

摘要

Tricomi 方程是一类重要的偏微分方程, 具有重要的数学理论和物理应用, 吸引了国内外数学工作者的广泛关注和探索. 本文主要研究 Tricomi 方程(组)解的一些性质, 并进一步研究了一个带混合非线性项的 Tricomi 方程组解的长时间行为. 具体地, 本文主要研究了以下内容:

首先在已有结果的基础上, 系统研究了 Tricomi 算子的基本解, 特别地, 在一维情形, 给出了非齐次 Tricomi 方程解的表达式.

其次研究了半线性广义 Tricomi 方程与半线性耗散波动方程之间的联系. 对于含 $|u|^p$ 及 $|u_t|^p$ 非线性项的半线性广义 Tricomi 方程, 均可以找到合适的变量替换, 把原方程变成带变系数(依赖于时间变量)的半线性耗散波动方程. 从而两者之间的研究方法可以互相借鉴.

最后, 研究了如下带混合非线性项的广义 Tricomi 方程组小初值 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - t^{2m} \Delta u = |v|^q, & (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n, \\ \partial_t^2 v - t^{2m} \Delta v = |u_t|^p, & (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = \varepsilon f_1(x), \quad \partial_t u(0, x) = \varepsilon g_1(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ v(0, x) = \varepsilon f_2(x), \quad \partial_t v(0, x) = \varepsilon g_2(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

解的长时间行为. 这里 $m \geq 0$ 是实常数, $n \in \mathbb{N}$ 代表空间维数, $\varepsilon > 0$ 是表示初值小性的参数. 利用两个常微分方程的解、截断函数等构造了两个试探函数, 并利用两个试探函数之间的关系巧妙地把两个方程的非线性项估计串联起来, 最终证明了该方程组的解将会在有限时间内破裂-即没有整体解, 并进一步建立了解的生命跨度估计.

本文所做的工作为今后进一步研究混合型方程的边值问题和 Cauchy 问题等提供了帮助.

关键词: Tricomi 方程组; 破裂; 生命跨度; 波动方程; 基本解

目 录

摘 要.....	I
Abstract.....	II
目 录.....	III
第 1 章 绪论	1
1.1 Tricomi 方程的相关背景简介.....	1
1.2 半线性广义 Tricomi 方程的研究历史.....	3
1.3 论文结构	6
第 2 章 Tricomi 算子.....	7
2.1 Tricomi 方程的基本解.....	7
2.2 Tricomi 方程与带变系数耗散项的波动方程的联系.....	14
2.3 变系数波动方程与变系数耗散波动方程之间的联系	16
第 3 章 半线性广义 Tricomi 方程组的有限时间破裂	19
3.1 预备知识	19
3.2 一些定义和主要引理	21
3.3 构造试探函数	25
3.4 定理证明	27
第 4 章 总结和展望	35
4.1 总结	35
4.2 展望	35
参考文献.....	36
致 谢.....	40
作者简介.....	41

第 1 章 绪论

1.1 Tricomi 方程的相关背景简介

1903 年 S.A.Chaplygin 提出一类椭圆-双曲混合型方程

$$k(y)\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0,$$

当 $y > 0$ 且 $k(y) > 0$, 方程是椭圆型的. 当 $y < 0$ 且 $k(y) < 0$, 方程是双曲型的. 此方程被称为 Chaplygin 方程. 其中当 $k(y)$ 取不同的值时, Chaplygin 方程相应的会变成不同的方程.

$k(y) = \text{sgn}(y)$ 时, Chaplygin 方程变成 $(\text{sgn}(y))u_{xx} + u_{yy} = 0$, 即为 Lavrentiev-Bitsadze 方程. 当 $y > 0$ 时, 方程是 Laplace 方程, 是椭圆型的; 当 $y < 0$ 时, 方程是 d'Alembert 方程, 其系数在 $y = 0$ 有间断, 是双曲型的.

