专题31 圆锥曲线的垂直弦问题

【方法技巧与总结】

1、过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的右焦点$F(c,0)$作两条互相垂直的弦$AB$，$CD$．若弦$AB$，$CD$的中点分别为$M$，$N$，那么直线$MN$恒过定点$(\frac{a^2c}{a^2+b^2},0)$．

2、过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的长轴上任意一点$S(s,0)(-a<s<a)$作两条互相垂直的弦$AB$，$CD$．若弦$AB$，$CD$的中点分别为$M$，$N$，那么直线$MN$恒过定点$(\frac{a^2s}{a^2+b^2},0)$．

3、过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的短轴上任意一点$T(0,t)(-t<t<t)$作两条互相垂直的弦$AB$，$CD$．若弦$AB$，$CD$的中点分别为$M$，$N$，那么直线$MN$恒过定点$(0,\frac{b^2t}{a^2+b^2})$．

4、过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$内的任意一点$Q(s,t)(\frac{s^2}{a^2}+\frac{t^2}{b^2}<1)$作两条互相垂直的弦$AB$，$CD$．若弦$AB$，$CD$的中点分别为$M$，$N$，那么直线$MN$恒过定点$(\frac{a^2s}{a^2+b^2},\frac{b^2t}{a^2+b^2})$．

5、以(x_0,y_0)为直角定点的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$内接直角三角形的斜边必过定点$(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\times x_0,\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\times y_0)$

6、以上顶点为直角顶点的椭圆内接直角三角形的斜边必过定点，且定点在y轴上．

7、以右顶点为直角顶点的椭圆内接直角三角形的斜边必过定点，且定点在x轴上．

8、以(x_0,y_0)为直角定点的抛物线$y^2=2px$内接直角三角形的斜边必过定点$(x_0+2p,\ -y_0)$

9、以(x_0,y_0)为直角定点的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$内接直角三角形的斜边必过定点$(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x_0,\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}y_0)$

【题型归纳目录】

题型一：椭圆内接直角三角形的斜边必过定点

题型二：双曲线内接直角三角形的斜边必过定点

题型三：抛物线内接直角三角形的斜边必过定点

题型四：椭圆两条互相垂直的弦中点所在直线过定点

题型五：双曲线两条互相垂直的弦中点所在直线过定点

题型六：抛物线两条互相垂直的弦中点所在直线过定点

题型七：内接直角三角形范围与最值问题

题型八：两条互相垂直的弦中点范围与最值问题

【典例例题】

题型一：椭圆内接直角三角形的斜边必过定点

例 1．（2023·全国·高三专题练习）设 F_1,F_2 分别是圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，M 是 C 上一点，MF_2 与 x 轴垂直.直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N，且直线 MN 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

(1)求椭圆 C 的离心率.

(2)设 $D(0,1)$ 是椭圆 C 的上顶点，过 D 任作两条互相垂直的直线分别交椭圆 C 于 A、B 两点，过点 D 作线段 AB 的垂线，垂足为 Q，判断在 y 轴上是否存在定点 R，使得 $|RQ|$ 的长度为定值？并证明你的结论.

例 2．（2023·河南·安阳一中高三阶段练习（文））设 F_1,F_2 分别是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点，$M$ 是 C 上一点，MF_2 与 x 轴垂直.直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N，且直线 MN 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(1)求椭圆 C 的离心率；

(2)设 $D\left(0,1\right)$ 是椭圆 C 的上顶点，过 D 任作两条互相垂直的直线分别交椭圆 C 于 A，B 两点，证明直线 AB 过定点，并求出定点坐标.

例 3．（2023·江苏·模拟预测）在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$，$B\left(0,\sqrt{3}\right)$ 在椭圆 C 上.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)过椭圆 C 的左顶点 A 作两条互相垂直的直线分别与椭圆 C 交于 M、N 两点（不同于点 A），且 $AD\perp MN$，D 为垂足，求三角形 ABD 面积的最大值.

例 4．（2023·全国·模拟预测）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左、右焦点为 F_1，F_2，以 F_1F_2 为直径的圆与椭圆在第一象限的交点为 P，$\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的半径为 $2-\sqrt{3}$，且 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 1.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)过椭圆的右顶点 B 作两条互相垂直的直线分别交椭圆于点 D 和点 E，若直线 DE 与 x 轴的交点为 T，O 为坐标原点，$\triangle OTP$ 的面积是否为定值，如果是定值，求出该定值；如果不是，请说明理由．

例 5．（2023·广东·潮阳一中明光学校高三阶段练习）已知长度为 3 的线段的两个端点 A，B 分别在 x 轴和 y 轴上运动，动点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$，记动点 P 的轨迹为曲线 C.

(1)求曲线 C 的方程；

(2)设曲线 C 与 y 轴的正半轴交于点 D，过点 D 作互相垂直的两条直线，分别交曲线 C 于 M，N 两点，连接 MN，试判断直线 MN 是否经过定点．若是，求出该定点坐标；若否，请说明理由.

题型二：双曲线内接直角三角形的斜边必过定点

例 6．（2023·全国·高三专题练习）在平面直角坐标系 xOy 中，动点 P 与定点 $F(2，0)$的距离和它到定直线 l：$x=\frac{3}{2}$的距离之比是常数$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，记 P 的轨迹为曲线 E.

(1)求曲线 E 的方程；

(2)设过点 $A(\sqrt{3}，0)$两条互相垂直的直线分别与曲线 E 交于点 M，N(异于点 A)，求证：直线 MN 过定点.

例 7．（2023·广东广州·高三开学考试）已知双曲线$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=1\left(a,b>0\right)$，经过双曲线$\Gamma$上的点$A\left(2,1\right)$作互相垂直的直线 AM、AN 分别交双曲线Γ于 M、N 两点.设线段 AM、AN 的中点分别为 B、C，直线 OB、OC（O 为坐标原点）的斜率都存在且它们的乘积为$-\frac{1}{4}$.

(1)求双曲线Γ的方程；

(2)过点 A 作 $AD\perp MN$（D 为垂足），请问：是否存在定点 E，使得$\left|DE\right|$为定值？若存在，求出点 E 的坐标；若不存在，请说明理由.

