+\frac{}{2}\times m}{4m}=\frac{3l}{2}$$

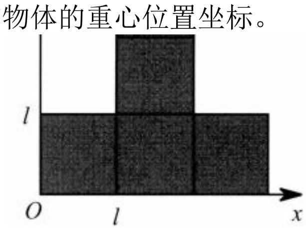
$$y_c=\frac{\frac{}{2}\times m+\frac{}{2}\times m+\frac{}{2}\times m+\frac{}{2}\times m}{4m}=l$$

【答案】 $\left(\frac{3l}{2},l\right)$

****

补充：再举几个类似的例子作为练习，例如下图。

【补充1】如图所示，阴影部分的物体由五块边长均为1、质量均匀分布均为m 的正方形拼接组成，建立如图所示的坐标系，求该物体的重心位置坐标。



【解析】每个小正方形的重心都在其各自的几何中心上，结合重心坐标公式可得重心坐标为：

$$x_c=\frac{\frac{}{2}\times m+\frac{}{2}\times 3m+\frac{}{2}\times m}{5m}=\frac{3l}{2}$$

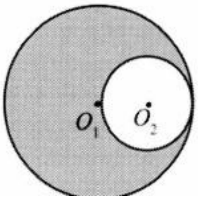
$$y_c=\frac{\frac{}{2}\times 3m+\frac{}{2}\times m+\frac{}{2}\times m}{5m}=\frac{11}{10}l$$

实际上这个图形是关于 $x=\frac{3}{2}l$ 对称的轴对称图形，其重心的位置肯定在 $x=\frac{3}{2}l$ 上，因此也可以通过对称性直接得 $x_c=\frac{3l}{2}$.

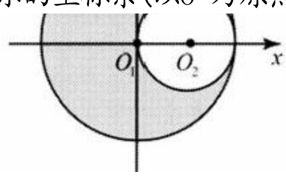
【答案】$\left(\frac{3l}{2},\frac{11}{10}l\right)$

* * ***** ** ********* ****** ***

【例2】 如图所示，阴影部分是由半径为R 的圆O 和半径为$\frac{R}{2}$的 圆O_2两部分围成的面积，且两圆内 切， $O_1O_2=\frac{R}{2}$。求质量均匀分布的阴影部分的重心位置。



【解析】为了叙述方便，首先建立如图所示的坐标系(以O 为原点， OO_2 方向为x轴)



由于阴影部分质量均匀分布且图形关于x 轴对称，因此重心必在x 轴上，即y。=0。
由于大圆O 可以看做由阴影部分和小圆O_2叠加组成，因此有：

$$x_{大圆重心}=\frac{m_{小圆}x_{小圆}+m_{阴影}x_{阴影}}{m_{小圆}+m_{阴影}}$$

由于质量均匀分布，设大圆质量为m， 则小圆质量为$\frac{小圆面积}{大圆面积}m=\frac{1}{4}m$，阴影部分面积为$\frac{3}{4}m$，

因此有： $0=\frac{\frac{3}{4}m\times x_c+\frac{1}{4}m\times\frac{R}{2}}{m}$。解得： $x_c=-\frac{R}{6}$

当然，这个问题也可以换个角度理解、我们把阴影部分看成由密度大小相同的正质量的大圆O 和负质量的小圆O2 叠加而成。大、小圆的质量分别为： ma=pmR^2、 $m_{O_2}=-\frac{1}{4}\rho\pi R^2$。则

重心位置 $x_c=\frac{0\times\left(\rho\pi R^2\right)+\frac{R}{2}\times\left(-\frac{1}{4}\rho\pi R^2\right)}{\rho\pi R^2-\frac{1}{4}\rho\pi R^2}=-\frac{R}{6}$

【答案】见解析

【例3】 如图1所示为一个质量均匀分布的太极图案，它可以看做由图2所示的圆形构成，大圆的半径为R， 小圆的半径为$\frac{R}{2}$，建立图1所示的坐标系，求阴影部分重心的y 坐标

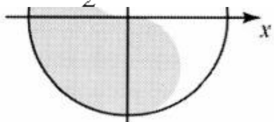


图 1

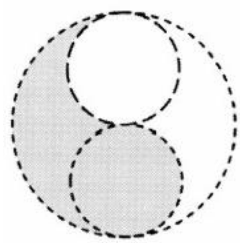
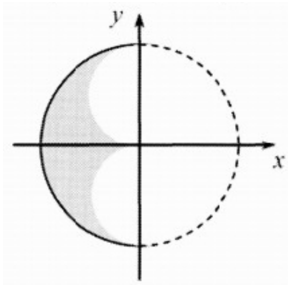
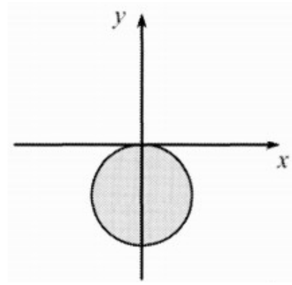


图 2

【解析】阴影部分可以分割成如下两部分：





由于图形质量均匀分布，设图形的密度为p， 则左侧图形质量，$m_1=\rho\left(\frac{1}{2}\pi R^2-\pi\frac{R^2}{4}\right)=\rho\frac{\pi R^2}{4}$

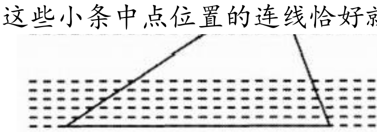
右侧图形质量 $m_2=\rho\frac{\pi R^2}{4}$。由于左侧图形关于x 轴对称，因此，其重心的y 坐标$y_1=0$， 右侧图形的重心的y 坐标$y_2=-\frac{R}{2}$。

因此，阴影部分的重心y 坐标$y_c=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}=\frac{0+\rho\frac{\pi R^2}{4}\times\left(-\frac{R}{2}\right)}{\rho\frac{\pi R^2}{4}+\rho\frac{\pi R^2}{4}}=-\frac{R}{4}$