$k(y) = y$ 时, Chaplygin 方程变成 Tricomi 方程: $yu_{xx} + u_{yy} = 0$, 当 $y > 0$ 时, 方程为椭圆型的, 当 $y < 0$ 时, 方程为双曲型的, 两区域之间由一条曲线 (或曲面) $y = 0$ 所隔, 其中 $y = 0$ 就是方程的退化线 (面). 意大利数学家 F.G.Tricomi 在 1923 年分析了 Tricomi 方程

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0$$

边值问题的适定性, 它被证明是描述超音速飞机运动的一个很好的近似. 由特征方程 $dy^2 + xdx^2 = 0$ 可以得到两条特征线

$$y \pm \frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} = C.$$

一个与 Tricomi 方程密切相关的偏微分方程是 Keldysh 方程:

$$xu_{xx} + u_{yy} = 0,$$

由特征方程 $xdy^2 + dx^2 = 0$ 可得其特征线为

$$y \pm \frac{1}{2}(-x)^{\frac{1}{2}} = C.$$

连续介质力学中的许多重要问题都可以简化为 Keldysh 方程的相应问题, 特别是气体动力学中的激波反射衍射问题.

上述两个方程在上半平面 ($x > 0$) 都是椭圆型的, 下半平面 ($x < 0$) 都是双曲型的, 并在直线 $x = 0$ 上退化. 两方程的区别就是, 在双曲区域, Tricomi 方程的特征线在 $x = 0$ 附近是垂直于 $x = 0$ 的, 而 Keldysh 方程的特征线在 $y = 0$ 附近是与 $y = 0$ 相切的. 因此这两个方程边值问题及其解的性质有很多不同之处, 具体可见参考文献 [1].

Tricomi 方程

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0 \quad (1.1)$$

是一类二阶椭圆-双曲混合型偏微分方程. 它不仅具有重要的物理意义, 也具有丰富的数学理论. 从物理意义的角度来看, Tricomi 方程与空气动力学中的跨音速流问题有着密切的关系. Tricomi 方程可以用来描述 de Laval 管道当中从亚音速 ($x > 0$, 椭圆区域) 到超音速 ($x < 0$, 双曲区域) 的跨音速流, 这是流体力学中最有趣的问题之一. 另外, 该方程在 $x = 0$ 处会出现退化. 后来, 形如

$$u_{tt} - t^{2m} \Delta u = 0 \quad (1.2)$$

的广义 Tricomi 方程引起了国内外数学工作者的广泛关注. 从数学研究的角度看, 广义 Tricomi 方程 (1.2) 可以看作是经典波动方程 ($m = 0$) 的推广, 其特征锥也由经典波动方程的平直光锥变成弯曲的光锥. 更多的介绍可见文献 [2-6].

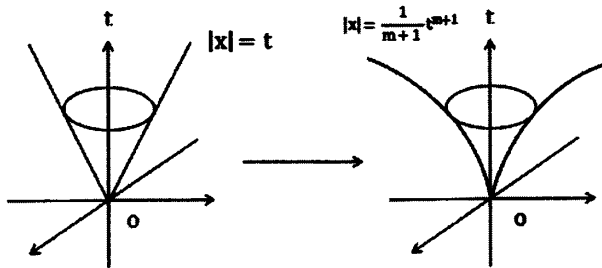


图 1.1 经典波动方程及 Tricomi 方程的特征锥

早期人们对混合型偏微分方程的研究主要是讨论其边值问题解的存在唯一性和正则性, 或者是利用混合型方程理论解决力学、几何学中出现的相关问题. 后来全空间中非线性广义 Tricomi 方程 Cauchy 问题解的长时间行为也引起了人们的重视. 流体力学和微分几何中的许多重要问题都可以简化为 Tricomi 方程的相应问题, 特别是跨音速流动问题和等距嵌入问题等. 例如对于可压缩气体的位势流方程, 若其解产生破裂, 则意味着真空形成, 此时方程会退化成 (非线性) Tricomi 型方程. 另外, 对于退化双曲型方程 (例如 Euler-Poisson-Darboux 方程) 或者是退化椭圆型方程, 也可以通过适当的变换将其转换为 (广义) Tricomi 方程进行研究. 可见研究 Tricomi 方程解的性质具有重要的意义.

1.2 半线性广义 Tricomi 方程的研究历史

最近,半线性广义 Tricomi 方程小初值 Cauchy 问题解的大时间行为同样受到国内外数学工作者的关注. 此类问题重点是找到一个与空间维数、Tricomi 算子有关的临界指标, 并且证明非线性指数大于临界指标时有整体解, 而小于或等于临界指标时解会在有限时间内破裂. 进一步, 若没有整体解, 则建立解关于初值小性参数的生命跨度估计也是一个重要的研究方向.

