

上海市徐汇区 2024 届高三上学期一模数学试卷

学校 _____ 姓名: _____ 班级: _____ 考号: _____

一、填空题

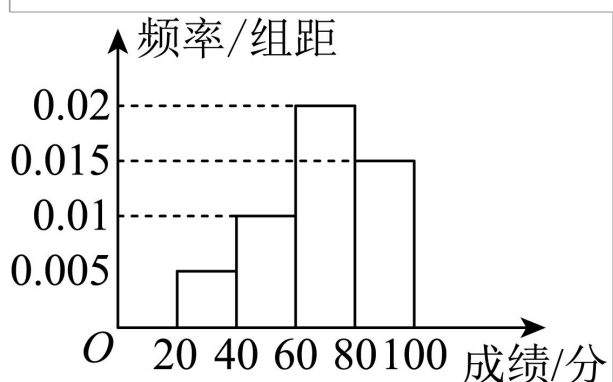
1. 已知全集 U , 集合 $A = \{x \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$, 则 $\complement_U A$ _____.

2. 不等式 $x^2 - 3x + 2 < 0$ 的解集为 _____.

3. 已知直线 $l: y = kx + 1$ 经过点 $(2, 3)$, 则直线 l 倾斜角的大小为 _____.

4. 若实数 x 满足 $x^2 + 2x - 3 = 0$, 则 $x^2 + 2x + 1$ 的最小值为 _____.

5. 某学校组织全校学生参加网络安全知识竞赛, 成绩 (单位: 分) 的频率分布直方图如图所示, 数据的分组依次为 $[20, 40)$, $[40, 60)$, $[60, 80)$, $[80, 100]$, 若该校的学生总人数为 1000, 则成绩低于 60 分的学生人数为 _____.



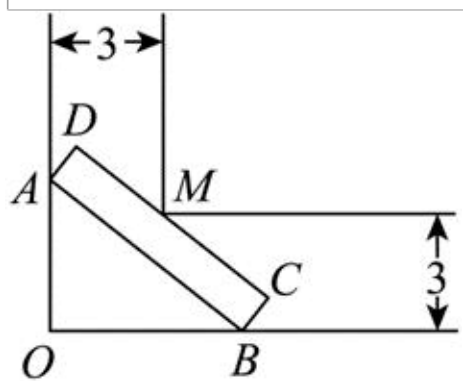
6. 函数 $f(x) = x^2 - 2x + 1$ 的零点是 _____.

7. 已知 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, 1)$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}|$ _____.

8. 要排出高一某班一天上午 4 节课的课表, 其中语文、数学、英语、艺术、体育各一节, 若要求语文、数学选一门第一节课上, 且艺术、体育不相邻上课, 则不同的排法种数是 _____.

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$, M 为边 AB 上的点, 且 $CM \perp AB$, 设 $AM = x$, 则 CM _____.

10. 某建筑物内一个水平直角型过道如图所示, 两过道的宽度均为 3 米, 有一个水平截面为矩形的设备需要水平通过直角型过道. 若该设备水平截面矩形的宽为 w 米, 则该设备能水平通过直角型过道的长 l 不超过 _____ 米.



11. 已知一个棱长为 1 的正方体木块可以在一个封闭的圆锥形容器内任意转动, 若圆锥

的底面半径为 r ，母线长为 l ，则实数 x 的最大值为__。

· 已知函数 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ ，其中 $x \in \mathbb{R}$ ，存在实数 a 使得 $f(x) \geq a$ 成立，若正整数 n 的最大值为 2023 ，则实数 a 的取值范围是_____。

二、单选题

· 设 $z_1 = a + bi$ ， $z_2 = c + di$ ，则 $z_1 z_2$ 中至少有一个数是虚数 是 z_1 是虚数 的 ()

- 充分非必要条件
- 必要非充分条件
- 充要条件
- 既非充分又非必要条件

· 艺术体操比赛共有 n 位评委分别给出某选手的原始评分，评定该选手的成绩时 从 n 个原始评分中去掉 m 个最高分、 m 个最低分，得到 $n - 2m$ 个有效评分。 $n - 2m$ 个有效评分与 n 个原始评分相比，不变的数字特征是

- 中位数
- 平均数
- 方差
- 极差

· 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\}$ ，若对于任意 $x \in A$ ，总存在与之相应的

