《离散数学》

8-函数 (Function)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2023 年 11 月 9 日

主要内容

- 函数的基本概念
- 集合基数
- 可计算性理论简介

函数的基本概念

什么是函数?

我们已经接触到各式各样的函数，比如:

- $f(x) = x^2 + 1$
- $f(x) = \sin x + \cos 2x$
- $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$
- $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

可以看到，这些函数其实反映了 x 与 y 的某种关系，现在我们从关系的角度来给出函数的定义。

定义 1 **[函数].**

令 f 是一个 A 到 B 的二元关系，若 $\mathrm{dom}(f) = A$ 并且对于任意 $x \in \mathrm{dom}(f)$。存在唯一的 $y \in \mathrm{ran}(f)$ 使得 $(x, y) \in f$，则称 f 是 A 到 B 的函数（映射），记作 $f : A \to B$。xfy 也被记作 $y = f(x)$，并称 y 为 f 在 x 的值。

例 2.

1. $f_1 = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1)\}$ 是一个函数。
2. $f_2 = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_1, y_2)\}$ 不是一个函数。

补充说明

1. 上述定义对多元函数也是符合的，因为 x 可以理解成一个 n 元组。
2. 如果 $\mathrm{dom}(f) \subset A$，则称 f 是 A 到 B 的部分函数 (Partial Function)。

由上述可知，一个函数可以看成一个集合，因此两个函数相等可以视作两个集合相等。

定义 3 **[函数相等].**

令 F, G 是函数，则 $F = G \Leftrightarrow F \subseteq G \land G \subseteq F$，即若 $F = G$ 则我们有：

1. $\mathrm{dom}(F) = \mathrm{dom}(G)$
2. $\forall x \in \mathrm{dom}(F),\ F(x) = G(x)$

例 4.

1. 函数 $f(x) = x - 1$ 和 $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ 是不相等的。
2. 函数 $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$ 与函数 $g(x) = \cos 2x$ 是相等的。

- 像：令函数 $f: A \to B$，$A_1 \subseteq A$，则 $f(A_1) = \{f(x) \mid x \in A_1\}$ 称为 A_1 在 f 下的像。
- 完全原像：令函数 $f: A \to B$，$B_1 \subseteq B$，则 $f^{-1}(B_1) = \{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B_1\}$ 称为 B_1 在 f 下的完全原像。
- 函数集合 B^A：令 B^A 表示所有从 A 到 B 的函数的集合。

例 5.

令 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}$，$f = \{(1, a), (2, a).(3, b)\}$，$A_1 = \{1, 2\}$，$B_1 = \{a\}$，则：

1. f 在 A_1 下的像为 $f(A_1) = \{a\}$.
2. f 在 B_1 下的完全原像为 $f^{-1}(B_1) = \{1, 2\}$.
3. $B^A = \{f_0, \ldots f_7\}$，这里 $f_0 \sim f_7$ 代表 A 到 B 的不同的 8 个函数。

- 常值函数：设 $f: A \to B$，如果存在 $c \in B$ 使得对所有的 $x \in A$，都有 $f(x) = c$，即 $f(A) = \{c\}$，则称 f 是常值函数。
- 恒等函数：集合 A 上的恒等关系 I_A 被称作恒等函数，即对于任意的 $x \in A$，都有 $I_A(x) = x$。
- 特征函数：令 A 是集合，对于 $A' \subseteq A$。定义 A 上的特征函数 $\chi_{A'}$ 为：

$$\chi_{A'}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A' \\ 0, & x \notin A' \end{cases}$$

- n 元运算：我们将函数 $f : A^n \to A$ 称为 A 上的 n 元运算。
    - $f(x, y) = x + y$，$f(x, y, z) = x + y \cdot z$ 定义了 A 上的二元运算和三元运算。
- 单调函数：令 $(A, \leqslant_A), (B, \leqslant_B)$ 是一个偏序集，$f : A \to B$:
    - 如果对于任意的 $x, y \in A$，都有 $x \leqslant_A y \Rightarrow f(x) \leqslant_B f(y)$，则称 f 是单调递增函数
    - 如果对于任意的 $x, y \in A$，都有 $x <_A y \Rightarrow f(x) <_B f(y)$，则称 f 是严格单调递增函数

  类似可定义单调递减函数和严格单调递减函数。
- 泛函：称 $f : A \to C^B$ 称为一个泛函。

  比如：令 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, F(a) = (f_a(x) = x + a)$，$F$ 也可以写成：$F : a \to [x \to a]$:
    - $F(1) = f_1(x) = x + 1$
    - $F(2)(3) = f_2(3) = 3 + 2 = 5$

在目前函数的定义上，我们要求了 $\mathrm{dom}(f) = A$，即每一个 A 中的元素都有唯一的一个函数值。下面我们再定义基于此的一些函数的性质，

定义 6 **[单射 (Injective/One-to-one)].**

令 $f : A \to B$，如果对于任意的 $x, y \in A$，都有 $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$，则称 f 是单射。

定义 7 **[满射 (Surjective/Onto)].**

令 $f : A \to B$，如果对于任意的 $y \in B$，都存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$，则称 f 是满射。

定义 8 **[双射 (Bijective/One-to-one correspondence)].**

令 $f : A \to B$，如果 f 是单射且满射，则称 f 是双射。双射也被称为一一映射。

Shanghai Normal University

例 9.

