2024年福建高考数学真题及答案

本试卷共10页，19小题，满分150分.

注意事项：

1.答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.

2.选择题的作答：每小题选出答案后，用$2B$铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

3.填空题和解答题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

4.考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的．请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1. 已知集合$A=\left\{x \mid -5<x^{3}<5\right\}, B=\{-3,-1,0,2,3\}$，则$A \cap B=$（　　）

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{-3,-1,0\}$　　D. $\{-1,0,2\}$

2. 若$\dfrac{z}{z-1}=1+\mathrm{i}$，则$z=$（　　）

A. $-1-\mathrm{i}$　　B. $-1+\mathrm{i}$　　C. $1-\mathrm{i}$　　D. $1+\mathrm{i}$

3. 已知向量$\vec{a}=(0,1), \vec{b}=(2, x)$，若$\vec{b} \perp(\vec{b}-4 \vec{a})$，则$x=$（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

4. 已知$\cos (\alpha+\beta)=m, \tan \alpha \tan \beta=2$，则$\cos (\alpha-\beta)=$（　　）

A. $-3m$　　B. $-\frac{m}{3}$　　C. $\frac{m}{3}$　　D. $3m$

5. 已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且它们的高均为$\sqrt{3}$，则圆锥的体积为（　　）

A. $2\sqrt{3}\pi$　　B. $3\sqrt{3}\pi$　　C. $6\sqrt{3}\pi$　　D. $9\sqrt{3}\pi$

6. 已知函数为$f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a,x<0\\ e^x+\ln(x+1),x\geq 0\end{cases}$，在R上单调递增，则$a$取值的范围是（　　）

A. $(-\infty,0]$　　B. $[-1,0]$　　C. $[-1,1]$　　D. $[0,+\infty)$

7. 当$x\hat{I}$ $[0,2\pi]$时，曲线$y=\sin x$与$y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$的交点个数为（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 6　　D. 8

8. 已知函数为$f(x)$的定义域为R，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，且当$x<3$时$f(x)=x$，则下列结论中一定正确的是（　　）

A. $f(10)>100$　　B. $f(20)>1000$

C. $f(10)<1000$　　D. $f(20)<10000$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分，部分选对的得部分分，选对但不全的得部分分，有选错的得0分.

9. 为了解推动出口后的亩收入（单位：万元）情况，从该种植区抽取样本，得到推动出口后亩收入的样本均值$\overline{x}=2.1$，样本方差$s^2=0.01$，已知该种植区以往的亩收入X服从正态分布$N\left(1.8,0.1^2\right)$，假设推动出口后的亩收入Y服从正态分布$N\left(\overline{x},s^2\right)$，则（　　）（若随机变量$Z$服从正态分布$N\left(u,\sigma^2\right)$，$P(Z<u+\sigma)\approx 0.8413$）

A. $P(X>2)>0.2$　　B. $P(X>2)<0.5$

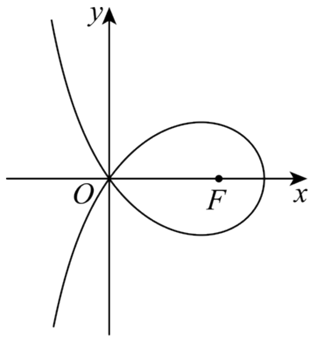
C. $P(Y>2)>0.5$　　　　D. $P(Y>2)<0.8$

10. 设函数 $f(x)=(x-1)^2(x-4)$，则（　　）

A. $x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点　　　　B. 当 $0<x<1$ 时，$f(x)<f\left(x^2\right)$

C. 当 $1<x<2$ 时，$-4<f(2x-1)<0$　　　　D. 当 $-1<x<0$ 时，$f(2-x)>f(x)$

11. 造型∝可以做成美丽的丝带，将其看作图中曲线 C 的一部分. 已知 C 过坐标原点 O. 且 C 上的点满足横坐标大于 -2，到点 $F(2,0)$ 的距离与到定直线 $x=a(a<0)$ 的距离之积为 4，则（　　）



A. $a=-2$　　　　B. 点 $(2\sqrt{2},0)$ 在 C 上

C. C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1　　　　D. 当点 $\left(x_0,y_0\right)$ 在 C 上时，

$y_0 \le \dfrac{4}{x_0+2}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 设双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1、F_2，过 F_2 作平行于 y 轴的直线交 C 于 A，B 两点，若 $|F_1A|=13,|AB|=10$，则 C 的离心率为__________.