【答案】 $-\frac{R}{4}$

【例4】 试证明质量均匀分布的三角形的重心是三条中线的交点

【答案】如图所示，可将三角形分成很多细条(微元)，由于每一个小条的高度很小(趋于零)，可以近似为矩形，因此每一小条的重心都在水平位置的中点，因此，三角形的重心一定在这些小条中点位置的连线上，而这些小条中点位置的连线恰好就是三角形底边的中线。



同理，可沿着另外两个方向划分微元，同理可证三角形的重心也一定在另外两条中线上。
因此，三角形的重心就是三条中线的交点。

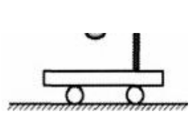
2、弹力拓展

1. 绳子和杆的弹力特点

(1)绳子只能提供拉力，不能提供支持力；杆既能提供拉力又能提供支持力。

(2)绳子的弹力一定沿绳子方向，杆的弹力不一定沿杆的方向。

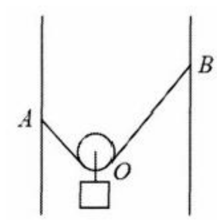
例如下图所示的情景，当小车以不同的加速度向不同方向运动时，杆对小球的力有各种不同的情况，并不一定沿杆方向。



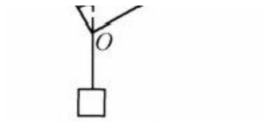
(3)不计质量的轻直杆，只有两端受力时，轻杆对两端物体的作用力一定沿杆方向。

(4)不计质量的同一根轻绳，不考虑摩擦时，绳中各处的拉力相同。对于打了死结的绳子，结两边的绳子拉力不一定相同，应看成两根绳子。

例如下图所示的情景，图甲中轻绳AB 跨过光滑定滑轮， AO、BO 段绳中拉力相同；图乙中，绳子MN 在O 点打结，悬挂重物， MO、NO 中的拉力不同

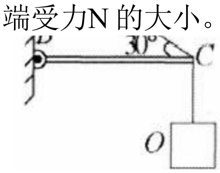


甲



乙

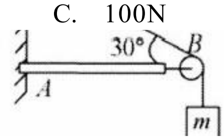
【例5】 如图所示，质量为m 的物体用细绳OC 悬挂在支架上的C 点，轻杆BC 可绕B 点转动，求细绳AC 中张力T 的大小和轻杆C 端受力N 的大小。



【答案】 T=2mg,N=√3mg

【例6】 如图所示，水平横梁一端A 插在墙壁内，另一端装有小滑轮B, 一轻绳一端C 固定于墙壁上，另一端跨过滑轮后悬挂一质量为m=10kg 的重物，∠CBA=30°， 则滑轮受到绳子作用力为

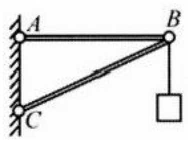
A. 50N B. 50√3N C. 100N D. 100√3N



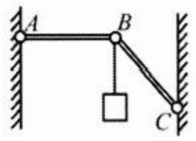
【解析】若依照上题中方法，则绳子对滑轮N=mgcot30° =100 √3, 应选择D 项；实际不然，由于杆AB 不可转动，是死杆，杆所受弹力的方向不沿杆AB 方向。由于 B 点处是滑轮，它只是改变绳中力的方向，并未改变力的大小，滑轮两侧绳上拉力大小均是100N, 夹角为120°,故而滑轮受绳子作用力即是其合力，大小为100N, 正确答案是C 而不是D

【答案】 C

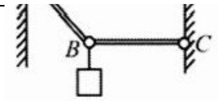
【例7】 在如图所示的四张图中， AB、BC均为轻质杆，各图中杆的A、C端都通过铰链与墙连接，两杆都在B 处由铰链相连接。图中的 AB 杆可以用与之等长的轻绳代替的有________;图中的 BC 杆可以用与之等长的轻绳代替的有_________



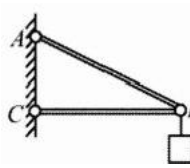
A



B



C



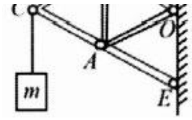
D

【答案】 ACD; C

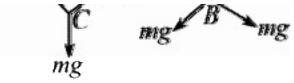
****

说明：下面补充一道涉及杆的弹力方向的问题

【补充2】6根长度相同的轻硬杆用铰链连接构成ACBOE 支架，质量为m 的重物悬挂在C 点，如图所示，问杆AB 是伸长还是压缩?这根杆上弹力多大?



【解析】两力轻直杆的受力只能沿杆方向。对B、C 两点进行受力分析，如图所示。



因此， AB 杆处于压缩状态，弹力大小为mg。

【答案】 AB 杆处于压缩状态，弹力大小为mg

****

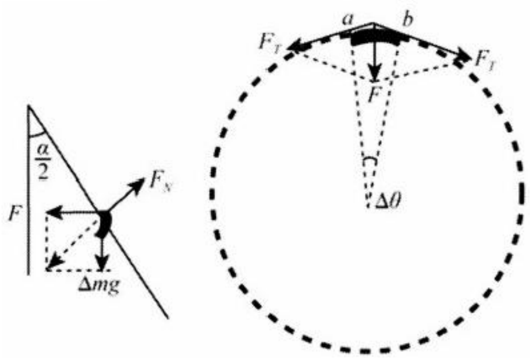
2. 利用微元法计算绳中张力

张力是指作用于轻绳或者有质量绳索(直的、弯的均可)中一小段微元上的弹性恢复力。简单来说，可以近似理解为我们前面说的拉力。在某些复杂情况下(例如绳子有质量或有摩擦等),不能对整根绳子进行分析，这时需要使用微元法分析某一小段绳中的张力。这部分内容请大家结合下面的例题学习。

【例8】 如图所示， 一根长为L、质量为M 的均匀绳索套在一表面光滑，顶角为α的圆锥上，当绳索在圆锥面上水平静止时，求绳索中的张力是多少

【解析】由于绳索质量均匀且水平静止，因此绳索的受力具有旋转对称性。如果以整条绳索为研究对象，则绳索各部分间的张力属于内力，无法求解，所以应隔离出一微元作为研究对象。