(其中 $x \in \mathbb{R}$)，使得 $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ 成立，则称集合

是 A 集合。下列选项为 A 集合 的是 ()

- \mathbb{R}
- \mathbb{Q}
- \mathbb{Z}
- \mathbb{N}

· 已知数列 $\{a_n\}$ 为无穷数列。若存在正整数 k ，使得对任意的正整数 n ，均有 $a_{n+k} \leq a_n$ ，则称数列 $\{a_n\}$ 为 k 阶弱减数列。有以下两个命题：①数列 $\{a_n\}$ 为无穷数列且

(k 为正整数)，则数列 $\{a_n\}$ 是 k 阶弱减数列 的充要条件是 $a_{n+k} \leq a_n$ ；②数列 $\{a_n\}$ 为无穷数列且 $a_{n+k} \leq a_n$ (k 为正整数)，若存在 n ，使得数列 $\{a_n\}$ 是 k 阶弱减数列，则 $a_{n+k} \leq a_n$ 。那么 ()

- ①是真命题，②是假命题
- ①是假命题，②是真命题
- ① ②都是真命题
- ① ②都是假命题

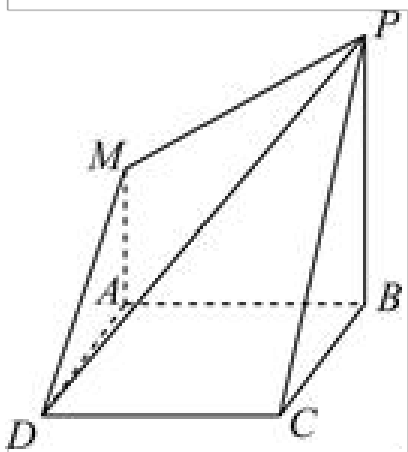
三、解答题

· 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $S_1 = 1$ ， $S_2 = 4$ 。

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

若等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，且满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2^n - 1$ ，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

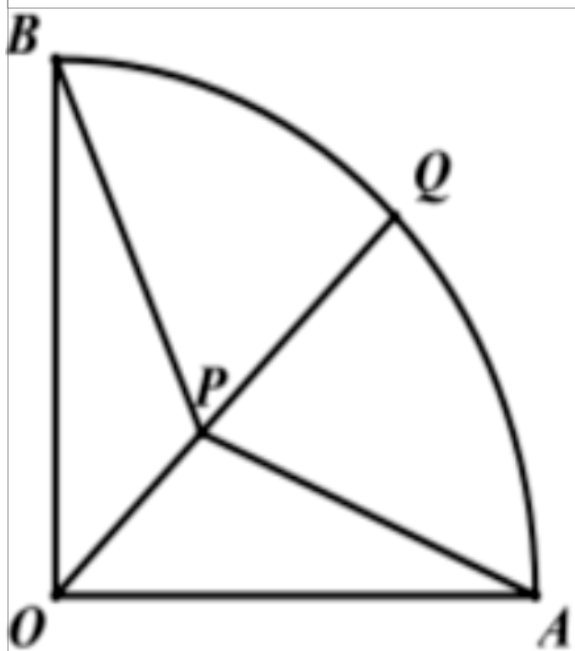
如图，某多面体的底面 $ABCD$ 为正方形， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， M 为 PD 的中点， N 为 PC 的中点， $AN \perp$ 平面 DMC 。



求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积；

求二面角 $A-DM-C$ 的平面角的正弦值。

2022年杭州亚运会首次启用机器狗搬运赛场上的运动装备。如图所示，在某项运动赛事扇形场地 AOB 中， $\angle AOB = 90^\circ$ ， $OA = OB = 1$ 米，点 P 是弧 AB 的中点， Q 为线段 OB 上一点（不与点 O ， B 重合）。为方便机器狗运输装备，现需在场地中铺设三条轨道 AP ， PQ ， BQ 。记 $\angle POQ = \theta$ ，三条轨道的总长度为 L 米。



将 L 表示成 θ 的函数，并写出 θ 的取值范围；

当三条轨道的总长度最小时，求轨道 BQ 的长。

已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率为 e 。

若 $a = \sqrt{2}$ ，且双曲线经过点 $(\sqrt{2}, 1)$ ，求双曲线的方程；

若 $e = \sqrt{2}$ ，双曲线的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ，焦点到双曲线的渐近线的距离为 $\sqrt{2}$ ，

点 P 在第一象限且在双曲线上，若 $|PF_1| = 3$ ，求 $|PF_2|$ 的值；

设圆 $C: x^2 + y^2 = r^2$ ， $r > 0$ 。若动直线 l 与圆 C 相切，且与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 交

于 $x = \frac{\pi}{2}$ 时，总有 $f(x) = -1$ ，求双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 离心率 e 的取值范围.