例 8．（2023·全国·高三专题练习）已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的左，右焦点分别为$F_1\left(-\sqrt{6},0\right)$，$F_2\left(\sqrt{6},0\right)$．且该双曲线过点$P\left(2\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$．

(1)求 C 的方程；

(2)如图．过双曲线左支内一点$T\left(t,0\right)$作两条互相垂直的直线分别与双曲线相交于点 A，B 和点 C，D．当直线 AB，CD 均不平行于坐标轴时，直线 AC，BD 分别与直线$x=t$相交于 P．Q 两点，证明：P，Q 两点关于 x 轴对称．

题型三：抛物线内接直角三角形的斜边必过定点

例 9．（2023·陕西师大附中高三开学考试（理））已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$，O 是坐标原点，F 是 C 的焦点，M 是 C 上一点，$|FM|=4$，$\angle OFM=120°$．

(1)求抛物线 C 的标准方程；

(2)设点$Q\left(x_0,2\right)$在 C 上，过 Q 作两条互相垂直的直线QA,QB，分别交 C 于 A，B 两点（异于 Q 点）．证明：直线 AB 恒过定点．

题型四：椭圆两条互相垂直的弦中点所在直线过定点

例 10．（2023·全国·高三专题练习（文））已知 F 是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点，焦距为 4，且 C 过点$P(\sqrt{3},1)$．

(1)求 C 的方程；

(2)过点 F 作两条互相垂直的直线 l_1，l_2，若 l_1 与 C 交于 A，B 两点，l_2 与 C 交于 D，E 两点，记 AB 的中点为 M，DE 的中点为 N，试判断直线 MN 是否过定点，若过点，请求出定点坐标；若不过定点，请说明理由．

例 11．（2023·全国·高三开学考试（理））已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左，右焦点分别为$F_1$，$F_2$，且$F_1$，$F_2$与短轴的两个端点恰好为正方形的四个顶点，点$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$在$E$上.

(1)求E的方程；

(2)过点F_2作互相垂直且与x轴均不重合的两条直线分别交E于点A，B和C，D，若M，N分别是弦AB，CD的中点，证明：直线MN过定点.

例 12．（2023·全国·高三专题练习）已知l_1，l_2是过点$(0,2)$的两条互相垂直的直线，且l_1与椭圆$\Gamma:\frac{x^2}{4}+y^2=1$相交于$A$，$B$两点，$l_2$与椭圆$\Gamma$相交于$C$，$D$两点.

(1)求直线l_1的斜率k的取值范围；

(2)若线段AB，CD的中点分别为M，N，证明直线MN经过一个定点，并求出此定点的坐标.

题型五：双曲线两条互相垂直的弦中点所在直线过定点

例 13．（2023·山东·肥城市教学研究中心模拟预测）在平面直角坐标系xOy中，已知A_1,A_2两点的坐标分别是$(-\sqrt{3},0),(\sqrt{3},0)$，直线$A_1B,A_2B$相交于点$B$，且它们的斜率之积为$\frac{1}{3}$.

(1)求点B的轨迹方程；

(2)记点B的轨迹为曲线C，M,N,P,Q是曲线C上的点，若直线MN，PQ均过曲线C的右焦点F且互相垂直，线段MN的中点为R，线段PQ的中点为T. 是否存在点G，使直线RT恒过点G，若存在，求出点G的坐标，若不存在，说明理由.

题型六：抛物线两条互相垂直的弦中点所在直线过定点

例 14．（2023·陕西·西安中学模拟预测（文））动圆 P 与直线 $x=-1$ 相切，点 $F(1,0)$ 在动圆上．

(1)求圆心 P 的轨迹 Q 的方程；

(2)过点 F 作曲线 O 的两条互相垂直的弦 AB，CD，设 AB，CD 的中点分别为 M，N，求证：直线 MN 必过定点．

例 15．（2023·全国·高三专题练习）已知抛物线 $x^2=ay\left(a>0\right)$，过点 $M\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$ 作两条互相垂直的直线 l_1,l_2，设 l_1,l_2 分别与抛物线相交于 A,B 及 C,D 两点，当 A 点的横坐标为 2 时，抛物线在点 A 处的切线斜率为 1．

(1)求抛物线的方程；

(2)设线段 AB,CD 的中点分别为 E,F，O 为坐标原点，求证直线 EF 过定点．

例 16．（2023·河南·高三开学考试（文））已知抛物线 $C:y^2=2px\left(p>0\right)$ 的焦点为 F，点 M 在抛物线 C 上，O 为坐标原点，$\triangle OMF$ 是以 OF 为底边的等腰三角形，且 $\triangle OMF$ 的面积为 $2\sqrt{2}$．

(1)求抛物线 C 的方程．

(2)过点 F 作抛物线 C 的两条互相垂直的弦 AB，DE，设弦 AB，DE 的中点分别为 P，Q，试判断直线 PQ 是否过定点．若是，求出所过定点的坐标；若否，请说明理由．

例 17．（2023·全国·高三专题练习）已知抛物线 C：$y^2=2px\left(p>0\right)$ 的焦点为 F，过焦点 F 且垂直于 x 轴的直线交 C 于 H，I 两点，O 为坐标原点，$\triangle OHI$ 的周长为 $4\sqrt{5}+8$．

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)过点 F 作抛物线 C 的两条互相垂直的弦 AB，DE，设弦 AB，DE 的中点分别为 P，Q，试判断直线 PQ 是否过定点？若过定点．求出其坐标；若不过定点，请说明理由．

例 18．（2023·重庆·一模）抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$，点 P 是抛物线 E 上一点，F 为此抛物线的焦点，O 为坐标原点，$|OP|=2\sqrt{3},|PF|=3$．

(1)求抛物线 E 的方程；

(2)抛物线 E 的两条互相垂直的弦 AB 和 CD 交于点 $G\left(2,0\right),M$ 和 N 分别是 AB 和 CD 的中点，求 G 到直线

MN 的最大距离.