如图所示，将绳索均匀细分为n段（n→∞），取出任意一段ab为研究对象。它所对应的圆心角$\Delta\theta=\frac{2\pi}{n}\to 0$。



ab受到的力有重力$\Delta mg=\frac{Mg}{n}$；两边绳索对它的张力F，它们的大小相等，方向分别沿a、b点的切线方向，合力为F；圆锥面的支持力Fy。

由于△θ→0，因此$F=2F_T\sin\frac{\Delta\theta}{2}\approx 2F_T\frac{\Delta\theta}{2}=F_T\Delta\theta$。

由于ab处于平衡状态，由平衡条件可得：$F=\Delta mg\cot\frac{\alpha}{2}$

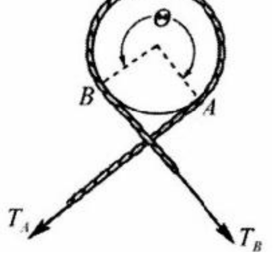
联立解得：$F_T=\frac{Mg}{2\pi}\cot\frac{\alpha}{2}$

【答案】$\frac{Mg}{2\pi}\cot\frac{\alpha}{2}$

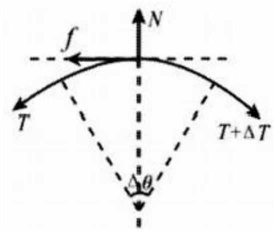
【例9】 法国科幻作家儒勒·凡尔纳在《马蒂斯·桑多尔夫》一书里描写了一个大力士马蒂夫的故事，使人印象深刻的是他用手拉住“特拉波科罗”号船这件事。当时“特拉波科罗”号船正准备下水，一艘快艇垂直驶来，两条船眼看要相撞了，马蒂夫用力抓住了挂在“特拉波科罗”号前部的绳索，把绳索绕在钉在地里的铁桩上，结果成功的拉住了“特拉波科罗”号，避免了两船相撞。实际上，这是利用了摩擦力，一个懂得力学原理的普通人也可以办到，下面我们来研究这个问题。

如图所示为一种绞盘装置，绳索绕在绞盘的固定圆柱上，当绳子一端承受负荷巨大的拉力T时，人在另一端可以用小的多的拉力拽住绳子。设绳与圆柱的动摩擦因数为μ，最大静摩擦力等于滑动摩擦力，绳子绕圆柱的张角为⊙，求为使绳索不滑动人需要提供的最小拉力T。

提示：x∈[a,b]，将区间划分为无穷多小段，每段△x→0，则对整个区间上所有小段求和有$\sum\frac{\Delta x}{x}=\ln\frac{b}{a}$。学过积分的同学，可以直接使用积分公式$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln\frac{b}{a}0$



【解析】在绳索上取一小段微元，其所对圆心角为△θ。当绳索刚好不滑动时，在图示平面内该小段绳索受4个力：两端的张力分别为T 和T+△T， 柱面对微元的弹力N、 摩擦力f=μN。



由平衡条件得：

$$(T+\Delta T)\sin\frac{\Delta\theta}{2}+T\sin\frac{\Delta\theta}{2}=N$$

$$(T+\Delta T)\cos\frac{\Delta\theta}{2}=T\cos\frac{\Delta\theta}{2}+\mu N$$

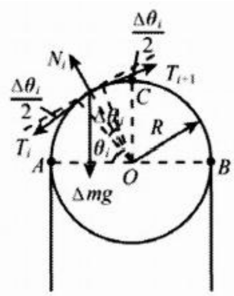
由于角度△θ很小，故有$\sin\frac{\Delta\theta}{2}\approx\frac{\Delta\theta}{2}$，$\cos\frac{\Delta\theta}{2}\approx 1$；略去高阶小量$\Delta T\cdot\frac{\Delta\theta}{2}$，可联立化简得

$\frac{\Delta T}{T}=\mu\cdot\Delta\theta$；积分可得： T_8=Te   。

【答案】 Ta=TeM⁶

【例10】质量为m、长为l 的均匀光滑绳，穿过半径为R 的光滑滑轮并搭在轮上，处于静止状态，如图所示，求绳上的最大张力。

【解析】如图所示，在绳的最高点C 处，张力最大。对竖直段绳而言，与滑轮相切的A 点（或B 点）处张力为 $T_A=\frac{l-\pi R}{2l}mg$。



圆弧段绳的张力采用微元法分析，把AC(C 为最高点)段绳无限细分，每一小段对应的圆心角△θ→0。其中第i 段绳质量为$\frac{R\Delta\theta_i}{l}m$，该段绳受到4 个力的作用：重力 $\frac{R\Delta\theta_i}{l}mg$、下方绳对它的拉力T、 上方绳对它的拉力$T_4$ 和滑轮对它的弹力N, 。

绳沿圆弧切线方向合力为零，因此，$T_{i+1}\cos\frac{\Delta\theta_i}{2}-T_i\cos\frac{\Delta\theta_i}{2}=\frac{R\Delta\theta_i}{l}mg\cos\left(\theta_i+\frac{\Delta\theta_i}{2}\right)$

由于△θ→0, $\cos\frac{\Delta\theta_i}{2}\approx 1$，可化简得：$T_{i+1}-T_i\approx\frac{mgR}{l}\cos\theta_i\cdot\Delta\theta_i$

其中， R△θ·cosθ 为圆弧沿竖直方向的投影长度，对所有微元求和可得：$T_C-T_A=\frac{mg}{l}R$；

所以绳上的最大张力为$T_C=\frac{l+(2-\pi)R}{2l}mg$

【答案】$\frac{l+(2-\pi)R}{2l}mg$

3. 弹簧的串联与并联

(1)弹簧的串联

①几个弹簧一个接一个地连接在一起，称为弹簧的串联。

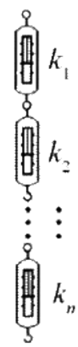
②弹簧串联的特点：各弹簧中弹力相同。

③ 设n个弹簧的劲度系数分别为、 、k···, 则串联后等效的劲度系数k满足：

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}+\cdots$$

证明如下：如图所示， n个弹簧的劲度系数分别为k、k_2、k_3···, 在弹簧最下端加力F, 每根弹簧伸长量分别为x 、x_2 、 …， 串联后弹簧的等效劲度系数

$$k=\frac{F}{x}=\frac{F}{x_1+x_2+\cdots}=\frac{1}{\frac{x_1+x_2+\cdots}{F}}=\frac{1}{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}+\cdots}$$