13. 若曲线 $y=\mathrm{e}^x+x$ 在点 $\left(0,1\right)$ 处的切线也是曲线 $y=\ln(x+1)+a$ 的切线，则 $a=$__________.

14. 甲、乙两人各有四张卡片，每张卡片上标有一个数字，甲的卡片上分别标有数字 1，3，5，7，乙的卡片上分别标有数字 2，4，6，8，两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较所选卡片上数字的大小，数字大的人得 1

分，数字小的人得 0 分，然后各自弃置此轮所选的卡片（弃置的卡片在此后的轮次中不能使用）. 则四轮比赛后，甲的总得分不小于 2 的概率为_________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 记$\triangle ABC$内角 A、B、C的对边分别为 a，b，c，已知$\sin C=\sqrt{2}\cos B$，$a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$

（1）求 B;

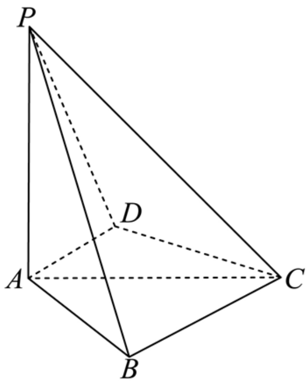
（2）若$\triangle ABC$的面积为$3+\sqrt{3}$，求 c.

16. 已知$A(0,3)$和$P\left(3,\frac{3}{2}\right)$为椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上两点.

（1）求 C的离心率;

（2）若过 P的直线l交 C于另一点 B，且$\triangle ABP$的面积为 9，求l的方程.

17. 如图，四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面 $ABCD$，$PA=AC=2$，$BC=1,AB=\sqrt{3}$.



（1）若$AD\perp PB$，证明：$AD//$平面PBC；

（2）若$AD\perp DC$，且二面角$A-CP-D$的正弦值为$\frac{\sqrt{42}}{7}$，求AD.

18. 已知函数$f(x)=\ln\frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$

（1）若$b=0$，且$f'(x)\geq 0$，求a的最小值;

（2）证明：曲线$y=f(x)$是中心对称图形;

（3）若 $f(x)>-2$ 当且仅当 $1<x<2$，求 b 的取值范围.

19. 设 m 为正整数，数列 $a_1,a_2,...,a_{4m+2}$ 是公差不为 0 的等差数列，若从中删去两项 a_i 和 $a_j\left(i<j\right)$ 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组，且每组的 4 个数都能构成等差数列，则称数列 $a_1,a_2,...,a_{4m+2}$ 是 $\left(i,j\right)-$ 可分数列.

（1）写出所有的 $\left(i,j\right)$，$1\le i<j\le 6$，使数列 $a_1,a_2,...,a_6$ 是 $\left(i,j\right)-$ 可分数列；

（2）当 $m\ge 3$ 时，证明：数列 $a_1,a_2,...,a_{4m+2}$ 是 $\left(2,13\right)-$ 可分数列；

（3）从 $1,2,...,4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 $j\left(i<j\right)$，记数列 $a_1,a_2,...,a_{4m+2}$ 是 $\left(i,j\right)-$ 可分数列的概率为 P_m，证明：$P_m>\frac{1}{8}$.

参考答案

本试卷共 10 页，19 小题，满分 150 分.

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

3. 填空题和解答题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内. 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的．请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1．已知集合 $A=\left\{x \middle| -5<x^3<5\right\}, B=\{-3,-1,0,2,3\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{-1,0\}$　　B．$\{2,3\}$　　C．$\{-3,-1,0\}$　　D．$\{-1,0,2\}$

【答案】A

【解析】

【分析】化简集合A，由交集的概念即可得解.

【详解】因为 $A=\left\{x \mid -\sqrt[3]{5}<x<\sqrt[3]{5}\right\}, B=\left\{-3,-1,0,2,3\right\}$，且注意到 $1<\sqrt[3]{5}<2$，

从而 $A\cap B=\left\{-1,0\right\}$.