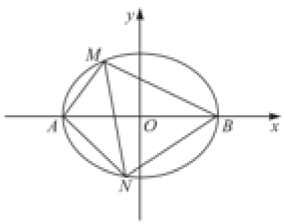
题型七：内接直角三角形范围与最值问题

例 19.（2023·全国·郑州一中模拟预测（理））已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 $F_1(-1,0)$，且过点（1，$\frac{3}{2}$）.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)过 F_1 且互相垂直的两条直线 l_1，l_2 分别交椭圆 C 于 A、B 两点和 M、N 两点，求 $|AB|+|MN|$ 的取值范围.

例 20.（2023·安徽·高三阶段练习（文））已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，过点 $P\left(-6,0\right)$ 作椭圆 C 的两条切线 m、n 互相垂直.



(1)求椭圆 C 的方程；

(2)设椭圆 C 的左、右顶点分别为 A、B，若过点 A 作互相垂直的直线 l_1、l_2 分别与椭圆交于 M、N 两点，M、N 两点不同于点 A，求三角形 BMN 面积的最大值.

例 21.（2023·全国·清华附中朝阳学校模拟预测）如图所示，M、D 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的左、右顶点，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求椭圆的标准方程；

(2)过M点作两条互相垂直的直线MA，MB与椭圆交于A，B两点，求$\triangle DAB$面积的最大值.

例22．（2023·全国·高三专题练习）已知在平面直角坐标系中有两定点$F_1\left(-1,0\right)$，$F_2\left(1,0\right)$，平面上一动点P到两定点的距离之和为$2\sqrt{2}$.

(1)求动点P的轨迹E的方程；

(2)过点F_1作两条互相垂直的直线，分别与E交于A，B，C，D四点，求四边形$ACBD$面积的最小值.

题型八：两条互相垂直的弦中点范围与最值问题

例23．已知抛物线E的顶点在原点，焦点为$F(2,0)$，过焦点且斜率为k的直线交抛物线于P，Q两点，

（1）求抛物线方程；

（2）若$|FP|=2|FQ|$，求k的值；

（3)过点$T(t,0)$作两条互相垂直的直线分别交抛物线E于A，B，C，D四点,且M，N分别为线段AB，CD的中点，求ΔTMN的面积最小值.

例24．（2023·全国·高三专题练习）已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，直线$y=8$与抛物线C交于点P，且$|PF|=\dfrac{5}{2}p$.

(1)求抛物线C的方程；

(2)过点F作抛物线C的两条互相垂直的弦AB，DE，设弦AB，DE的中点分别为P，Q，求$\left|PQ\right|$的最小值.

例25．（2023·全国·高三专题练习）已知椭圆$C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的长轴长为4，离心率为$\dfrac{1}{2}$，一动圆$C_2$过椭圆$C_1$右焦点$F$，且与直线$x=-1$相切.

(1)求椭圆C_1的方程及动圆圆心轨迹C_2的方程；

(2)过F作两条互相垂直的直线，分别交椭圆C_1于P，Q两点，交曲线C_2于M，N两点，求四边形$PMQN$面积的最小值．

例26．（2023·安徽师范大学附属中学模拟预测（文））已知抛物线T：$y^2=2px(p>0)$，点F为其焦点，P为T上的动点，若$|PF|$的最小值为1.

(1)求抛物线T的方程；

(2)过x轴上一动点$E\left(a,0\right)(a>0)$作互相垂直的两条直线，与抛物线T分别相交于点A,B和C，D，点H，K分别为AB,CD的中点，求$\triangle EHK$面积的最小值.

例27．（2023·全国·高三专题练习（文））在平面直角坐标系xOy中，一动圆经过点F（2，0）且与直线$x=-2$相切，设该动圆圆心的轨迹为曲线Γ．

(1)求曲线Γ的方程；

(2)过点M（m，0）（m＞0）作两条互相垂直的直线l_1,l_2，且l_1与曲线Γ交于A，B两点，l_2与曲线Γ交于C，D两点，点P，Q分别为AB，CD的中点，求$\triangle MPQ$面积的最小值．

例28．（2023·全国·高三专题练习（文））已知抛物线$T:y^2=2px\left(p>0\right)$，点$F$为其焦点，点$M$、$N$在抛物线上，且直线$MN$过点$G\left(-\dfrac{p}{2},0\right)$，$\left|FM\right|=2\left|FN\right|=6$．

(1)求抛物线T的方程；

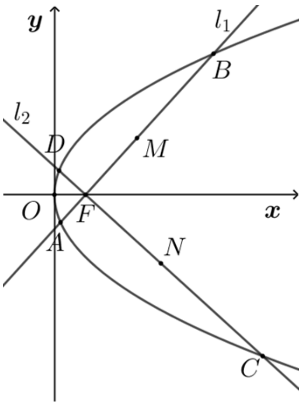
(2)过焦点F作互相垂直的两条直线，与抛物线T分别相交于点A、B和C、D，点P、Q分别为AB、CD的中点，求△FPQ面积的最小值.

例29．（2023·全国·高三专题练习）已知$P(\sqrt{2}$，$\sqrt{3})$是椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (a>b>0)上一点，以点P及椭圆的左、右焦点F_1，F_2为顶点的三角形面积为$2\sqrt{3}$．

(1)求椭圆C的标准方程；

(2)过F_2作斜率存在且互相垂直的直线l_1，l_2，M是l_1与C两交点的中点，N是l_2与C两交点的中点，求$\triangle MNF_2$面积的最大值．

例 30．（2023·河南郑州·高三阶段练习（理））如图，已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，抛物线 C 上的点到准线的最小距离为 1．



(1)求抛物线 C 的方程；

(2)过点 F 作互相垂直的两条直线 l_1，l_2，l_1 与抛物线 C 交于 A，B 两点，l_2 与抛物线 C 交于 C，D 两点，M，N 分别为弦 AB，CD 的中点，求$|MF|\cdot|NF|$的最小值．

例 31．（2023·湖北·高三阶段练习（理））已知点 P（x，y）是平面内的动点，定点 F（1，0），定直线 l：$x=-1$ 与 x 轴交于点 E，过点 P 作 $PQ\perp l$ 于点 Q，且满足$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$．

（1）求动点 P 的轨迹 t 的方程；

（2）过点 F 作两条互相垂直的直线，分别交曲线 t 于点 A,B，和点 C，D.设线段 AB 和线段 CD 的中点分别为 M 和 N，记线段 MN 的中点为 K，点 O 为坐标原点，求直线 OK 的斜率 k 的取值范围.

