# 7.4 二项分布与超几何分布

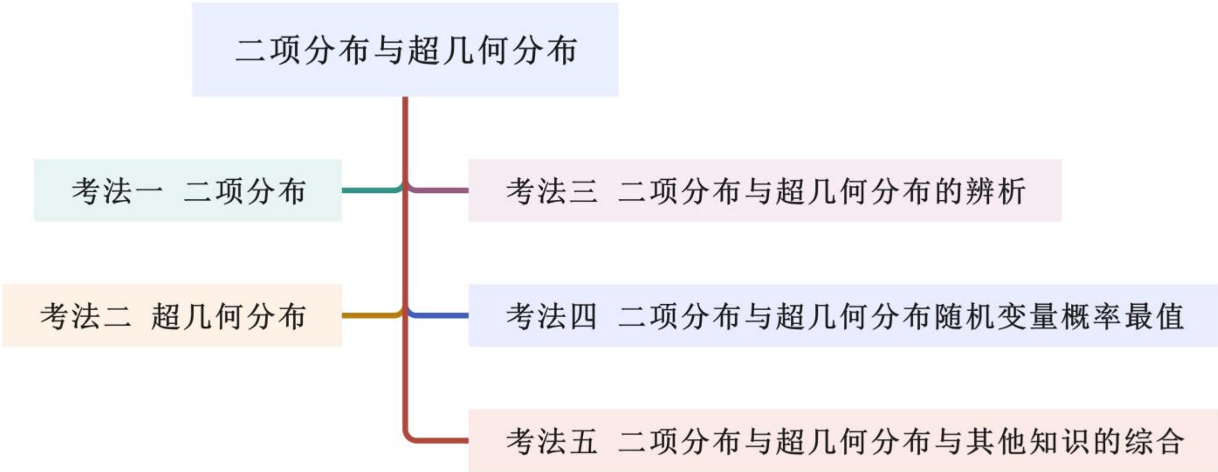
## 知识呈现

### 二项分布、超几何分布

- **n重伯努利试验**
  - 定义：将一个伯努利试验独立地重复进行n次所组成的随机试验称为n重伯努利试验
  - 特征：
    - 同一个伯努利试验重复做n次
    - 各次试验的结果相互独立
  - 注意：在相同条件下，有放回地抽样试验是n重伯努利试验
  - 判断依据：
    - ①要看该试验是不是在相同的条件下可以重复进行
    - ②每次试验相互独立，互不影响.
    - ③每次试验都只有两种结果，即事件发生，不发生.
- **二项分布**
  - 定义：**一般地，在 $n$ 重伯努利试验中，设每次试验中事件 $A$ 发生的概率为 $p(0<p<1)$，用 $X$ 表示事件 $A$ 发生的次数，则 $X$ 的分布列为 $P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,2,\dots,n$.称随机变量 $X$ 服从二项分布，记作 $X\sim B(n,p)$.**
  - 特征：
    - 在每一次试验中，事件发生的概率相同
    - 各次试验中的事件是相互独立的
    - 在每一次试验中，试验的结果只有两个，即发生与不发生
  - 均值与方差：若X～B(n，p)，则E(X)＝np，D(X)＝np(1－p)
- **超几何分布**
  - 定义：**一般地，假设一批产品共有 $N$ 件，其中有 $M$ 件次品，从 $N$ 件产品中随机抽取 $n$ 件(不放回)，用 $X$ 表示抽取的 $n$ 件产品中的次品数，则 $X$ 的分布列为 $P(X=k)=\dfrac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$，$k=m,m+1,m+2,\dots,r$.其中 $n,N,M\in N^*$，$M\le N$，$n\le N$，$m=\max\{0,n-N+M\}$，$r=\min\{n,M\}$.如果随机变量 $X$ 的分布列具有上式的形式，那么称随机变量 $X$ 服从超几何分布.**
  - 判断依据：
    - ①总体是否可分为两类明确的对象.
    - ②是否为不放回抽样
    - ③随机变量是否为样本中其中一类个体的个数
  - 解题思路：
    - 第一步：验证随机变量服从超几何分布，并确定数$N$，$M$，$n$的值
    - 第二步：根据超几何分布的概率计算公式计算随机变量取每一个值时的概率
    - 第三步：用表格的形式列出分布列