故选：A.

2．若 $\dfrac{z}{z-1}=1+\mathrm{i}$，则 $z=$（　　）

A．$-1-\mathrm{i}$　　B．$-1+\mathrm{i}$　　C．$1-\mathrm{i}$　　D．$1+\mathrm{i}$

【答案】C

【解析】

【分析】由复数四则运算法则直接运算即可求解.

【详解】因为 $\dfrac{z}{z-1}=\dfrac{z-1+1}{z-1}=1+\dfrac{1}{z-1}=1+\mathrm{i}$，所以 $z=1+\dfrac{1}{\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$.

故选：C.

3．已知向量 $\vec{a}=(0,1),\vec{b}=(2,x)$，若 $\vec{b}\perp(\vec{b}-4\vec{a})$，则 $x=$（　　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

【答案】D

【解析】

【分析】根据向量垂直的坐标运算可求x的值.

【详解】因为$\vec{b}\perp\left(\vec{b}-4\vec{a}\right)$，所以$\vec{b}\cdot\left(\vec{b}-4\vec{a}\right)=0$，

所以$\vec{b}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=0$即$4+x^2-4x=0$，故$x=2$，

故选：D.

4. 已知$\cos(\alpha+\beta)=m,\tan\alpha\tan\beta=2$，则$\cos(\alpha-\beta)=$（　　）

A. $-3m$　　B. $-\frac{m}{3}$　　C. $\frac{m}{3}$　　D. $3m$

【答案】A

【解析】

【分析】根据两角和的余弦可求$\cos\alpha\cos\beta,\sin\alpha\sin\beta$的关系，结合$\tan\alpha\tan\beta$的值可求前者，故可求$\cos\left(\alpha-\beta\right)$的值.

【详解】因为$\cos\left(\alpha+\beta\right)=m$，所以$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=m$，

而$\tan\alpha\tan\beta=2$，所以$\sin\alpha\sin\beta=2\cos\alpha\cos\beta$，

故$\cos\alpha\cos\beta-2\cos\alpha\cos\beta=m$即$\cos\alpha\cos\beta=-m$，

从而$\sin\alpha\sin\beta=-2m$，故$\cos\left(\alpha-\beta\right)=-3m$，

故选：A.

5. 已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且它们的高均为$\sqrt{3}$，则圆锥的体积为（　　）

A. $2\sqrt{3}\pi$　　B. $3\sqrt{3}\pi$　　C. $6\sqrt{3}\pi$　　D. $9\sqrt{3}\pi$

【答案】B

【解析】

【分析】设圆柱的底面半径为r，根据圆锥和圆柱的侧面积相等可得半径r的方程，求出解后可求圆锥的体积.

【详解】设圆柱的底面半径为r，则圆锥的母线长为$\sqrt{r^2+3}$，

而它们的侧面积相等，所以$2\pi r\times\sqrt{3}=\pi r\times\sqrt{3+r^2}$ 即$2\sqrt{3}=\sqrt{3+r^2}$，

故$r=3$，故圆锥的体积为$\frac{1}{3}\pi\times9\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}\pi$.

故选：B.

6. 已知函数为$f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a,x<0\\ \mathrm{e}^x+\ln(x+1),x\geq0\end{cases}$，在R上单调递增，则$a$取值的范围是（　　）

A. $(-\infty,0]$　　B. $[-1,0]$　　C. $[-1,1]$　　D. $[0,+\infty)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次函数的性质和分界点的大小关系即可得到不等式组，解出即可.

【详解】因为$f\left(x\right)$在R上单调递增，且$x\geq0$时，$f\left(x\right)=\mathrm{e}^x+\ln\left(x+1\right)$单调递增，

则需满足$\begin{cases}-\dfrac{-2a}{2\times\left(-1\right)}\geq0\\ -a\leq\mathrm{e}^0+\ln1\end{cases}$，解得$-1\leq a\leq0$，

即a的范围是$[-1,0]$.

故选：B.