专题31 圆锥曲线的垂直弦问题

【方法技巧与总结】

1、过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点 $F(c,0)$ 作两条互相垂直的弦 AB，CD．若弦 AB，CD 的中点分别为 M，N，那么直线 MN 恒过定点 $(\frac{a^2c}{a^2+b^2},0)$．

2、过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的长轴上任意一点 $S(s,0)(-a<s<a)$ 作两条互相垂直的弦 AB，CD．若弦 AB，CD 的中点分别为 M，N，那么直线 MN 恒过定点 $(\frac{a^2s}{a^2+b^2},0)$．

3、过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的短轴上任意一点 $T(0,t)(-t<t<t)$ 作两条互相垂直的弦 AB，CD．若弦 AB，CD 的中点分别为 M，N，那么直线 MN 恒过定点 $(0,\frac{b^2t}{a^2+b^2})$．

4、过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 内的任意一点 $Q(s,t)(\frac{s^2}{a^2}+\frac{t^2}{b^2}<1)$ 作两条互相垂直的弦 AB，CD．若弦 AB，CD 的中点分别为 M，N，那么直线 MN 恒过定点 $(\frac{a^2s}{a^2+b^2},\frac{b^2t}{a^2+b^2})$．

5、以 (x_0,y_0) 为直角定点的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 内接直角三角形的斜边必过定点 $(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\times x_0,\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\times y_0)$

6、以上顶点为直角顶点的椭圆内接直角三角形的斜边必过定点，且定点在 y 轴上．

7、以右顶点为直角顶点的椭圆内接直角三角形的斜边必过定点，且定点在 x 轴上．

8、以 (x_0,y_0) 为直角定点的抛物线 $y^2=2px$ 内接直角三角形的斜边必过定点 $(x_0+2p$，$-y_0)$

9、以 (x_0,y_0) 为直角定点的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 内接直角三角形的斜边必过定点 $(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x_0,\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}y_0)$

【题型归纳目录】

题型五：双曲线两条互相垂直的弦中点所在直线过定点

题型六：抛物线两条互相垂直的弦中点所在直线过定点

题型七：内接直角三角形范围与最值问题

题型八：两条互相垂直的弦中点范围与最值问题

【典例例题】

题型一：椭圆内接直角三角形的斜边必过定点

例 1.（2023·全国·高三专题练习）设 F_1,F_2 分别是圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，M 是 C 上一点，MF_2 与 x 轴垂直.直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N，且直线 MN 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

(1)求椭圆 C 的离心率.

(2)设 $D(0,1)$ 是椭圆 C 的上顶点，过 D 任作两条互相垂直的直线分别交椭圆 C 于 A、B 两点，过点 D 作线段 AB 的垂线，垂足为 Q，判断在 y 轴上是否存在定点 R，使得 $|RQ|$ 的长度为定值？并证明你的结论.

【解析】(1) 由题意知，点 M 在第一象限.$\because M$ 是 C 上一点且 MF_2 与 x 轴垂直，

$\therefore M$ 的横坐标为 c.当 $x=c$ 时，$y=\frac{b^2}{a}$，即 $M\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$.

又直线 MN 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$，所以 $\tan\angle MF_1F_2=\frac{\frac{b^2}{a}}{2c}=\frac{b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

即 $b^2=\frac{\sqrt{2}}{2}ac=a^2-c^2$，即 $c^2+\frac{\sqrt{2}}{2}ac-a^2=0$，

则 $e^2+\frac{\sqrt{2}}{2}e-1=0$，解得 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $e=-\sqrt{2}$（舍去），即 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 已知 $D(0,1)$ 是椭圆的上顶点，则 $b=1,\because \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},a^2=b^2+c^2,\therefore a=\sqrt{2}$，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，

易得直线 AB 的斜率必然存在，设直线 AB 的方程为 $y=kx+m,A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=kx+m\\x^2+2y^2=2\end{cases}$ 可得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2(m^2-1)=0(*)$，

所以 $x_1+x_2=\frac{-4km}{1+2k^2},x_1x_2=\frac{2(m^2-1)}{1+2k^2}$，

又 $\overrightarrow{DA}=(x_1,y_1-1),\overrightarrow{DB}=(x_2,y_2-1)$，.

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=x_1x_2+\left(y_1-1\right)\left(y_2-1\right)=x_1x_2+\left(kx_1+m-1\right)\left(kx_2+m-1\right)$

$=\left(k^2+1\right)x_1x_2+k\left(m-1\right)\left(x_1+x_2\right)+(m-1)^2$

$=\left(k^2+1\right)\cdot\dfrac{2\left(m^2-1\right)}{1+2k^2}+k\left(m-1\right)\cdot\dfrac{-4km}{1+2k^2}+(m-1)^2$,

$=\dfrac{2\left(m^2-1\right)\left(k^2+1\right)-4k^2\left(m^2-m\right)+\left(1+2k^2\right)(m-1)^2}{1+2k^2}=0$

化简整理有$3m^2-2m-1=0$，得$m=-\dfrac{1}{3}$或$m=1$.

当$m=1$时，直线AB经过点D，不满足题意；

当$m=-\dfrac{1}{3}$时满足方程$(*)$中$\Delta>0$，故直线AB经过y轴上定点$G\left(0,-\dfrac{1}{3}\right)$.

又Q为过点D作线段AB的垂线的垂足，故Q在以DG为直径的圆上，取DG的中点为$R\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$，则$|RQ|$为定值，且$|RQ|=\dfrac{1}{2}|DG|=\dfrac{2}{3}$

例2．（2023·河南·安阳一中高三阶段练习（文））设F_1,F_2分别是椭圆C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$的左、右焦点，M是C上一点，MF_2与x轴垂直.直线MF_1与C的另一个交点为N，且直线MN的斜率为$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

(1)求椭圆C的离心率；

(2)设$D(0,1)$是椭圆C的上顶点，过D任作两条互相垂直的直线分别交椭圆C于A，B两点，证明直线AB过定点，并求出定点坐标.