(2)弹簧的并联

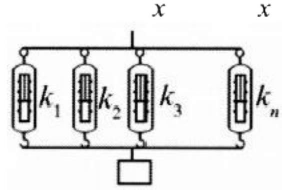
①将弹簧的一端连接在一起，另一端也连在一起，称为弹簧的并联。

②对于原长相同的弹簧，弹簧并联的特点：各弹簧的形变量相同。

③ 设n个弹簧原长相同，劲度系数分别为k、k_2、k_3···, 则并联后等效的劲度系数k满足：

$k=k+k_2+k_3+\ldots$

证明如下：如图所示， n个弹簧原长相同，劲度系数分别为k、k、k_3···, 在弹簧最下端加力F, 串联后弹簧的等效劲度系数$k=\frac{F}{x}=\frac{F_1+F_2+\cdots}{x}=k_1+k_2+k_3+\cdots$



在应用弹簧串、并联公式时一定要注意适用条件，关键是要抓住各弹簧是弹力一致还是形变量一致。

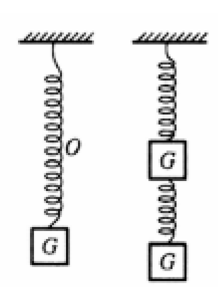
【例11】两根原长相同的轻质弹簧，将它们两端平齐地并联后，下端挂一重物，平衡时两弹簧的弹力比为2:1,若将它们串接后再挂上原重物，平衡时，两弹簧的伸长量之比为多少?

【答案】1:2

【例12】 一根弹簧的劲度系数为k, 若剪去原长的1/3,则剩下部分的劲度系数为多少

【答案】 $\frac{3}{2}k$

【例13】如图所示，在竖直悬挂的弹簧下端挂有一重物，此时弹簧的长度为L, 如将另一个同样的重物再挂在弹簧的正中间O 点，弹簧的长度增加到L_2, 假定在弹簧的弹性限度内，求不挂重物 时弹簧的长度



【解析】弹簧截短一半后它的劲度系数就变为原来的两倍。设弹簧原长为L, 劲度系数为k, 第一次挂重物G 时应有 $L_1 - L_0 = \frac{G}{k}$

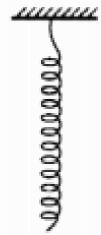
在弹簧中间再挂重物 G 时，下半段弹簧的受力为 G, 劲度系数为2k, 伸长量 $x_1 = \frac{G}{2k} = \frac{1}{2}(L_1 - L_0)$, 上半段弹簧受到作用力的大小等于2G, 其劲度系数为2k, 所以上半段弹簧的伸长量 $x_2 = \frac{2G}{2k} = L_1 - L_0$,

所以弹簧的总伸长量 $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}(L_1 - L_0)$, 又由于$x_1+x_2=L_2-L_0$

联立两式可得： $L=3L-2L_2$。

【答案】3L-2L

【例 14】一根质量均匀分布的弹簧，总质量为 m, 劲度系数为 k。 一端挂在天花板上，另一端自由下垂，求弹簧静止时的伸长量。



【解析】采用微元法，将弹簧分成n个小段（$n\to\infty$），则每个小段的劲度系数为nk。从上向下数，第 1 段的伸长量$\Delta x_1=\dfrac{\frac{n-1}{n}mg}{nk}$，第 2 段的伸长量$\Delta x_1=\dfrac{\frac{n-2}{n}mg}{nk}$，…，第$i$段的伸长量

$\Delta x_i=\dfrac{\frac{n-i}{n}mg}{nk}$ …，

因此，弹簧的总伸长量$\Delta x=\Delta x_1+\Delta x_2+\cdots+\Delta x_n=\dfrac{mg}{n^2k}\left[1+2+3+\cdots+(n-1)\right]=\dfrac{mg}{n^2k}\dfrac{n(n-1)}{2}$，

$n\to\infty$，略去小量可得：$\Delta x=\dfrac{mg}{2k}$

【答案】$\dfrac{mg}{2k}$

3、摩擦角

我们在高中物理课程中已经学习过摩擦力的内容，下面我们介绍一些相关的拓展知识，有助于大家解决一些较难的摩擦问题。

1. 全反力

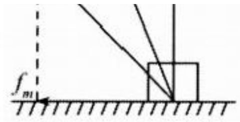
   支撑面作用于物体的弹力N （沿接触面法线方向)和摩擦力f 的合力，称为支撑面对物体的全反力。其实简单来说，全反力就是接触面对物体的全部作用力的合力(当然，这里接触面对物体最多只有支持力和摩擦力两个力的作用)。

2. 摩擦角

   令滑动摩擦因数μ等于某一角度φ的正切值，即μ=tanφ，则这个φ角就称为摩擦角。

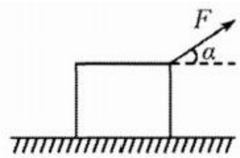
   在物体刚好要发生滑动的临界情况下，$\dfrac{f_{\max}}{N}\approx\mu=\tan\varphi$ （(μ为滑动摩擦因数),即全反力F 与接触面法线方向的夹角等于摩擦角，如图所示(图中未画其他力)。

   在一般情况下，静摩擦力f 未达到最大值，即$f\leqslant\mu N\Rightarrow\dfrac{f}{N}\leqslant\mu=\tan\varphi$。因此，全反力F’的作用线与接触面法线的夹角$\alpha=\arctan\left(\dfrac{f}{N}\right)$不能大于摩擦角，即α≤φ。


f_m

摩擦角可以作为判断物体是否发生滑动的条件。先假设物体处于静止状态，如果全反力与接触面法线的夹角 α＜φ，则物体不会滑动；如果 α＝φ，则物体处于刚好发生滑动的临界状态，如果 α＞φ，则物体将发生滑动。