7. 当xÎ $[0,2\pi]$时，曲线$y=\sin x$与$y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$的交点个数为（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 6　　D. 8

【答案】C

【解析】

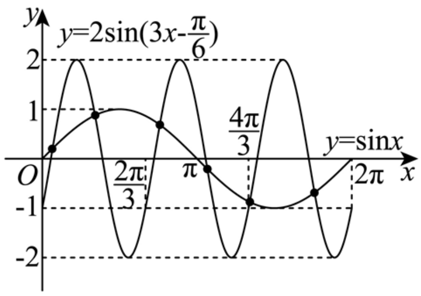
【分析】画出两函数在$\left[0,2\pi\right]$上的图象，根据图象即可求解

【详解】因为函数$y=\sin x$的的最小正周期为$T=2\pi$，

函数 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{3}$，

所以在 $x\in[0,2\pi]$ 上函数 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 有三个周期的图象，

在坐标系中结合五点法画出两函数图象，如图所示：



由图可知，两函数图象有 6 个交点.

故选：C

8. 已知函数为 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，且当 $x<3$ 时 $f(x)=x$，则下列结论中一定正确的是（　　）

A. $f(10)>100$　　　　B. $f(20)>1000$

C. $f(10)<1000$　　　　D. $f(20)<10000$

【答案】B

【解析】

【分析】代入得到 $f(1)=1, f(2)=2$，再利用函数性质和不等式的性质，逐渐递推即可判断.

【详解】因为当 $x<3$ 时 $f(x)=x$，所以 $f(1)=1, f(2)=2$，

又因为 $f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，

则 $f(3)>f(2)+f(1)=3, f(4)>f(3)+f(2)>5$，

$f(5)>f(4)+f(3)>8, f(6)>f(5)+f(4)>13, f(7)>f(6)+f(5)>21$，

$f(8)>f(7)+f(6)>34, f(9)>f(8)+f(7)>55, f(10)>f(9)+f(8)>89$，

$f(11)>f(10)+f(9)>144, f(12)>f(11)+f(10)>233, f(13)>f(12)+f(11)>377$

$f(14)>f(13)+f(12)>610, f(15)>f(14)+f(13)>987$，

$f(16)>f(15)+f(14)>1597>1000$，则依次下去可知 $f(20)>1000$，则 B 正确；

且无证据表明 ACD 一定正确.

故选：B.

【点睛】关键点点睛：本题的关键是利用 $f(1)=1, f(2)=2$，再利用题目所给的函数性质 $f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，代入函数值再结合不等式同向可加性，不断递推即可.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分，部分选对的得部分分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 为了解推动出口后的亩收入（单位：万元）情况，从该种植区抽取样本，得到推动出口后亩收入的样本均值 $\overline{x}=2.1$，样本方差 $s^2=0.01$，已知该种植区以往的亩收入 X 服从正态分布 $N\left(1.8,0.1^2\right)$，假设推动出口后的亩收入 Y 服从正态分布 $N\left(\overline{x},s^2\right)$，则（　　）（若随机变量 Z 服从正态分布 $N\left(u,\sigma^2\right)$，$P(Z<u+\sigma)\approx 0.8413$）

A. $P(X>2)>0.2$　　　　B. $P(X>2)<0.5$

C. $P(Y>2)>0.5$　　　　D. $P(Y>2)<0.8$

【答案】BC

【解析】

【分析】根据正态分布的 3σ 原则以及正态分布的对称性即可解出.

【详解】依题可知，$\overline{x}=2.1, s^2=0.01$，所以 Y： $N\left(2.1,0.1\right)$，

故 $P\left(Y>2\right)=P\left(Y>2.1-0.1\right)=P\left(Y<2.1+0.1\right)\approx 0.8413>0.5$，C 正确，D 错误；

因为 X： $N\left(1.8,0.1\right)$，所以 $P\left(X>2\right)=P\left(X>1.8+2\times 0.1\right)$，

因为$P\left(X<1.8+0.1\right)\approx 0.8413$，所以$P\left(X>1.8+0.1\right)\approx 1-0.8413=0.1587<0.2$，

而$P\left(X>2\right)=P\left(X>1.8+2\times 0.1\right)<P\left(X>1.8+0.1\right)<0.2$，B正确，A错误，

故选：BC.