请判断，下列函数是否为单射、满射、双射。

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x^2.$
2. $f_2 : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R},\ f_2(x) = \ln x.$
3. $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ f_3(x) = \lceil x \rceil.$
4. $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_4(x) = 2x + 1.$

解 10.

1. f_1 不是单射，也不是满射。
2. f_2 是单射，但是不是满射。
3. f_3 是满射，但是不是单射。
4. f_4 是双射。

例 11.

请根据下列集合 A 和 B 给出一个函数 $f: A \to B$，使得 f 是双射。

1. $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{a, b, c\}$.
2. $A = \mathscr{P}(\{1, 2, 3\}),\ B = \{0, 1\}^{\{1,2,3\}}$
3. $A = \mathbb{Z},\ B = \mathbb{N}$.
4. $A = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ B = \mathbb{R}$

解 12.

1. $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$.
2. $f = \{(A_i, f_i)\}$.
3. $f = \begin{cases} 2x + 1, & x \geqslant 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$.
4. $f = \tan x$.

函数是一种特殊的关系，因此我们也可以在其上面进行复合与逆运算。先来考虑复合运算。

定理 13 **[函数的复合].**

给定两个函数 $f : A \to B$ 和 $g : B \to C$，则:

1. 其复合 $f \circ g$ 也是函数。
2. $f \circ g(x) = g(f(x))$.

额外说明

可以看到，由于我们关系的定义用的是右复合，所以我们会有:

$$f \circ g(x) = g(f(x))$$

有的书上会用左复合，则函数复合的形式会转换为：$f \circ g(x) = f(g(x))$.

证明.

1. 我们先证明 $f \circ g$ 是个函数。
   - $\forall x \in A$，存在 $y \in B$ s.t. $f(x) = y$. 由于 g 是函数，从而存在 $z \in C$ s.t. $g(y) = z$，因此 $(x, z) \in f \circ g$，即 $\mathrm{dom}(f \circ g) = A$.
   - 假设存在 $x \in A$ s.t. $(x, y_1), (x, y_2) \in f \circ g$，则存在 z_1，$z_2 \in B$ s.t. $(x, z_1), (x, z_2) \in f, (z_1, y_1), (z_2, y_2) \in g$，由函数的定义 $z_1 = z_2$，从而 $y_1 = y_2$，即 $f \circ g$ 是函数。
2. 对任意的 $x \in A$，我们有 $(x, f(x)) \in f, (f(x), g(f(x))) \in g$，从而 $(x, g(f(x))) \in f \circ g$，即 $f \circ g(x) = g(f(x))$.

$\square$

定理 14 **[函数的逆].**

给定函数 $f: A \to B$，则 f^{-1} 也是函数当且仅当 f 是双射。

证明.

- $(\Rightarrow)$ 假设 f^{-1} 是函数。则对于任意的 $y \in B$，都存在 $x \in A$ s.t. $f^{-1}(y) = x$，即 $f(x) = y$，从而 f 是满射。f 是单射则是显然的，否则:

$$(x_1, y), (x_2), y \in f \Rightarrow (y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$$

从而 f^{-1} 不是函数。因此 f 是双射。

- $(\Leftarrow)$先证 f^{-1} 的定义域是B。

$$\forall x \in B \exists y \in A\ f(y) = x \Rightarrow f(x) = y \Rightarrow x \in \mathrm{dom}(f^{-1}) \Rightarrow \mathrm{dom}(f^{-1}) = B$$

再证 f^{-1} 是函数。若 $(x, y_1), (x, y_2) \in f^{-1}$，则 $(y_1, x), (y_2, x) \in f$，从而 $y_1 = y_2$，即 f^{-1} 是函数。

□

定义 15 **[反函数].**

对于一个双射 $f : A \to B$，我们称其逆 f^{-1} 为反函数。

例 16.

令 $f(x) = x + 2$，$g(x) = x^2$ 都是 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的函数，则我们有:

- f 的反函数为 $f^{-1}(x) = x - 2.$
- g 不是双射，因此不存在反函数。
- $f \circ g(x) = g(f(x)) = x^2 + 4x + 4$
- $g \circ f(x) = f(g(x)) = x^2 + 2$

定理 17.