【例15】木箱重为G，与地面间的动摩擦因数为μ，用斜向上的力F 拉木箱使之沿水平地面匀速前进，如图所示，求拉力F 的最小值。



【解析】方法一：本题的常规解法可以通过正交分解来求解。

物体受力情况如图所示，物体做匀速直线运动，因此由平衡条件有：

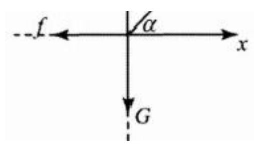
$F\cos\alpha - f = 0$

$N + F\sin\alpha - G = 0$

$f = \mu N$

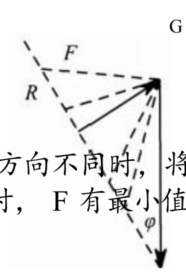
联立解得：$F\cos\alpha + \mu F\sin\alpha = \mu G \Rightarrow F = \dfrac{\mu G}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha}$

由三角函数知识可知：当 α =arctanμ 时，F 有最小值$F_{min} = \dfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}G$。



方法二：本题也可以利用摩擦角的知识求解。

用全反力R 代替摩擦力力f 和支持力N，则R 与y 轴夹角为 φ=arctanμ。物体受到重力G、拉力F、全反力R 保持平衡状态，则这三个力构成闭合三角形。



如图所示，当拉力F 的方向不同时，将组成不同的闭合三角形，对应的F、R 大小不同。显然，当F⊥R 时，F 有最小值。

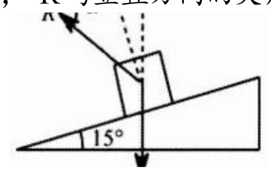
$F_{min} = G\sin\varphi = \dfrac{\mu G}{\sqrt{1+\mu^2}}$

【答案】

$F_{min} = \dfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}G$

【例16】明理同学平时注意锻炼身体，力量较大，最多能提起M=50kg 的物体， 一重物放置在倾角θ=15° 的粗糙斜坡上，重物与斜坡间的滑动摩擦因数为$\mu=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx0.58$。试求该同学向上拉动的重物质量m 的最大值?

【解析】根据题意，明理同学的最大拉力F=500N。 当它刚好拉动斜面上的物体时，物体受重力mg、拉力F、支持力N和摩擦力f, 用全反力R代替支持力N和摩擦力f, 如图所示， R与N之间的夹角为arctanμ=30°, 因此， R与竖直方向的夹角为15°+30°=45°。



物体受到mg、F、R 三个力保持平衡，则三个力应构成闭合三角形，由正弦定理得:

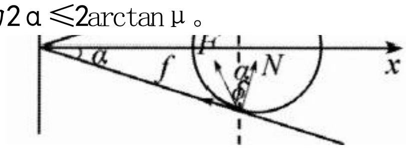
$$\frac{mg}{\sin\alpha}=\frac{F}{\sin45^\circ}$$

当α=90°时，mg有最大值 √2F=500 √2N, 因此明理同学最大能拉动50 √2kg的物体。

【答案】明理同学最大能拉动50 √2kg的物体

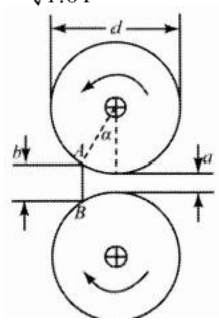
【例17】我们来讨论一个筷子夹鸡蛋的问题。为了讨论问题方便，假设鸡蛋是球形的，筷子与鸡蛋间的滑动摩擦因数为μ,如图所示，将鸡蛋放在光滑水平桌面上，用筷子夹住鸡蛋，求筷子张角多大时，鸡蛋不会从筷子之间滑出。(注意本题不考虑上下运动，只考虑桌面内的运动)

【解析】如图所示，筷子夹住鸡蛋时，每根筷子对鸡蛋有压力N 和摩擦力f 两个力的作用。如果用全反力F 代替这两个力，则鸡蛋只受两个全反力的作用(有两根筷子)，F 与N 的夹角φ≤arctanμ。设N 与y 轴夹角为α,若φ≥α,则两个全反力的合力始终指向-x 方向，鸡蛋不会滑出。因此，当鸡蛋不会从筷子之间滑出时，有： arctanμ≥φ≥a, 由几何关系易知，此时两筷子之间的夹角为2α≤2arctanμ。



【答案】当筷子间的夹角小于2arctanμ时，鸡蛋不会从筷子之间滑出。

【例18】压延机由两轮构成，两轮的直径均为d=50cm， 轮间的间隙为a=0.5cm， 两轮按反方向转动，如图中箭头所示。已知烧红的铁板和铸铁轮之间的摩擦因数为μ=0.1 ，求压延机能压延的铁板厚度b 是多少？（提示：$\frac{1}{\sqrt{1.01}}\approx 0.99504$ ）

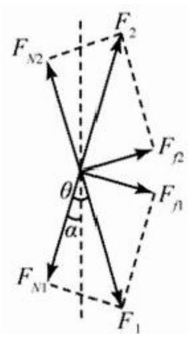


【解析】本题可以近似认为是共点力平衡问题，因此也可以利用正交分解法求解。下面我们介绍利用摩擦角求解的方法。

铁板的A 、B两点和铸铁轮接触，接触点与转轴连线的夹角为α。在A点铁板受到Fm和Fn两个力，在B 点铁板受到$Fx_2$2和Fy_2两个力，如图所示，由全反力F、F2代替两组压力和摩 擦力。要使铁板能压延，则两个全反力的合力方向必须向右，即α≤arctanμ=arctan0.1。

因此铁板的最大厚度为b=a+2(r−rcosα)≤7.48mm

所以能压延的铁板厚度为7.48mm

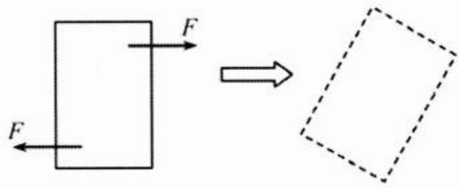


【答案】7.48mm

4、物体的平衡

在高中物理课程中我们已经学习过物体处于平衡状态是指：物体保持静止或匀速直线运动状态；而物体在共点力作用下达到平衡状态的条件是：物体所受合外力为零，即$\sum F=0$。