10．设函数$f(x)=(x-1)^2(x-4)$，则（　　）

A．$x=3$是$f(x)$的极小值点

B．当$0<x<1$时，$f(x)<f\left(x^2\right)$

C．当$1<x<2$时，$-4<f(2x-1)<0$

D．当$-1<x<0$时，$f(2-x)>f(x)$

【答案】ACD

【解析】

【分析】求出函数$f\left(x\right)$的导数，得到极值点，即可判断A；利用函数的单调性可判断B；根据函数$f\left(x\right)$在$\left(1,3\right)$上的值域即可判断C；直接作差可判断D.

【详解】对A，因为函数$f\left(x\right)$的定义域为R，而$f'\left(x\right)=2\left(x-1\right)\left(x-4\right)+\left(x-1\right)^2=3\left(x-1\right)\left(x-3\right)$，

易知当$x\in\left(1,3\right)$时，$f'\left(x\right)<0$，当$x\in\left(-\infty,1\right)$或$x\in\left(3,+\infty\right)$时，$f'\left(x\right)>0$

函数$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,1\right)$上单调递增，在$\left(1,3\right)$上单调递减，在$\left(3,+\infty\right)$上单调递增，故$x=3$是函数$f\left(x\right)$的极小值点，正确；

对B，当$0<x<1$时，$x-x^2=x\left(1-x\right)>0$，所以$1>x>x^2>0$，

而由上可知，函数$f\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上单调递增，所以$f\left(x\right)>f\left(x^2\right)$，错误；

对C，当$1<x<2$时，$1<2x-1<3$，而由上可知，函数$f\left(x\right)$在$\left(1,3\right)$上单调递减，

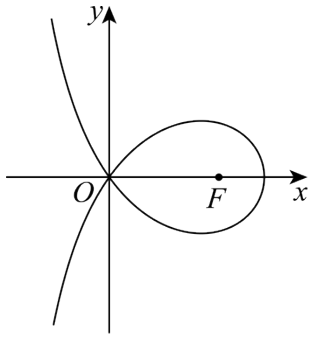
所以$f\left(1\right)>f\left(2x-1\right)>f\left(3\right)$，即$-4<f\left(2x-1\right)<0$，正确；

对D，当$-1<x<0$时，$f(2-x)-f(x)=\left(1-x\right)^2\left(-2-x\right)-\left(x-1\right)^2\left(x-4\right)=\left(x-1\right)^2\left(2-2x\right)>0$，

所以$f(2-x)>f(x)$，正确；

故选：ACD.

11．造型可以做成美丽的丝带，将其看作图中曲线 C 的一部分. 已知 C 过坐标原点 O. 且 C 上的点满足横坐标大于 -2，到点 $F(2,0)$ 的距离与到定直线 $x=a(a<0)$ 的距离之积为 4，则（　　）



A. $a=-2$　　　　B. 点 $(2\sqrt{2},0)$ 在 C 上

C. C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1　　　　D. 当点 $\left(x_0,y_0\right)$ 在 C 上时，$y_0\le\dfrac{4}{x_0+2}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据题设将原点代入曲线方程后可求 a，故可判断 A 的正误，结合曲线方程可判断 B 的正误，利用特例法可判断 C 的正误，将曲线方程化简后结合不等式的性质可判断 D 的正误.

【详解】对于 A：设曲线上的动点 $P\left(x,y\right)$，则 $x>-2$ 且 $\sqrt{\left(x-2\right)^2+y^2}\times\left|x-a\right|=4$，

因为曲线过坐标原点，故 $\sqrt{\left(0-2\right)^2+0^2}\times\left|0-a\right|=4$，解得 $a=-2$，故 A 正确.

对于 B：又曲线方程为 $\sqrt{\left(x-2\right)^2+y^2}\times\left|x+2\right|=4$，而 $x>-2$，

故 $\sqrt{\left(x-2\right)^2+y^2}\times\left(x+2\right)=4$.

当 $x=2\sqrt{2},y=0$ 时，$\sqrt{\left(2\sqrt{2}-2\right)^2}\times\left(2\sqrt{2}+2\right)=8-4=4$，

故$\left(2\sqrt{2},0\right)$在曲线上，故 B 正确.