. 若函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 是以 T 为周期的函数，则称函数 $f(x)$ 具有 T 性质.

试判断函数 $f(x) = \sin x$ 和 $f(x) = \cos x$ 是否具有 T 性质，并说明理由；

已知函数 $f(x) = \sin x + \cos x$ ，其中 $T = \pi$ ，具有 T 性质，求函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的极小值点；

若函数 $f(x)$ 具有 T 性质，且存在实数 x_0 使得对任意 x 都有 $f(x) = f(x_0)$ 成立，求证： T 为周期函数.

(可用结论：若函数 $f(x)$ 的导函数满足 $f'(x) = 0$ ，则 $f(x)$ 为常数.)

参考答案：

1. ,

【分析】根据补集的定义直接进行运算即可

【详解】因为 $\| |$,

所以 $\bar{\| |}$,

故答案为: ,

. (0, 1)

【分析】由题设可得 $\frac{1}{-} 0$, 利用分式不等式的解法求解即可

【详解】由题设, $1 \frac{1}{-} \frac{1}{-} 0$,

$\therefore (- 1) 0$, 解得 $0 < 1$,

\therefore 解集为 $(0, 1)$

故答案为: $(0, 1)$

. —

【分析】先求得直线 的斜率, 进而求得直线 倾斜角的大小

【详解】由直线 经过点 $(1, 1)$, 可得 $1 = k \cdot 1 + b$, 解之得 $b = 1 - k$,

设直线 倾斜角为 α , 则 $\tan \alpha = k$,

又 $0 < \alpha < \pi$, 则 $\alpha = \arctan k$

则直线 倾斜角的大小为 $\arctan k$

故答案为: —

.

【分析】利用基本不等式计算即可

【详解】由 $a + \frac{1}{a} \geq 2$, 当且仅当 $a = 1$ 时取等号,

当且仅当 $a = 1$ 时取得最小值, 即 $a + \frac{1}{a}$ 的最小值为 2

故答案为:

. 00

【分析】先利用频率分布直方图求得成绩低于 0 分的频率, 进而求得该校成绩低于 0 分的

学生人数

【详解】图中成绩低于 分的频率为 ，

则该校成绩低于 分的学生人数为 (人)