【解析】（1）由题意知，点M在第一象限，$\because M$是C上一点且MF_2与x轴垂直，

$\therefore M$的横坐标为c.当$x=c$时，$y=\dfrac{b^2}{a}$，即$M\left(c,\dfrac{b^2}{a}\right)$.

又直线MN的斜率为$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，所以$\tan\angle MF_1F_2=\dfrac{\frac{b^2}{a}}{2c}=\dfrac{b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

即$b^2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}ac=a^2-c^2$，即$c^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}ac-a^2=0$,

则$e^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}e-1=0$，解得$e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$或$e=-\sqrt{2}$（舍去），

即$e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（2）已知$D(0,1)$是椭圆的上顶点，则$b=1$，

由（1）知 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$，解得 $a=\sqrt{2}$，

所以，椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，

设直线 AB 的方程为 $y=kx+m,A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，

联立 $\begin{cases}y=kx+m\\x^2+2y^2=2\end{cases}$ 可得 $\left(1+2k^2\right)x^2+4kmx+2\left(m^2-1\right)=0(*)$，

所以 $x_1+x_2=\frac{-4km}{1+2k^2},x_1x_2=\frac{2\left(m^2-1\right)}{1+2k^2}$，

又 $\overrightarrow{DA}=\left(x_1,y_1-1\right),\overrightarrow{DB}=\left(x_2,y_2-1\right)$，

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=x_1x_2+\left(y_1-1\right)\left(y_2-1\right)=x_1x_2+\left(kx_1+m-1\right)\left(kx_2+m-1\right)$

$=\left(k^2+1\right)x_1x_2+k\left(m-1\right)\left(x_1+x_2\right)+(m-1)^2$

$=\left(k^2+1\right)\cdot\frac{2\left(m^2-1\right)}{1+2k^2}+k\left(m-1\right)\cdot\frac{-4km}{1+2k^2}+(m-1)^2$

$=\frac{2\left(m^2-1\right)\left(k^2+1\right)-4k^2\left(m^2-m\right)+\left(1+2k^2\right)(m-1)^2}{1+2k^2}=0$，

化简整理有 $3m^2-2m-1=0$，得 $m=-\frac{1}{3}$ 或 $m=1$.

当 $m=1$ 时，直线 AB 经过点 D，不满足题意；.

当 $m=-\frac{1}{3}$ 时满足方程 $(*)$ 中 $\Delta>0$，

故直线 AB 经过 y 轴上定点 $G\left(0,-\frac{1}{3}\right)$.

例 3.（2023·江苏·模拟预测）在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$，$B\left(0,\sqrt{3}\right)$ 在椭圆 C 上.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)过椭圆 C 的左顶点 A 作两条互相垂直的直线分别与椭圆 C 交于 M、N 两点（不同于点 A），且 $AD\perp MN$，D 为垂足，求三角形 ABD 面积的最大值.

【解析】(1)由题意得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\b=\sqrt{3}\\b^2=a^2+c^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\b=\sqrt{3}\\c=1\end{cases}$，所以椭圆 C 的方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)当 MN 垂直于 x 轴时，则 M、N 关于 x 轴对称，

设点 M 在 x 轴上方，因为 $AM \perp AN$， 易知直线 AM 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$，

所以，直线 AM 的方程为 $y=x+2$， 联立 $\begin{cases} y=x+2 \\ 3x^2+4y^2=12 \\ x\neq -2 \end{cases}$， 可得 $\begin{cases} x=-\frac{2}{7} \\ y=\frac{12}{7} \end{cases}$，

即点 $M\left(-\frac{2}{7},\frac{12}{7}\right)$， 则 $N\left(-\frac{2}{7},-\frac{12}{7}\right)$， 可得 $D\left(-\frac{2}{7},0\right)$，

此时， $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{7}+2\right)\cdot\sqrt{3}=\frac{6\sqrt{3}}{7}$；

当 MN 不垂直于 x 轴时，设直线 MN 的方程为 $y=kx+t$， 设点 $M(x_1,y_1)$、 $N(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases} y=kx+t \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$， 可得 $\left(3+4k^2\right)x^2+8ktx+4t^2-12=0$，

$\Delta=64k^2t^2-4\left(4k^2+3\right)\left(4t^2-12\right)>0$， 可得 $t^2<4k^2+3$，

由韦达定理可得 $x_1+x_2=-\frac{8kt}{4k^2+3}$， $x_1x_2=\frac{4t^2-12}{4k^2+3}$，

$\overrightarrow{AM}=(x_1+2,y_1)=(x_1+2,kx_1+t)$， $\overrightarrow{AN}=(x_2+2,kx_2+t)$，

因为 $AM \perp AN$， 则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(x_1+2)(x_2+2)+(kx_1+t)(kx_2+t)$

$=\left(k^2+1\right)x_1x_2+(kt+2)(x_1+x_2)+t^2+4=\frac{\left(k^2+1\right)\left(4t^2-12\right)-8kt(kt+2)}{4k^2+3}+t^2+4=0$，

整理可得 $4k^2-16kt+7t^2=0$， 即 $(2k-t)(2k-7t)=0$， 所以， $t=2k$ 或 $t=\frac{2k}{7}$.

若 $t=2k$， 则直线 MN 的方程为 $y=k(x+2)$， 此时直线 MN 过点 A，

则 M 、 N 必有一点与点 A 重合，不合乎题意；

若 $t=\frac{2}{7}k$， 则直线 MN 的方程为 $y=k\left(x+\frac{2}{7}\right)$， 此时直线 MN 过定点 $E\left(-\frac{2}{7},0\right)$， 合乎题意.