【公众号：该学习了】

## 例题剖析




**考法一 二项分布**

【例 1】（2024 上·安徽合肥·高三合肥一六八中学校联考期末）甲、乙两人进行射击比赛，每次比赛中，甲、乙各射击一次，甲、乙每次至少射中 8 环.根据统计资料可知，甲击中 8 环、9 环、10 环的概率分别为$0.7,0.2,0.1$，乙击中 8 环、9 环、10 环的概率分别为$0.6,0.2,0.2$，且甲、乙两人射击相互独立.

(1)在一场比赛中，求乙击中的环数少于甲击中的环数的概率；

(2)若独立进行三场比赛，其中$X$场比赛中甲击中的环数多于乙击中的环数，求$X$的分布列与数学期望.

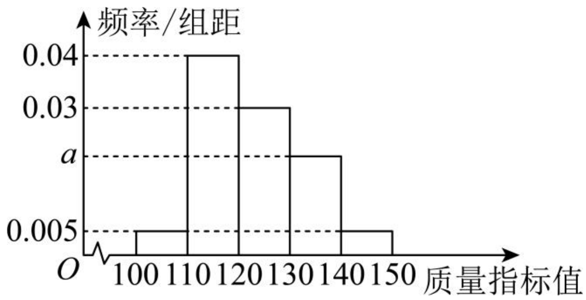
【一隅三反】

1．（2024·内蒙古赤峰）已知某单位招聘程序分两步：第一步是笔试，笔试合格才能进入第二步面试；面试合格才算通过该单位的招聘.现有$A$，$B$，$C$三位毕业生应聘该单位，假设$A$，$B$，$C$三位毕业生笔试合格的概率分别是$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$；面试合格的概率分别是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$.

(1)求$A$，$B$两位毕业生中有且只有一位通过招聘的概率；

(2)记随机变量$X$为$A$，$B$，$C$三位毕业生中通过招聘的人数，求$X$的分布列与数学期望.

2．（2024上·内蒙古鄂尔多斯 ）为了检查工厂生产的某产品的质量指标，随机抽取了部分产品进行检测，所得数据统计如下图所示.（注：产品质量指标达到130及以上为优质品）；




(1)求$a$的值以及这批产品的优质率；

(2)以本次抽检的频率作为概率，从工厂生产的所有产品中随机抽出4件，记这4件中优质产品的件数为$X$，求$X$的分布列与数学期望.

## 考法二 超几何分布

【例 2】（2023 上·内蒙古呼伦贝尔）已知盒子内有大小相同的 10 个球，其中红球有 $m$ 个，已知从盒子中任取 2 个球都是红球的概率为 $\frac{2}{15}$.

(1)求 $m$ 的值；

(2)现从盒子中任取 3 个球，记取出的球中红球的个数为 $X$，求 $X$ 的分布列和数学期望.

【一隅三反】

1．（2023·全国·高三专题练习）"英才计划"最早开始于 2013 年，由中国科协、教育部共同组织实施，到 2022 年已经培养了 6000 多名具有创新潜质的优秀中学生，为选拔培养对象，某高校在暑假期间从武汉市的中学里挑选优秀学生参加数学、物理、化学、信息技术学科夏令营活动．若化学组的 12 名学员中恰有 5 人来自同一中学，从这 12 名学员中选取 3 人，$\xi$ 表示选取的人中来自该中学的人数，求 $\xi$ 的分布列和数学期望.

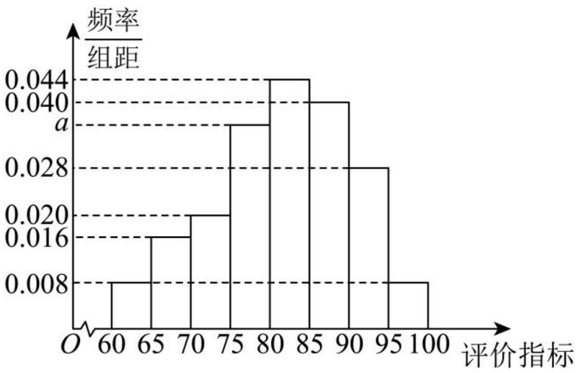
2.（2023上·江苏南通·高三海门中学校考阶段练习）某班为了庆祝我国传统节日中秋节，设计了一个小游戏：在一个不透明箱中装有4个黑球，3个红球，1个黄球，这些球除颜色外完全相同.每位学生从中一次随机摸出3个球，观察颜色后放回.若摸出的球中有$X$个红球，则分得$X$个月饼；若摸出的球中有黄球，则需要表演一个节目.