当物体所受外力不是共点力时，仅有ΣF=0 这个条件是不能保证物体处于平衡状态的。例如，对一张纸(或一本书)施加一对等大、反向但不共线的力，纸(或书)并不能保持静止，而是会发生旋转。



实际上，当物体所受外力不是共点力时， $\sum F=0$只能保证物体没有平动的加速度；要使物体处于平衡状态，还要增加一个限制条件保证物体不发生转动。

这个条件简单来说就是初中的杠杆平衡原理。任选一个支点，物体所受的各个力有使物体绕支点顺时针或逆时针转动的效果，不妨设使物体顺时针转动的力为动力，则逆时针转动的力为阻力，根据杠杆平衡原理，如果物体不发生转动，则：

动力x 动力臂=阻力x 阻力臂

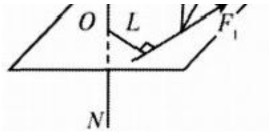
只不过在复杂问题中动力和阻力不止一个，因此要求：

动力1×动力臂1+动力2×动力臂2+…=阻力1×阻力臂1+阻力2×阻力臂2+…

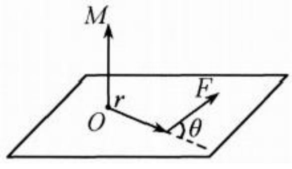
所以， **对于一般物体的平衡，要求**$\sum F=0$,再结合杠杆平衡保证不发生转动即可。不过在高中阶段，一般不把转动平衡的条件称为杠杆原理，而是使用一些更专业的概念。

1. 力矩

对于绕某固定转轴转动的物体(即物体在垂直于转轴的平面内转动),如果力的作用线在与转轴垂直的平面内，则该平面内转轴到力的作用线的垂直距离称为力臂，力与力臂的乘积称为力矩。如果力的作用线与转轴平行，则力矩为零。如果力既不在垂直于转轴的平面内，又不平行于转轴，例如图中所示的情景， MN 为转轴，可以将F 分解为平行于轴的F_2 和在转轴垂直平面内的F， 则F_2 对转轴的力矩为零， F 对转轴的力矩等于力臂L 和F 的乘积，这个力矩也就是力F 对转轴的力矩。



一般情况下，物体绕某个支点转动， F 表示力， r 表示支点到力的作用点的矢径，则力矩定义为M=rxF。



当然在解题中遇到矢量运算的情况很少，通常遇到的是物体绕固定轴转动的情况(即物体在平面内运动),通常规定使物体绕轴逆时针转动的力矩为正值，顺时针转动的力矩为负值(或规定顺时针转动的力矩为正，则逆时针转动的力矩为负也可以)。因此，大家只要能判断力矩是顺时针还是逆时针方向即可。

2. 一般物体的平衡条件

(1)物体所受的合外力为零， $\sum F=0$

(2)对任意转轴的合外力矩为零，即$\sum \overline{M}=0$

注意：上式为矢量式，写成分量形式时，分别对应x、y、z 三个方向，共六个方程。

对于平面力系作用下(即各力在同一平面内)的物体，平衡条件可以写成分量形式： $\sum F=0$, $\sum F,=0$, $\sum M_2=0$ (对任意垂直于平面的z轴)

说明：可以证明，合力为零时，当所有力对某一点的合力矩为零时，对任意点的合力矩都等于零，因此，可以选择任意垂直于平面的转轴。

****
说明：补充平衡条件的其它形式，即用力矩方程代替力的平衡方程。

(1)若在平面内选择两参考点O 和 O'，平衡条件也可用一个力的平衡方程和两个力矩平衡方程表示：

$$ZF=0,\sum M_2=0,ZM_2=0$$

其中0 与0 ’的连线不可与x 轴垂直，否则方程不独立。

⑵还可以在力的作用平面内选三个参考点0、0 ’和0”，将平衡条件写成对0₂、0’、0. ”三个转轴的力矩平衡方程：

$$ZM_2=0,\sum M_2=0,\sum M,=0$$

这 里 0，O',0" 三点不能在同一直线上，否则方程不独立。

; ***********

3. 力偶

两个大小相等，方向相反而不在同一条直线上的力，叫做力偶。力偶的合力等于零，而合外力矩不为零。因此，力偶的作用是使物体只发生转动而不发生平动。

************************** ***********

说明：这部分的例题相对比较简单，先通过简单题让我们了解对于非共点力的平衡也要满足合外力为零的条件，然后让我们熟悉力矩平衡条件，最后给出几个简单的同时应用受力平衡和力矩平衡的题目。对于研究对象的选择(整体、隔离)、支点的选择等技巧，在这里先不涉及，在后面的模块中会专门练习。

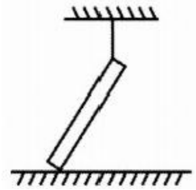
****

* * * **

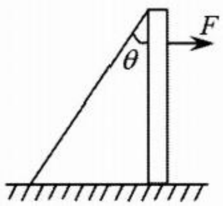
例题说明：下面几道题目只需用到受力平衡，主要是让我们了解，在非共点力作用下，物体平衡也要满足合外力为零的条件。

**** ** ** ** ** ** ** ****** **

【例19】(1)均匀长棒的一端搁在粗糙地面上，另一端用细线系在天花板上，如图所示，若细线竖直，试求地面对长棒的摩擦力

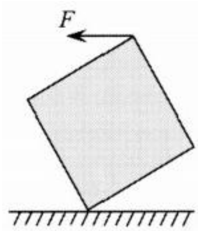


(2)如图所示，质量为m 的木棒放在水平地面上(不连接)，另一端通过轻绳栓接在地面上，绳子张力为T、与竖直方向夹角为θ，用水平向右的力F 拉住，木棒处于平衡状态，求地面对木板的支持力和摩擦力