因为 $AD\perp DE$， 且线段 AE 的中点坐标为 $\left(-\frac{8}{7},0\right)$， $|AE|=\frac{12}{7}$，

所以， $\triangle AED$ 的外接圆为 $\left(x+\frac{8}{7}\right)^2+y^2=\frac{36}{49}$，

因为 AB 直线方程为 $\frac{x}{-2}+\frac{y}{\sqrt{3}}=1$， 即 $\sqrt{3}x-2y+2\sqrt{3}=0$， 且 $|AB|=\sqrt{3+4}=\sqrt{7}$，

因为 D 到直线 AB 的最大距离为 $\frac{\left|-\frac{8\sqrt{3}}{7}+2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{3+4}}+\frac{6}{7}=\frac{42+6\sqrt{21}}{49}$，

所以$\triangle ABD$的面积$S_{\triangle ABD} \le \frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\frac{42+6\sqrt{21}}{49}=\frac{3\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{7}$.

综上所述，$\triangle ABD$面积的最大值为$\frac{3\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{7}$.

例4．（2023·全国·模拟预测）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左、右焦点为$F_1$，$F_2$，以$F_1F_2$为直径的圆与椭圆在第一象限的交点为$P$，$\triangle PF_1F_2$的内切圆的半径为$2-\sqrt{3}$，且$\triangle PF_1F_2$的面积为1．

(1)求椭圆C的标准方程；

(2)过椭圆的右顶点B作两条互相垂直的直线分别交椭圆于点D和点E，若直线DE与x轴的交点为T，O为坐标原点，$\triangle OTP$的面积是否为定值，如果是定值，求出该定值；如果不是，请说明理由．

【解析】(1)设$\triangle PF_1F_2$的内切圆的半径为r.

$\because$点P在以F_1F_2为直径的圆上，$\therefore\triangle PF_1F_2$为直角三角形，

$\therefore |PF_1|+|PF_2|-|F_1F_2|=2r=4-2\sqrt{3}$，$\therefore a-c=2-\sqrt{3}$.

$\triangle PF_1F_2$的面积为$\frac{1}{2}\left(PF_1+PF_2+F_1F_2\right)r$，

且$|PF_1|+|PF_2|=2a$，$|F_1F_2|=2c$，$\therefore\left(a+c\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$，

$\therefore a+c=2+\sqrt{3}$，$\therefore a=2$，$c=\sqrt{3}$，$\therefore b^2=a^2-c^2=1$，

$\therefore$椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)当直线DE的斜率存在时，设直线DE的方程为$y=kx+m$，$D\left(x_1,y_1\right)$，$E\left(x_2,y_2\right)$，

则$k_{DB}=\frac{y_1}{x_1-2}$，$k_{EB}=\frac{y_2}{x_2-2}$．由直线BD与BE互相垂直可得，

$k_{DB}\cdot k_{EB}=\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2}{x_2-2}=-1$，化简得$x_1x_2-2\left(x_1+x_2\right)+4+y_1y_2=0$．（*）

联立直线DE与椭圆C的方程得$\left(4k^2+1\right)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

$\therefore x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{4k^2+1}$，$\therefore y_1y_2=\left(kx_1+m\right)\left(kx_2+m\right)=\frac{m^2-4k^2}{4k^2+1}$，

代入（*）式得$\frac{4m^2-4}{4k^2+1}+\frac{16km}{4k^2+1}+4+\frac{m^2-4k^2}{4k^2+1}=0$，

整理得$5m^2+16km+12k^2=0$，即$\left(5m+6k\right)\left(m+2k\right)=0$，$\therefore m=-2k$或$m=-\frac{6}{5}k$.

将m的值代入$y=kx+m$可知直线DE恒过点$\left(2,0\right)$或$\left(\frac{6}{5},0\right)$.

$\because B(2,0)$，$\therefore (2,0)$不满足题意条件，$\therefore$点 T 的坐标为$\left(\frac{6}{5},0\right)$；

当直线 DE 的斜率不存在时，不妨设点 D 在 x 轴下半轴.

由椭圆的对称性可得直线 BD 的方程为$y=x-2$，联立 BD 与椭圆 C 的方程可得

$5x^2-16x+12=0$，解得$x=2$或$\frac{6}{5}$，$\therefore$点 D 的坐标为$\left(\frac{6}{5},-\frac{4}{5}\right)$，

同理可得点 E 的坐标为$\left(\frac{6}{5},\frac{4}{5}\right)$，$\therefore$点 T 的坐标为$\left(\frac{6}{5},0\right)$.

综上所述，点 T 的坐标为$\left(\frac{6}{5},0\right)$. 联立$\begin{cases}x^2+y^2=3,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$可得点$P\left(\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，

$\therefore \triangle OTP$ 的面积$S=\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{5}$，

$\therefore \triangle OTP$ 的面积是为定值，且定值为$\frac{\sqrt{3}}{5}$.

例 5.（2023·广东·潮阳一中明光学校高三阶段练习）已知长度为 3 的线段的两个端点 A，B 分别在 x 轴和 y 轴上运动，动点 P 满足$\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$，记动点 P 的轨迹为曲线 C.

(1)求曲线 C 的方程；

(2)设曲线 C 与 y 轴的正半轴交于点 D，过点 D 作互相垂直的两条直线，分别交曲线 C 于 M，N 两点，连接 MN，试判断直线 MN 是否经过定点．若是，求出该定点坐标；若否，请说明理由.

答案：(1)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

(2)是，定点$\left(0,-\frac{3}{5}\right)$.

分析：小问 1：设动点P和点 A，B 的坐标，利用向量数乘关系结合$|AB|=3$容易求得方程；

小问 2：讨论直线MN的斜率不存在时与存在时的情况，若存在，设直线MN方程为$y=kx+b$，代入曲线 C 的方程，结合韦达定理和$DM\perp DN$，运用向量数量积求解$b=-\frac{3}{5}$，即可求出定点.