对于 C：由曲线的方程可得$y^2=\frac{16}{\left(x+2\right)^2}-\left(x-2\right)^2$，取$x=\frac{3}{2}$，

则$y^2=\frac{64}{49}-\frac{1}{4}$，而$\frac{64}{49}-\frac{1}{4}-1=\frac{64}{49}-\frac{5}{4}=\frac{256-245}{49\times 4}>0$，故此时$y^2>1$，

故C在第一象限内点的纵坐标的最大值大于 1，故 C 错误.

对于 D：当点$\left(x_0,y_0\right)$在曲线上时，由 C 的分析可得$y_0^2=\frac{16}{\left(x_0+2\right)^2}-\left(x_0-2\right)^2\le\frac{16}{\left(x_0+2\right)^2}$，

故$-\frac{4}{x_0+2}\le y_0\le\frac{4}{x_0+2}$，故 D 正确.

故选：ABD.

【点睛】思路点睛：根据曲线方程讨论曲线的性质，一般需要将曲线方程变形化简后结合不等式的性质等来处理.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 设双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点分别为$F_1$、$F_2$，过$F_2$作平行于$y$轴的直线交$C$于$A$，$B$两点，若$|F_1A|=13,|AB|=10$，则$C$的离心率为__________.

【答案】$\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】由题意画出双曲线大致图象，求出$\left|AF_2\right|$，结合双曲线第一定义求出$\left|AF_1\right|$，即可得到a,b,c的值，从而求出离心率.

【详解】由题可知A,B,F_2三点横坐标相等，设 A 在第一象限，将$x=c$代入$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

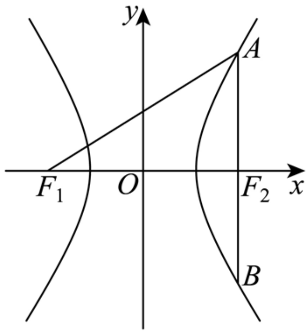
得$y=\pm\frac{b^2}{a}$，即$A\left(c,\frac{b^2}{a}\right),B\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$，故$\left|AB\right|=\frac{2b^2}{a}=10$，$\left|AF_2\right|=\frac{b^2}{a}=5$，

又$\left|AF_1\right|-\left|AF_2\right|=2a$，得$\left|AF_1\right|=\left|AF_2\right|+2a=2a+5=13$，解得$a=4$，代入$\frac{b^2}{a}=5$得

$b^2 = 20$，

故$c^2 = a^2 + b^2 = 36,$，即$c = 6$，所以$e = \frac{c}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

故答案为：$\frac{3}{2}$



13. 若曲线$y = \mathrm{e}^x + x$在点$(0,1)$处的切线也是曲线$y = \ln(x+1) + a$的切线，则$a =$_________.

【答案】$\ln 2$

【解析】

【分析】先求出曲线$y = \mathrm{e}^x + x$在$(0,1)$的切线方程，再设曲线$y = \ln(x+1) + a$的切点为$(x_0, \ln(x_0+1) + a)$，求出y'，利用公切线斜率相等求出x_0，表示出切线方程，结合两切线方程相同即可求解.

【详解】由$y = \mathrm{e}^x + x$得$y' = \mathrm{e}^x + 1$，$y'|_{x=0} = \mathrm{e}^0 + 1 = 2$，

故曲线$y = \mathrm{e}^x + x$在$(0,1)$处的切线方程为$y = 2x + 1$；

由$y = \ln(x+1) + a$得$y' = \frac{1}{x+1}$，

设切线与曲线$y = \ln(x+1) + a$相切的切点为$(x_0, \ln(x_0+1) + a)$，

由两曲线有公切线得$y' = \frac{1}{x_0+1} = 2$，解得$x_0 = -\frac{1}{2}$，则切点为$\left(-\frac{1}{2}, a + \ln\frac{1}{2}\right)$，

切线方程为$y = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) + a + \ln\frac{1}{2} = 2x + 1 + a - \ln 2$，

根据两切线重合, 所以$a - \ln 2 = 0$，解得$a = \ln 2$.