上述文中提到 Tricomi 方程是波动方程的推广, 因此先回顾下半线性波动方程相关问题的研究历史. 考虑如下小初值半线性波动方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = |u|^p, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty), \\ u(0, x) = \varepsilon f(x), \partial_t u(0, x) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 n 表示空间维数, $\varepsilon > 0$ 为表示初值小性的参数. 非线性指标 $p \geq 2$ 时, 其解是古典解; 当 $1 < p < 2$ 时, 其解是弱解, 但可以通过标准 Strichartz 估计用相关积分方程定义上述 Cauchy 问题的解的表达式. 具体可见文献 Sideris^[7] 或 Georgiev-Lindblad-Sogge^[8].

当 $n = 1$ 时, Kato^[9] 证明了对 $\forall p > 1$, 都有 $T(\varepsilon) < \infty$. 当 $n \geq 2$ 时, 数学家 Strauss^[10] 猜测: 存在一个临界指标 $p_c(n)$, 如果 $p > p_c(n)$, 方程(1.3)存在整体解, 即 $T(\varepsilon) = \infty$; 如果 $1 < p \leq p_c(n)$, 解会在有限时间内破裂, 即 $T(\varepsilon) < \infty$. 其中临界指标

$$p_c(n) = \frac{n+1 + \sqrt{n^2 + 10n - 7}}{2(n-1)}$$

是二次代数方程

$$\gamma(p, n) = -(n-1)p^2 + (n+1)p + 2 = 0 \quad (1.4)$$

的正根. Strauss 猜想在任意维数都已经被证实, 下表展示了相应的研究结果 (见文献 [11-12]):

表 1.1 解的破裂及整体存在性结果

n	$1 < p < p_c(n)$	$p = p_c(n)$	$p_c(n) < p \leq 1 + \frac{4}{n-1}$
2	Glasse ^[13]	Schaeffer ^[14]	Glasse ^[15]
3	John ^[16]	Schaeffer ^[14]	John ^[16]
$n \geq 4$	Sideris ^[7]	Yordanov-Zhang ^[17] , Zhou ^[18] , indep	Georgiev-Lindblad-Sogge ^[8]

如果方程没有整体解, 则解关于初值小性参数 ε 的生命跨度估计 $T(\varepsilon)$ 也是一个重要的研究方向, 这时分次临界指标 $1 < p < p_c(n)$ 和临界指标 $p = p_c(n)$ 两种情形.

对于次临界指标 $1 < p < p_c(n) (n \geq 2)$ 情形, 已有的研究结果表明存在两个与 ε 无关

的正常数 c 和 C , 使得生命估计 $T(\epsilon)$ 满足

$$c\epsilon^{-\frac{2p(p-1)}{\gamma(n,p)}} \leq T(\epsilon) \leq C\epsilon^{-\frac{2p(p-1)}{\gamma(n,p)}},$$

其中 $\max\left(1, \frac{2}{n-1}\right) < p < p_c(n)$ 和 $\gamma(n, p)$ 如(1.4)式所定义. 下表有相关生命估计的结果 (见文献 [13]):

表 1.2 生命跨度估计总结

n	$T(\epsilon)$ 的下界	$T(\epsilon)$ 的上界
2	Zhou ^[19]	Zhou ^[19]
3	Lindblad ^[20]	Lindblad ^[20]
$n \geq 4$	Lai-Zhou ^[21]	Takamura ^[11]

当 $n = 1$ 时, Zhou^[22] 得到对 $\forall p > 1$, $T(\epsilon)$ 满足下列估计

$$\begin{cases} c\epsilon^{-\frac{p-1}{2}} \leq T(\epsilon) \leq C\epsilon^{-\frac{p-1}{2}}, & \text{如果 } \int_{\mathbb{R}^2} u_1(x) \neq 0, \\ c\epsilon^{-\frac{p(p-1)}{(p+1)}} \leq T(\epsilon) \leq C\epsilon^{-\frac{p(p-1)}{(p+1)}}, & \text{如果 } \int_{\mathbb{R}^2} u_1(x) = 0, \end{cases}$$

当 $(n, p) = (2, 2)$ 时, Lindblad^[20] 得到了更精确的结果.