故答案为：

· —

【分析】利用对数运算及零点含义可得答案

【详解】由题意可得函数的定义域为

，令 可得 ，解得 —或 (舍)，

故答案为：—

·

【分析】令 ，利用赋值法可得出

—————，即可得解

【详解】令 ，

则 ，

因此，

故答案为：

·

【分析】先排第一节，再利用插空法计算即可

【详解】先排第一节有 种排法，

再在其后排语数英中除第一节外的两科目，有 种不同排列

并形成 个空排艺术、体育两门科目，有 种排法，

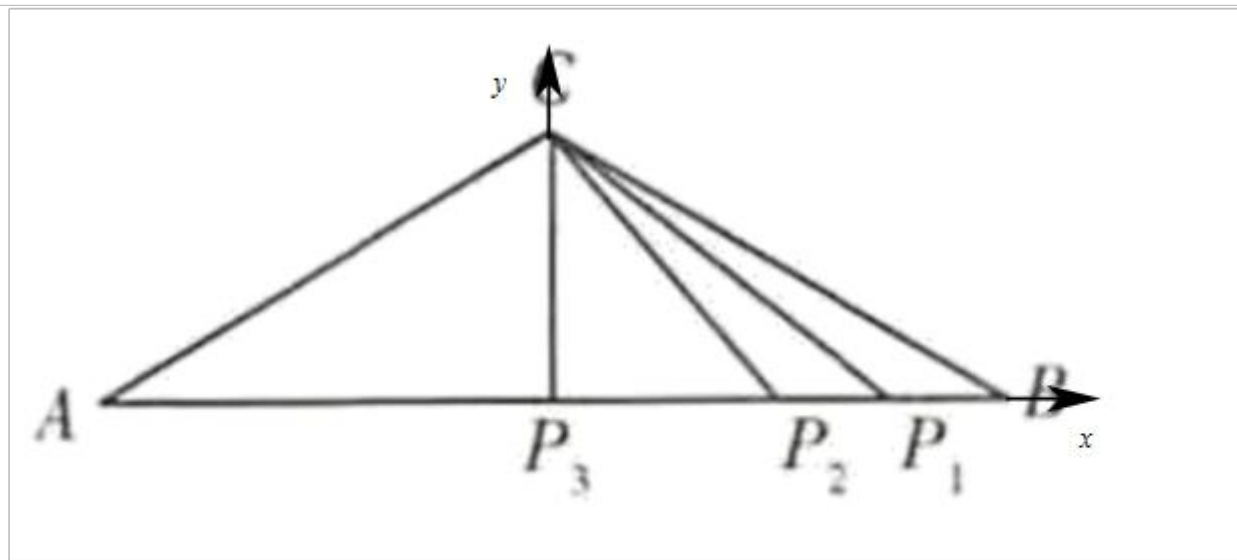
故不同的排课方法有 种方法

故答案为：

·

【分析】建立直角坐标系，利用数量积的坐标表示即可求解

【详解】



根据题意， CP_3 分别为线段 AB 的八分点，四分点，二分点，

以 C 为坐标原点， CA 所在直线为 y 轴建立坐标系，设 $CA = 8$ ， $CB = 6$ ，

则 $A(-8, 0)$ ， $B(6, 0)$ ， $C(0, 8)$ ， $P_3(0, 0)$ ， $P_2(2, 0)$ ， $P_1(4, 0)$ ，

所以

故答案为：

$$2\sqrt{5}$$

【分析】建立平面直角坐标系，利用直线 AB 的方程求得设备的长 l 的表达式，再利用均值定理求得 l 的最小值，进而得到该设备能水平通过直角型过道时 l 不超过的值

【详解】分别以 C 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系如图，

则 $A(-8, 0)$ ， $B(6, 0)$ ， $C(0, 8)$ ， $P_3(0, 0)$ ， $P_2(2, 0)$ ， $P_1(4, 0)$ ，

则直线 AB 的方程为 $y = -\frac{2}{5}x + 8$ ，

则 C 在直线 AB 的上方，且 C 到直线 AB 的距离为 $4\sqrt{5}$ ，

即 $4\sqrt{5} - l \leq \sqrt{2^2 + 4^2}$ ，则 $l \geq 4\sqrt{5} - \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ ，

整理得 $l \geq 2\sqrt{5}$ ，

设 $l = 2\sqrt{5} + t$ ， $t \geq 0$ ，则 $l = 2\sqrt{5} + t$ ，

则 $l = 2\sqrt{5} + t$ 可化为 $l = 2\sqrt{5} + t$ ，

令 $x = \sqrt{a^2 - y^2}$ ，则 $\sqrt{a^2 - y^2} - y$ ，则

$$\frac{d}{dy}(\sqrt{a^2 - y^2} - y) = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - y^2}} - 1 = -\frac{y + \sqrt{a^2 - y^2}}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

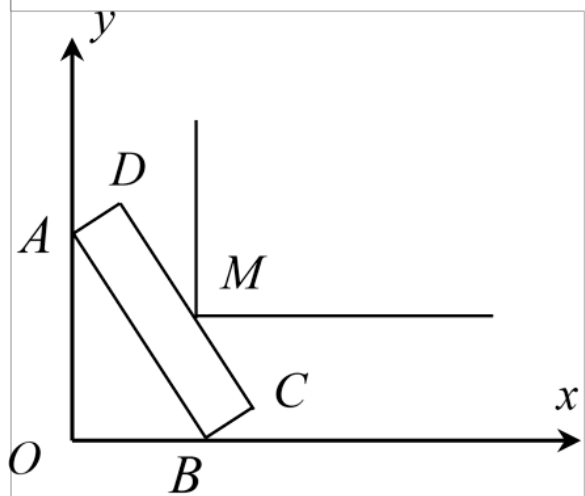
由 $\sqrt{a^2 - y^2} - y$ ，得 $\sqrt{a^2 - y^2} = y$ ，