（1）设$P(x,y),A(m,0),B(0,n)$，由$\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$，

$\therefore (x,y-n)=(m-x,-y)=(2m-2x,-2y)$，即$\begin{cases}x=2m-2x\\ y-n=-2y\end{cases}$$\therefore\begin{cases}m=\frac{3}{2}x\\ n=3y\end{cases}$. 又$|AB|=3$，

$\therefore m^2+n^2=9$.从而$\frac{9x^2}{4}+9y^2=9$.$\therefore$ 曲线C的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（2）由题意可知，当直线 MN 的斜率不存在时，直线 MN 方程为 $x=0$；当直线 MN 的斜率存在时，设直线 MN 方程为 $y=kx+b$ 由 $\begin{cases} y=kx+b \\ x^2+4y^2-4=0 \end{cases}$，消去 y 得

$(1+4k^2)x^2+8kbx+4b^2-4=0$，设 $M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$ 则 $x_1+x_2=\dfrac{-8kb}{1+4k^2},x_1x_2=\dfrac{4b^2-4}{1+4k^2}$ 因为

$DM\perp DN$，$D(0,1)$，则 $\overrightarrow{DM}=\left(x_1,y_1-1\right),\overrightarrow{DN}=\left(x_2,y_2-1\right)$ 所以

$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}=x_1x_2+\left(y_1-1\right)\left(y_2-1\right)=0$，又 $y_1=kx_1+b$，$y_2=kx_2+b$，化为

$\left(1+k^2\right)x_1x_2+k\left(b-1\right)\left(x_1+x_2\right)+\left(b-1\right)^2=0$ 所以 $\dfrac{4\left(1+k^2\right)\left(b^2-1\right)}{1+4k^2}-\dfrac{8k^2b\left(b-1\right)}{1+4k^2}+\left(b-1\right)^2=0$ 得

$b=-\dfrac{3}{5}$，所以直线 MN 方程为 $y=kx-\dfrac{3}{5}$，过定点 $\left(0,-\dfrac{3}{5}\right)$；综上所述：直线 MN 经过定点 $\left(0,-\dfrac{3}{5}\right)$.

题型二：双曲线内接直角三角形的斜边必过定点

例 6.（2023·全国·高三专题练习）在平面直角坐标系 xOy 中，动点 P 与定点 $F(2，0)$的距离和它到定直线 l：$x=\dfrac{3}{2}$ 的距离之比是常数 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，记 P 的轨迹为曲线 E.

(1)求曲线 E 的方程；

(2)设过点 $A(\sqrt{3}，0)$两条互相垂直的直线分别与曲线 E 交于点 M，N(异于点 A)，求证：直线 MN 过定点.

【解析】（1）设 $P(x，y)$，

因为 P 与定点 $F(2，0)$的距离和它到定直线 l：$x=\dfrac{3}{2}$ 的距离之比是常数 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\dfrac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{\left|x-\dfrac{3}{2}\right|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

化简得 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$，

所以曲线 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$.

（2）设 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，

当直线 MN 斜率不存在，直线 AM，AN 分别为 $y=x-\sqrt{3}$，$y=-x+\sqrt{3}$，

分别联立 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$，解得 $M(2\sqrt{3}，\sqrt{3})$，$N(2\sqrt{3}，-\sqrt{3})$，

此时直线 MN 的方程为 $x=2\sqrt{3}$，过点$(2\sqrt{3}，0)$；

当直线 MN 斜率存在时设其方程为 $y=kx+m$，$(k\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{3})$

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{3}-y^2=1\\ y=kx+m\end{cases}$，消去 y 得 $(1-3k^2)x^2-6kmx-3m^2-3=0$，

所以 $\Delta=(-6km)^2-4(1-3k^2)(-3m^2 3)>0$，即 $m^2+1-3k^2>0$，

$x_1+x_2=\frac{6km}{1-3k^2}$，$x_1x_2=\frac{-3m^2-3}{1-3k^2}$，

因为 $AM\perp AN$，

所以 $k_{AM}\cdot k_{AN}=\frac{y_1}{x_1-\sqrt{3}}\cdot\frac{y_2}{x_2-\sqrt{3}}=-1$，即 $y_1y_2=-\left(x_1-\sqrt{3}\right)\left(x_2-\sqrt{3}\right)$，

即 $(kx_1+m)(kx_2+m)=-\left(x_1-\sqrt{3}\right)\left(x_2-\sqrt{3}\right)$，

即 $k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=x_1x_2+\sqrt{3}(x_1+x_2)-3$，

将 $x_1+x_2=\frac{6km}{1-3k^2}$，$x_1x_2=\frac{-3m^2-3}{1-3k^2}$ 代入化简得：$m^2+3\sqrt{3}km+6k^2=0$，

所以 $m=-\sqrt{3}k$ 或 $m=-2\sqrt{3}k$，

当 $m=-\sqrt{3}k$ 时，直线 MN 方程为 $y=kx-\sqrt{3}k$ (不符合题意舍去)，

当 $m=-2\sqrt{3}k$ 时，直线 MN 方程为 $y=k(x-2\sqrt{3})$，MN 恒过定点($2\sqrt{3}$，0)，

综上所述直线 MN 过定点($2\sqrt{3}$，0).

例 7.（2023·广东广州·高三开学考试）已知双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$，经过双曲线 Γ 上的点 $A(2,1)$ 作互相垂直的直线 AM、AN 分别交双曲线 Γ 于 M、N 两点.设线段 AM、AN 的中点分别为 B、C，直线 OB、OC（O 为坐标原点）的斜率都存在且它们的乘积为 $-\frac{1}{4}$.

(1)求双曲线 Γ 的方程;

(2)过点 A 作 $AD\perp MN$（D 为垂足），请问：是否存在定点 E，使得 $|DE|$ 为定值？若存在，求出点 E 的坐标；若不存在，请说明理由.

【解析】(1) 设 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$，线段 AM、AN 的中点分别为 $B(m,n)$、$C(p,q)$，

由已知，得 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$；$\frac{2^2}{a^2}-\frac{1^2}{b^2}=1$

两式相减，得 $\frac{x_1^2-2^2}{a^2}-\frac{y_1^2-1^2}{b^2}=0$，即 $\frac{y_1+1}{x_1+2}\cdot\frac{y_1-1}{x_1-2}=\frac{b^2}{a^2}$①

根据中点坐标及斜率公式，得

$x_1+2=2m$，$y_1+1=2n$，$k_{AM}=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}$，$k_{OB}=\dfrac{n}{m}=\dfrac{y_1+1}{x_1+2}$.代入①，

得 $k_{AM}\cdot k_{OB}=\dfrac{b^2}{a^2}$②同理，得 $k_{AN}\cdot k_{OC}=\dfrac{b^2}{a^2}$③，②③相乘，得 $k_{AM}\cdot k_{AN}\cdot k_{OB}\cdot k_{OC}=\dfrac{b^4}{a^4}$.