$$\begin{cases} \exists \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} a(\epsilon)^{-1} T(\epsilon) > 0, & \text{如果 } \int_{\mathbb{R}^2} u_1(x) \neq 0, \\ \exists \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon T(\epsilon) > 0, & \text{如果 } \int_{\mathbb{R}^2} u_1(x) = 0, \end{cases}$$

其中 $a = a(\epsilon)$ 满足

$$a^2 \epsilon^2 \log(1 + a) = 1.$$

对于 $1 < p < 2$ 和 $n = 2$, Takamura^[10] 和 Imai 等^[23] 得到以下结果.

$$\begin{cases} c\epsilon^{-\frac{p-1}{3-p}} \leq T(\epsilon) \leq C\epsilon^{-\frac{p-1}{3-p}}, & \text{如果 } \int_{\mathbb{R}^2} u_1(x) \neq 0, \\ c\epsilon^{-\frac{2p(p-1)}{\gamma(2,p)}} \leq T(\epsilon) \leq C\epsilon^{-\frac{2p(p-1)}{\gamma(2,p)}}, & \text{如果 } \int_{\mathbb{R}^2} u_1(x) = 0, \end{cases}$$

对于临界情形 ($p = p_c(n)$), 则生命跨度估计满足

$$\exp(c\epsilon^{-p(p-1)}) \leq T(\epsilon) \leq \exp(C\epsilon^{-p(p-1)}),$$

研究结果见下表^[13]

表 1.3 生命跨度估计总结

n	$T(\epsilon)$ 的下界	$T(\epsilon)$ 的上界
2	Zhou ^[19]	Zhou ^[19]
3	Zhou ^[24]	Zhou ^[24]
$n \geq 4$	Lindblad-Sogge ^[25] 对于 $n \leq 8$ 或径向解	Takamura- Wakasa ^[26]

接下来将分别介绍非线性项为 $|u|^p$ 和 $|u_t|^p$ 的半线性广义 Tricomi 方程小初值 Cauchy 问题的研究历史.

对于非线性项为 $|u|^p$ 的半线性广义 Tricomi 方程

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - t^{2m} \Delta u = |u|^p, & (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = \varepsilon f(x), \quad \partial_t u(0, x) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.5)$$

半线性 Tricomi 方程通常是指 1 维情形 $m = \frac{1}{2}$ 时的方程 $\partial_t^2 u - t \partial_x^2 u = |u|^p$. 当 $m > 0 (m \neq \frac{1}{2})$, $n \geq 1$ 时, 算子 $\partial_t^2 - t^{2m} \Delta$ 叫 Gellerstedt 算子, 也称为广义 Tricomi 算子. Yagdjian^[3] 首先研究了小初值 Cauchy 问题(1.5), 得出解在有限时间破裂和全局存在性的非线性指数的一些必要条件. 但是, 该研究结果中并没有确定临界指标. He-Witt-Yin^[27-30] 发现半线性广义 Tricomi 方程与半线性波动方程具有相似的性质, 并最终确定了这个临界指标 $p_c(m, n)$. 在 1 维情形 ($n = 1$), 临界指标为 $p_c(m, 1) = 1 + \frac{2}{m}$, 在 $n \geq 2$ 时, 临界指标 $p_c(m, n)$ 是二次代数方程

$$2 + \left[n + 1 - 3 \left(1 - \frac{1}{m+1} \right) \right] p - \left[n - 1 + \left(1 - \frac{1}{m+1} \right) \right] p^2 = 0$$

的正根. 另外, Ruan-Witt-Yin^[31-34] 研究了半线性方程 $\partial_t^2 u - t^{2m} \Delta u = f(t, x, u)$ 的低正则性解和局部存在性. Lin-Tu^[35] 研究了 Cauchy 问题(1.5)在次临界和临界情形解的生命跨度上界估计. Ikeda-Lin-Tu^[36] 利用试探函数方法研究了带多重传播速度的半线性广义 Tricomi 方程的弱耦合系统

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - t^{m_1} \Delta u = G_1(u(x, t)), & (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n, \\ \partial_t^2 v - t^{m_2} \Delta v = G_2(u(x, t)) & (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = \varepsilon f_1(x), \quad \partial_t u(0, x) = \varepsilon g_1(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ v(0, x) = \varepsilon f_2(x), \quad \partial_t v(0, x) = \varepsilon g_2(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1.6)$$

的破裂结果.