又 $\sqrt{a^2 - y^2} - y$ 在 $\sqrt{a^2 - y^2}$ 上单调递增，

则 $\sqrt{a^2 - y^2} - y \leq \sqrt{a^2 - y^2} - \sqrt{a^2 - y^2}$ ，

则 $\sqrt{a^2 - y^2} - y \leq \sqrt{a^2 - y^2}$ (当且仅当 $\sqrt{a^2 - y^2} = y$ 时等号成立)

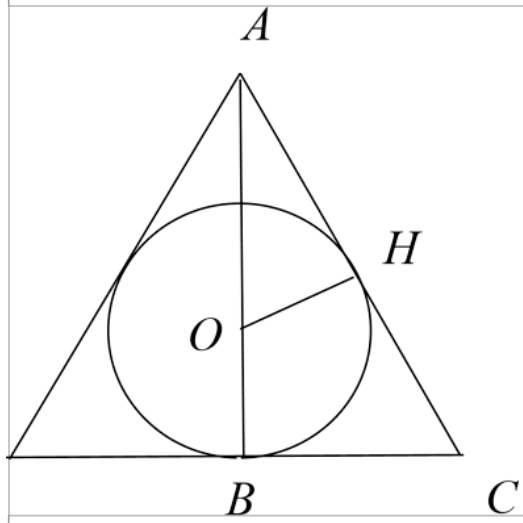
则该设备能水平通过直角型过道的长不超过 $\sqrt{a^2 - y^2}$ 米



故答案为: $\sqrt{a^2 - y^2}$

【分析】先求得圆锥内切球半径，进而求得该正方体木块的最大体对角线长，即可求得实数的最大值

【详解】圆锥的底面半径 r ，母线长 l ，则圆锥的高 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ ，



设圆锥的内切球半径 r ，

由 $\triangle AOB \sim \triangle AHC$ ，可得 $\frac{r}{h-r} = \frac{r}{h}$ ，

即 $r = \frac{\sqrt{3}}{2}h$ ，解之得 $h = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ ，

棱长为 a 的正方体的体对角线长为 $\sqrt{3}a$ ，则其外接球半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，

令 $\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ ，解之得

则实数 r 的最大值为

故答案为：

$\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ， $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ， $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ， $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

【分析】设 r ，得到 $h = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ ，然后分类讨论 r 的范围，解出

即可

【详解】设 r ， $h = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ ，

又因为 $r < \frac{h}{2}$ ，

所以 $r < \frac{h}{2} < \frac{2r}{\sqrt{3}}$ ，

则 $r < \frac{h}{2} < \frac{2r}{\sqrt{3}}$ ，

当时， $r < \frac{h}{2} < \frac{2r}{\sqrt{3}}$ ，

则 $r < \frac{h}{2} < \frac{2r}{\sqrt{3}}$ ，

显然存在任意正整数 n 使得 $r < \frac{h}{2} < \frac{2r}{\sqrt{3}}$ 成立；

当时， $r < \frac{h}{2} < \frac{2r}{\sqrt{3}}$ ，

，

要使得正整数 n 的最大值为 m ，则

$$n \leq m, \text{ 解得 } n \leq m,$$

当 $n = m$ 时， $n \leq m$ ，

，

显然存在任意整数 n 使得 $n \leq m$ 成立；

当 $n > m$ 时， $n \leq m$ ，

，

要使得正整数 n 的最大值为 m ，则

$$n \leq m, \text{ 解得 } n \leq m,$$

综上，则实数 n 的取值范围是 $n \leq m$ ，

故答案为： $n \leq m$ 。

.

【详解】若 a, b 皆是实数，则 $a + bi$ 一定不是虚数，因此当 $a + bi$ 是虚数时，则 a, b 中至少有一个数是虚数成立，即必要性成立；

当 a, b 中至少有一个数是虚数， $a + bi$ 不一定是虚数，如 $a = i, b = -i$ ，即充分性不成立，故选

考点：复数概念，充要关系

.

【解析】根据平均数、中位数、方差、极差的概念来进行求解，得到答案

【详解】从 n 个原始评分去掉 k 个最高分、 k 个最低分，得到 $n - 2k$ 个有效评分，其平均数、极差、方差都可能会发生改变，不变的数字特征数中位数

故选：

【点睛】本题考查平均数、中位数、方差、极差的概念，属于简单题

.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/167126150041006062>