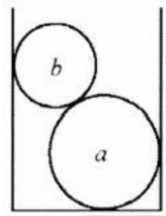
【答案】(1)摩擦力为零；(2)支持力mg+Tcosθ， 摩 擦 力F-Tsinθ （水平向左为正）

【例20】如图所示，质量为m 的木箱放在地面上，在水平拉力F 的作用下处于平衡状态。求地面对箱子的支持力N 和摩擦力f。



【答案】支持力N=mg, 摩擦力f=F

【例21】两刚性球a和b的质量分别为m。和m,、直径分别为d。和d。(da>do)。将a、b球依次放入一竖直放置、内径为d(d。<d<d。+d,)的平底圆筒内，如图所示。设a、b 两球静止时对圆筒侧面的压力大小分别为F 和F2, 筒底所受的压力大小为F。 已知重力加速度大小为g。 若所有接触都是光滑的，则



A. F=(ma+m。)g F=F_2 B.F=(ma+m。)g F≠F_2

C. mag<F<(m_2+m_0)g F=E D.m.g<F<(m_4+m_8)g,F≠F_2

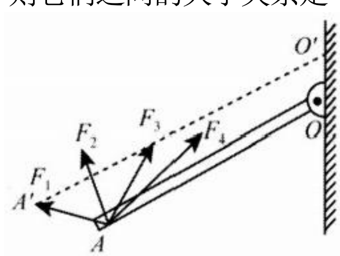
【答案】A

* * *** *** ** *** *** *** **

例题说明：下面几道题目考察力矩的概念及力矩平衡条件。

*********************** **

【例22】如图所示，直杆OA 可绕过O 点的水平轴自由转动，图中虚线与杆平行，杆的另一端A 点受到四个力F、F、F、F_4 的作用，力的作用线与OA杆在同一竖直平面内，它们对转轴O 的力矩分别为M、M_2、M_3、M_4, 则它们之间的大小关系是



A. M_1=M_2>M_3=M_4

B. M_2>M_1=M3>M_4

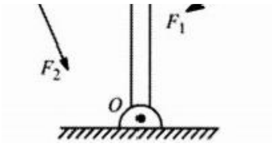
C. M_4>M_2>M_3>M

D. M_2>M_1>M_3>M_4

【解析】将各力分解成沿杆方向和垂直于杆方向的两个力，沿杆方向分力矩为零，只需比较后者的力矩即可。

【答案】B

【例23】 如图所示， T字形架子ABO可绕过O点且垂直于纸面的转动轴自由转动。现在其A端与B端分别施以图示方向的力F 和F， 则关于F 和F_2 的力矩M_1 和M_2， 下列说法中正确的是



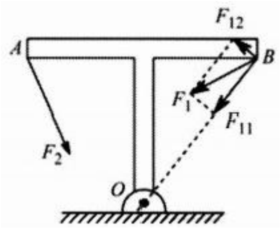
A. 都是顺时针的

B. 都是逆时针的

C. M,是顺时针的， M_2 是逆时针的

D.M, 是逆时针的， M_2 是顺时针的

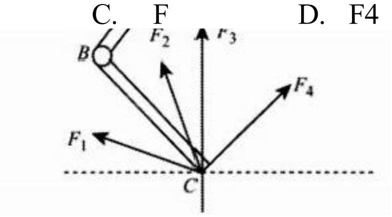
【解析】把F 按下图所示分解成两个分力F_1 和F_2,F 的力矩与Fn 和F_2 共同产生的力矩是等效的，而F_1 的作用线过转动轴，所以没有力矩，于是只要看F_2 的力矩就行了，而F_2 的力矩很明显是逆时针的，所以F 的力矩应为逆时针的，同理可以得出F_2 的力矩也是逆时针的，故选B。



【答案】 B

【例24】 如图所示，质量均匀的棒AB、BC用铰链连接在一起，A端用铰链连接在天花板上，现在C端作用一个力使得两棒平衡在如图所示的位置，则四个力中可能的是

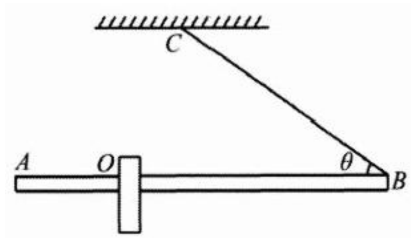
A. F　　B. F_2　　C. F　　D. F4



【解析】以B 为转轴，分析BC 杆，使BC 力矩平衡， F、F、F_4 满足要求；以A 为转轴，分析ABC 整体，使ABC 力矩平衡， F、F 满足要求。本题同时要求使BC、AB 均平衡，只有F2满足要求。故本题选B。

【答案】 B

【例25】如图所示，均匀长板AB 重300N、 长为12m， 可绕过0 点的水平轴转动， 0 点距A 点为4m, B端用轻绳系于天花板上的C 点， BC与杆成θ=30° 角，板恰好水平，绳子能承受的最大拉力为200N， 有一重为500N 的人在板上行走，求人能安全行走的范围从0 点左方_____m 到O 点右方_________m。



【解析】设当绳的拉力为零时，人在板左侧xm 处，有 $m_{人}g\cdot x=m_{板}g\left(\frac{L_{AB}}{2}-L_{AO}\right)$

解得： x=1.2m;

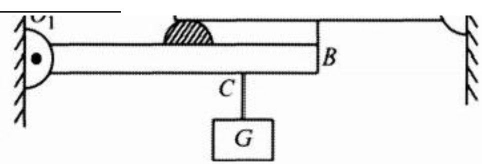
当绳上拉力最大时，人在板右侧x' m 处，有 $m_{人}gx'+m_{板}g\left(\frac{L_{AB}}{2}-L_{AO}\right)=T_{\max}\cdot\overline{OB}\cdot\sin 30^{\circ}$，

解得： x'=0.4m。

故人能安全行走范围在0 点以左1.2m 到 0 点以右0.4m。

【答案】人能安全行走范围在0 点以左1.2m 到0 点以右0.4m

【例26】如图所示，质量不计的杆0,B和O_2A， 长度均为L, 0 和O_2 为光滑固定转轴， A 处有一凸起物搁在O,B 的中点， B 处用细绳系于O_2A的中点，此时两短杆组合成一根长杆，今在O,B杆上的C 点 (C 为 AB 的中点) 悬挂一重为G 的物体，则A处受到的支撑力大小为__________ B 处细绳的拉力大小为___________