注意到上式提到的文献均研究非线性为 $|u|^p$ 的半线性广义 Tricomi 方程系统的破裂结果, 下面介绍带导数型 $|u_t|^p$ 非线性项的半线性广义 Tricomi 方程. 考虑如下半线性广义 Tricomi 方程小初值 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - t^{2m} \Delta u = |u_t|^p, & (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = \varepsilon f(x), \quad \partial_t u(0, x) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.7)$$

注意到, 当 $m = 0$ 时, 上述问题中的方程就是经典的带导数非线性项的半线性波动方程

$$\partial_t^2 u - \Delta u = |u_t|^p, \quad (1.8)$$

其小初值 Cauchy 问题有一个对应的 Glassey 猜想^[37]: 当 $n = 1, p > 1$ 时没有整体解, 而当 $n \geq 2$ 时存在一个临界指标: $p_c(n) = 1 + \frac{2}{n-1}$. 即当 $p > p_c(n)$ 时解整体存在, 而当 $1 < p \leq p_c(n)$, 解将会在有限时间破裂. 相关的文献可以参考 [38-46]. 当 $m > 0$ 时,

Lucente-Palmieri^[47] 建立了 Cauchy 问题(1.7)的生命跨度估计

$$T_\varepsilon \leq \begin{cases} C\varepsilon^{-\left(\frac{1}{p-1}-\frac{(m+1)n-1}{2}\right)^{-1}}, & 1 < p < 1 + \frac{2}{(m+1)n-1}, \\ \exp(C\varepsilon^{-(p-1)}), & p = 1 + \frac{2}{(m+1)n-1}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Hamouda-Hamza^[48] 和 Chen-Lucente-Palmieri^[49] 通过建立一个迭代框架研究了带组合型非线性项的广义 Tricomi 方程小初值 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_{tt} - t^{2m} \Delta u = |u_t|^p + |u|^q, & (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = \varepsilon f(x), u_t(0, x) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.10)$$

的破裂结果及生命跨度上界估计. Lai-Schiavone^[12] 分别用调和分析和试探函数法建立了 Cauchy 问题(1.7)的局部存在性和有限时间破裂结果及生命跨度估计

$$T_\varepsilon \leq \begin{cases} C\varepsilon^{-\left(\frac{1}{p-1}-\frac{(m+1)(n-1)-m}{2}\right)^{-1}}, & 1 < p < 1 + \frac{2}{(m+1)(n-1)-m}, \\ \exp(C\varepsilon^{-(p-1)}). & p = 1 + \frac{2}{(m+1)(n-1)-m}, \end{cases} \quad (1.11)$$

比较(1.9)式和(1.11)式中的破裂指标可知, 文献 [12] 中改进了文献 [47] 的结果. 受文献 [12] 的启发, 本文也将利用试探函数法证明耦合方程组的生命跨度估计.

1.3 论文结构

第一章: 阐述本论文的研究背景和研究历史, 并给出论文框架.

第二章: 介绍 Tricomi 方程的基本解, 以及半线性广义 Tricomi 方程与时变半线性耗散波动方程之间的联系, 并介绍了依赖于时间变系数耗散波动方程与带变系数耗散项波动方程之间的联系.

第三章: 通过利用两个变系数常微分方程的解, 与空间有关的试探函数, 以及与时间有关的截断函数来构造试探函数, 最后给出 Tricomi 方程组耦合情形的破裂结果和生命跨度估计.

第四章: 总结和展望.

第 2 章 Tricomi 算子

2.1 Tricomi 方程的基本解

对于自变量为 x 和 y 的 Tricomi 方程

$$\mathcal{T}u = yu_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (2.1)$$

Barros-Neto-Gelfand^[50] 确定了方程(2.1)在 x 轴上的基本解, 即方程

$$\mathcal{T}u = \delta(x - a, y)$$

的解, 其中 $\delta(x - a, y)$ 是在点 $(a, 0)$ 处的德尔塔函数. 由于 Tricomi 方程沿 x 轴的平移不变性, 这里只需考虑在原点 $(0, 0)$ 处的基本解. 另外, Tricomi 算子在原点处的两条特征线 $9x^2 \pm 4y^3 = 0$ 与 y 轴相切, 且将 (x, y) 平面划分为两个不相交的区域 D_+ 和 D_- , 其中

$$D_+ = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 4y^3 > 0,$$

$$D_- = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 4y^3 < 0,$$

分布如下图所示:

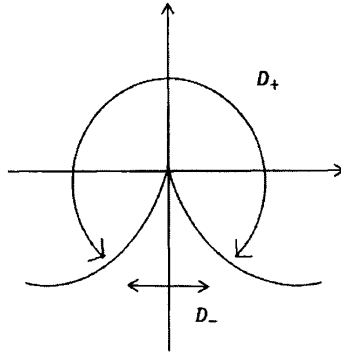


图 2.1 D_+, D_- 分布图

对应的 Tricomi 算子的基本解 $F_+(x, y)$ 和 $F_-(x, y)$ 分别为

$$F_+(x, y) := \begin{cases} C_+(9x^2 + 4y^3)^{-\frac{1}{6}}, & D_+, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$F_-(x, y) := \begin{cases} C_- |9x^2 + 4y^3|^{-\frac{1}{6}}, & D_-, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中

$$C_+ = -\frac{\Gamma(1/6)}{3 \cdot 2^{2/3} \pi^{1/2} \Gamma(2/3)}, C_- = \frac{3\Gamma(4/3)}{2^{2/3} \pi^{1/2} \Gamma(5/6)}.$$

Barros- Neto-Gelfand^[50-52] 研究了一维 Tricomi 方程的基本解. Yagdjian^[2] 研究了 $n \geq 1$ 时线性 Tricomi 方程的基本解, 利用经典波动方程 ($k=0$) Cauchy 问题解的积分形式构造了 $n \geq 1$ 时线性 Tricomi 方程的基本解. 下面首先给出 Tricomi 方程的基本解, 然后在此基础上给出非齐次 Tricomi 方程解的积分表达式.

Yagdjian^[2] 研究了如下 Tricomi 算子

$$\mathcal{T} := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - t^{2m} \Delta,$$

其中 $2m$ 是整数且 $m \geq \frac{1}{2}$. Tricomi 算子 \mathcal{T} 的基本解 $E \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$, 且在 (x_0, t_0) 上满足

$$\mathcal{T}E = \delta(x - x_0, t - t_0),$$

即

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - t^{2k} \Delta E = \delta(x - x_0, t - t_0),$$

其中 $\delta(x - x_0, t - t_0)$ 是在 (x_0, t_0) 点的德尔塔函数. 令

$$D_1(x_0, t_0) := \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}; |x - x_0| < \frac{1}{m+1} (t^{m+1} - t_0^{m+1}) \right\}. \quad (2.2)$$

首先考虑一维情形. 定义在 $D_1(0, t_0)$ 上的核函数为

$$E(x, t; 0, t_0) := (x + \phi(t) + \phi(t_0))^{-\gamma} (-x + \phi(t_0) + \phi(t))^{-\gamma} F(\gamma, \gamma; 1; \zeta), t_0 \geq 0, \quad (2.3)$$

其中 $F(\gamma, \gamma; 1; \zeta)$ 是超几何函数. 定义

$$\zeta = \frac{(x + \phi(t) - \phi(t_0))(x - \phi(t) + \phi(t_0))}{(x + \phi(t) + \phi(t_0))(x - \phi(t) - \phi(t_0))}, \quad \phi(t) := \frac{t^{m+1}}{m+1}, \quad \gamma := \frac{m}{2(m+1)}. \quad (2.4)$$

$E(x, t; 0, t_0)$ 是由(2.3)式和(2.4)式定义的函数, 那么算子 \mathcal{T} 在 $(0, t_0)$ 上的基本解 $E_1(x, t; 0, t_0)$ 为

$$E_1(x, t; 0, t_0) := \begin{cases} c_m E(x, t; 0, t_0), & D_1(0, t_0), \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (2.5)$$

其中 $c_m = (m+1)^{-\frac{m}{m+1}} 2^{-\frac{1}{m+1}}$. 下文提到的 c_m, γ 都如上式所定义. 另知 $E_1(x, t; 0, t_0)$ 是一个局部可积函数, 且在 $D_1(0, t_0)$ 上是光滑且有界的.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/166105204120010231>