给定函数 $f: A \to B$，$g: B \to C$，则:

1. 若 f 和 g 都是单射，则 $f \circ g$ 也是单射。
2. 若 f 和 g 都是满射，则 $f \circ g$ 也是满射。
3. 若 f 和 g 都是双射，则 $f \circ g$ 也是双射。
4. $f = f \circ I_B = I_A \circ f$
5. 若 f 是双射，则有 $f \circ f^{-1} = I_A$，$f^{-1} \circ f = I_B$.

证明.

1. 假设存在 $x_1, x_2 \in A$ s.t. $f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2)$，则 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，由于 g 是单射，从而 $f(x_1) = f(x_2)$，由于 f 是单射，从而 $x_1 = x_2$，即 $f \circ g$ 是单射。
2. 对 $\forall x \in C$，存在 $y \in B$ s.t. $g(y) = x$，由于 f 是满射，从而存在 $z \in A$ s.t. $f(z) = y$，从而 $f \circ g(z) = x$，即 $f \circ g$ 是满射。
3. 由上述性质立马可得。
4. 只证 $f = f \circ I_B$.

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow (x, y) \in f \wedge (y, y) \in I_B \Leftrightarrow (x, y) \in f \circ I_B$$

5. 只证 $f \circ f^{-1} = I_A$.

$$(x, y) \in f \circ f^{-1} \Leftrightarrow \exists z (x, z) \in f \wedge (z, y) \in f^{-1} \Leftrightarrow (z, x), (z, y) \in f^{-1} \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow (x, y) \in I_A$$

□

集合基数

无限集合的衡量

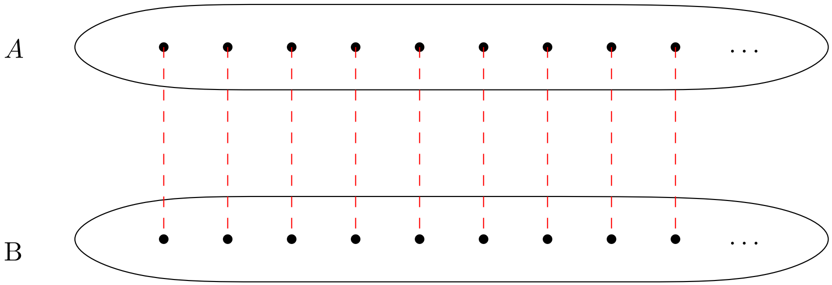
判断有限集合之间的大小我们可以用元素个数来衡量，但是对于无限集合，我们该如何衡量其大小呢?

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ 哪个更大?

我们利用双射函数的概念来对无限集合进行比较。

定义 18 **[集合等势].**

令 A, B 是两个集合，如果存在一个双射 $f: A \to B$，则称 A 与 B 等势，记作 $A \approx B$，若 A 和 B 不等势，则记作 $A \not\approx B$.

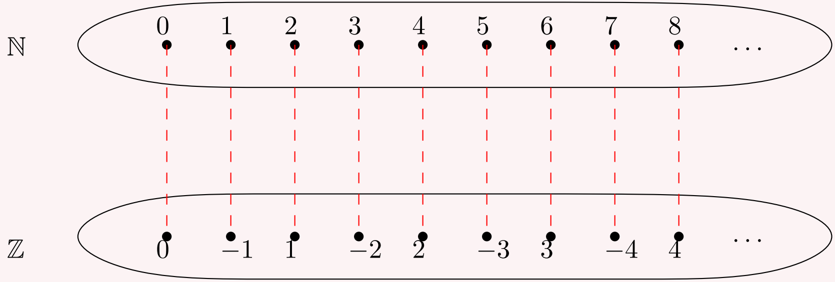


显然等势关系满足自反性、对称性、传递性，从而其是一个等价关系。

等势集合的例子 (I)

例 19.

1. $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$.



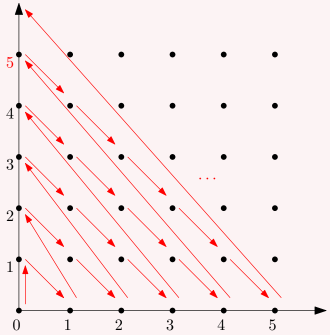
- $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z},\quad f(n)=\begin{cases}\frac{n}{2}, & n\text{为偶数}\\ -\frac{n+1}{2}, & n\text{为奇数}\end{cases}$

等势集合的例子 (II)

上海师范大学 Shanghai Normal University

例 20.

2. $\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.



- $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

  $f((m.n)) = \frac{(m+n+1)(m+n)}{2} + m$

推论 21.

$\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$.