∵ $k_{OB}\cdot k_{OC}=-\dfrac{1}{4}$，$k_{AM}\cdot k_{AN}=-1$，∴ $\dfrac{1}{4}=\dfrac{b^4}{a^4}$④

由 $\dfrac{2^2}{a^2}-\dfrac{1^2}{b^2}=1$，与④联立，得 $a^2=2$，$b^2=1$，

双曲线 Γ 的方程为：$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$.

（2）①当 $MN\perp Ox$ 时，设 $MN:x=t$，$M(t,y)$，$N(t,-y)$，$\overrightarrow{AM}=(t-2,y-1)$，$\overrightarrow{AN}=(t-2,-y-1)$

由 AM、AN 互相垂直，得 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(t-2)^2-(1-y^2)=0$，

由 $\dfrac{t^2}{2}-y^2=1$ 解得 $t=\dfrac{2}{3}$（此时 y 无实数解，故舍去），或 $t=2$（此时 M、N 至少一个点与 A 重合，与条件不符，故舍去）.综上，此时无符合条件的解.

②当 $MN\perp Ox$ 不成立时，设直线 $MN:y=kx+m$，$M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$

代入 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 得 $(1-2k^2)x^2-4kmx-2(m^2+1)=0$，$1-2k^2\neq 0$

$\Delta=16k^2m^2-4(1-2k^2)(-2)(m^2+1)=8(m^2+1-2k^2)>0$ 且 $x_1+x_2=\dfrac{4km}{1-2k^2}$ $x_1\cdot x_2=-\dfrac{2(m^2+1)}{1-2k^2}$

∵ $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(x_1-2)\cdot(x_2-2)+(y_1-1)\cdot(y_2-1)$

$=(k^2+1)x_1\cdot x_2+[k(m-1)-2](x_1+x_2)+(m-1)^2+4=0$

∴ $12k^2+8km+(m^2+2m-3)=0$，即 $(6k+m+3)(2k+m-1)=0$，

解得：$m=-6k-3$ 或 $m=-2k+1$.

当 $m=-2k+1$ 时，$MN:y=kx+m=k(x-2)+1$ 过点 $A(2,1)$，与条件不符，舍去.

∴ $m=-6k-3$，$MN:y=kx+m=k(x-6)-3$，过定点 $P(6,-3)$

∴ AP 中点 $E(4,-1)$，由于 $AD\perp MN$（D 为垂足），故 $|DE|=\dfrac{1}{2}|AP|=2\sqrt{2}$.

综上所述，存在定点 $E(4,-1)$，使得 $|DE|$ 为定值 $2\sqrt{2}$.

例 8.（2023·全国·高三专题练习）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左，右焦点分别为 $F_1(-\sqrt{6},0)$，$F_2(\sqrt{6},0)$．且该双曲线过点 $P(2\sqrt{2},\sqrt{2})$．

(1)求 C 的方程；

(2)如图．过双曲线左支内一点 $T(t,0)$ 作两条互相垂直的直线分别与双曲线相交于点 A，B 和点 C，D．当直线 AB，CD 均不平行于坐标轴时，直线 AC，BD 分别与直线 $x=t$ 相交于 P．Q 两点，证明：P，Q 两点关于 x 轴对称．

【解析】(1）由已知可得 $\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6}\\ \dfrac{8}{a^2}-\dfrac{2}{b^2}=1\end{cases}$，解得 $a^2=4,b^2=2$，

所以双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$；

(2）证明：由题意，设直线 AB 的方程为 $x=my+t$，直线 CD 的方程为 $x=-\dfrac{1}{m}y+t$，点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$，

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1\\ x=my+t\end{cases}$，得 $(m^2-2)y^2+2mty+t^2-4=0$，

则 $\Delta=(2mt)^2-4(m^2-2)(t^2-4)=16m^2+8t^2-32>0$，得 $2m^2+t^2>4$，

所以 $y_1+y_2=\dfrac{-2mt}{m^2-2},y_1y_2=\dfrac{t^2-4}{m^2-2}$，

同理可得 $y_3+y_4=\dfrac{2mt}{1-2m^2},y_3y_4=\dfrac{(t^2-4)m^2}{1-2m^2}$，其中 m,t 满足 $\dfrac{2}{m^2}+t^2>4$，

直线 AC 的方程为 $y-y_1=\dfrac{y_1-y_3}{x_1-x_3}(x-x_1)$，令 $x=t$，得 $y=\dfrac{y_1-y_3}{x_1-x_3}(t-x_1)+y_1$，

又 $x_1=my_1+t,x_3=-\dfrac{1}{m}y_3+t$，所以 $y=\dfrac{(m^2+1)y_1y_3}{m^2y_1+y_3}$，即 $P\left(t,\dfrac{(m^2+1)y_1y_3}{m^2y_1+y_3}\right)$，

同理可得 $Q\left(t,\dfrac{(m^2+1)y_2y_4}{m^2y_2+y_4}\right)$，

因为 $\dfrac{(m^2+1)y_1y_3}{m^2y_1+y_3}+\dfrac{(m^2+1)y_2y_4}{m^2y_2+y_4}=\dfrac{(m^2+1)\left[m^2y_1y_2(y_3+y_4)+(y_1+y_2)y_3y_4\right]}{(m^2y_1+y_3)(m^2y_2+y_4)}$

$$=\frac{(m^2+1)\left[\dfrac{m^2(t^2-4)}{m^2-2}\cdot\dfrac{2mt}{1-2m^2}+\dfrac{-2mt}{m^2-2}\cdot\dfrac{(t^2-4)m^2}{1-2m^2}\right]}{(m^2y_1+y_3)(m^2y_2+y_4)}=0,$$

所以 P,Q 两点关于 x 轴对称.

题型三：抛物线内接直角三角形的斜边必过定点

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/166040013100010135