【解析】取O 为转轴，分析杆O,B有： $N_{A}\cdot\frac{L}{2}+G\cdot\frac{3}{4}L=T_{B}\cdot L$;

取O_2 为转轴，分析杆O_2A 有 $N'_{A}\cdot L=T'_{B}\cdot\frac{L}{2}$

其中， $N=N_4,T=T_8$;

解得 $N_{A}=\frac{G}{2}$,TB=G。

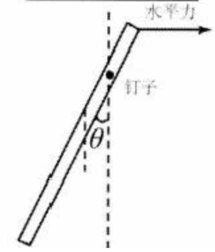
【答案】 $N_{A}=\frac{G}{2}$,T8=G

* ** ********: ***************************

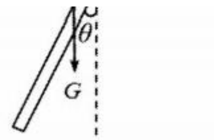
例题说明：下面几道题目需要同时考虑受力平衡和力矩平衡条件，让我们了解物体平衡时要同时满足两类方程。

** *********************** *****************

【例27】如图所示， 一均匀细杆长1m， 重力为G， 在距其上端25cm 处用一钉子将其钉在铅直墙面上，使细杆可绕此钉子无摩擦地旋转。今施一水平力于其上端，使细杆偏离铅垂线θ角(θ<90°)而平衡，则钉子作用在轴上的力为____________。



【解析】如图所示，杆受到重力G、 水平拉力F、 钉子对杆的作用力N。 其中N 的方向未知，不妨设N与竖直方向夹角为a



物体处于平衡状态，先列出受力平衡方程：

$N\sin\alpha=F$

$N\cos\alpha=G$

只有这两个方程还不够求解，我们还需要列出一个力矩平衡方程，选择过钉子位置垂直于纸面的轴为转轴(对于平面力系，默认选择的转轴是垂直于力所在平面的，不再强调，比如这个转轴就简称为以钉子为转轴)，设杆长为1有：

$F\cdot\frac{l}{4}\cos\theta=G\cdot\frac{l}{4}\sin\theta$

解得： $F=G\tan\theta$， $N=\sqrt{F^2+G^2}=\frac{G}{\cos\theta}$

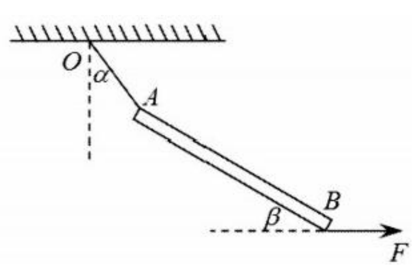
其实，这道题我们也可以稍微做些变通，先由力矩平衡方程求出F， 再根据物体受到G、F、N保持平衡可知N与G、F 的合力等大、反向、共线，也可得到 $N=\sqrt{F^2+G^2}=\frac{G}{\cos\theta}$。

【答案】 $\frac{G}{\cos\theta}$

【例28】如图所示， 一根重8N 的均质直棒AB， 其A 端用悬线悬挂在O 点，现用F=6N 的水平恒力作用于B端，当达到静止平衡后，试求：

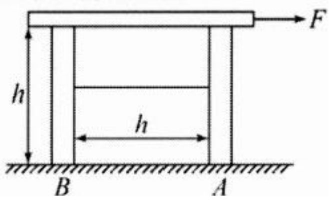
(1)悬绳与竖直方向的夹角α；

(2)直棒与水平方向的夹角β。

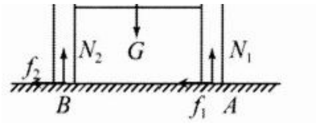


【答案】α=37°；$\beta=\arctan\frac{2}{3}$

【例29】如图所示，方桌重G=100N，　前后腿与地面的动摩擦因数μ=0.20,桌的宽与高相等。求方桌刚好不发生滑动时，拉力F、　地面对前、后腿的支持力和摩擦力。(提示：此时地面对方桌前后腿的摩擦力都达到各自的最大静摩擦力)



【解析】如图所示，物体受到重力G、　拉力F、　地面对前腿的支持力N、　摩擦力f、　地面对后腿的支持力N_2、摩擦力。



由物体的平衡条件有：

$$\sum F_x = F - (f_1 + f_2) = 0$$

$2F,=N_1+N_2-G=0$

其中，　$f_1=\mu N, f_2=\mu N$

我们发现仅有这四个方程还不够求解，还要结合一个力矩平衡方程。不妨选过A点为转轴，有：

$Fh + N_2 h - G\dfrac{h}{2} = 0$（以顺时针方向力矩为正，逆时针方向为负）

由以上五式带入数据联立求解可得：　$F=20N, N_2=30N, N_1=70N, f_1=14N, f_2=6N$。

【答案】 $F=20N, N_2=30N, N_1=70N, f_1=14N, f_2=6N$

****

说明：从上题中可以看出，前后腿对桌面的支持力不一定相等。我们可以选用下面这个类似的问题进行分析。

【补充3】如图所示，将一根粗细不均匀的棒水平放在伸出的两个手指上，缓慢移动两手指，则它们总是在棒的重心位置相遇，试解释这个现象.

【答案】若左手指比右手指离棒的重心远，则左手指受到的压力小于右手指受到的压力，最大静摩擦力f左<f右，故左手指先滑动；　一旦左手指比右手指离重心较近时，则f>　　，左手指停止滑动，右手指开始滑动.如此反复，最终两手指会在重心位置相遇。

****

在研究共点力的平衡问题时，我们讨论过整体法与隔离法；当系统内力为未知力，而题目又不要求求出此力时，我们可以选择整体为研究对象，从而达到消减未知数(“藏力”)、简化问题的目的。在非共点力平衡问题中，我们同样可以通过一些技巧达到消减未知数(“藏力”)、简化问题的目的。下面我们来介绍高中常用的三大“藏力”技巧。