(1)求一学生既分得月饼又要表演节目的概率；

(2)求每位学生分得月饼数的概率分布和数学期望.

3.（2023·陕西商洛·陕西省丹凤中学校考模拟预测）某乒乓球队训练教官为了检验学员某项技能的水平，随机抽取100名学员进行测试，并根据该项技能的评价指标，按

$[60,65),[65,70),[70,75),[75,80),[80,85),[85,90),[90,95),[95,100]$分成8组，得到如图所示的频率分布直方图.




(1)求$a$的值，并估计该项技能的评价指标的中位数（精确到0.1）；

(2)若采用分层抽样的方法从评价指标在$[70,75)$和$[85,90)$内的学员中随机抽取12名，再从这12名学员中随机抽取5名学员，记抽取到学员的该项技能的评价指标在$[70,75)$内的学员人数为$X$，求$X$的分布列与数学期望.

## 考法三 二项分布与超几何分布的辨析

【例 3-1】（2023 湖南）下列随机事件中的随机变量 $X$ 服从超几何分布的是（　　）

A．将一枚硬币连抛 3 次，记正面向上的次数为 $X$

B．从 7 男 3 女共 10 名学生干部中随机选出 5 名学生干部，记选出女生的人数为 $X$

C．某射手的射击命中率为 0.8，现对目标射击 1 次，记命中的次数为 $X$

D．盒中有 4 个白球和 3 个黑球，每次从中摸出 1 个球且不放回，记第一次摸出黑球时摸取的次数为 $X$

【例 3-2】（2023 上海）下列例子中随机变量服从二项分布的个数为（　　）

①某同学投篮的命中率为 0.6，他 10 次投篮中命中的次数 $\xi$；

②某射手击中目标的概率为 0.9，从开始射击到击中目标所需的射击次数 $\xi$；

③从装有 5 个红球，5 个白球的袋中，有放回地摸球，直到摸出白球为止，摸到白球时的摸球次数 $\xi$；

④有一批产品共有 $N$ 件，其中 $M$ 件为次品，采用不放回抽取方法，$\xi$ 表示 $n$ 次抽取中出现次品的件数

A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

【例 3-3】（2024·天津 ）已知条件①采用无放回抽取：②采用有放回抽取，请在上述两个条件中任选一个，补充在下面问题中横线上并作答，选两个条件作答的以条件①评分.

问题：在一个口袋中装有 3 个红球和 4 个白球，这些球除颜色外完全相同，若____________，从这 7 个球中随机抽取 3 个球，记取出的 3 个球中红球的个数为 $X$，求随机变量 $X$ 的分布列和期望.

【一隅三反】

1．(2024 北京）(多选)下列随机变量中，服从超几何分布的有（　　）

A．在 10 件产品中有 3 件次品，一件一件地不放回地任意取出 4 件，记取到的次品数为 $X$

B．从 3 台甲型彩电和 2 台乙型彩电中任取 2 台，记 $X$ 表示所取的 2 台彩电中甲型彩电的台数

C．一名学生骑自行车上学，途中有 6 个交通岗，记此学生遇到红灯的数为随机变量 $X$

D．从 10 名男生，5 名女生中选 3 人参加植树活动，其中男生人数记为 $X$

2．(2023 安徽）(多选)下列事件不是 $n$ 重伯努利试验的是（　　）

A．运动员甲射击一次，“射中 9 环”与“射中 8 环”

B．甲、乙两运动员各射击一次，“甲射中 10 环”与“乙射中 9 环”

C．甲、乙两运动员各射击一次，“甲、乙都射中目标”与“甲、乙都没射中目标”

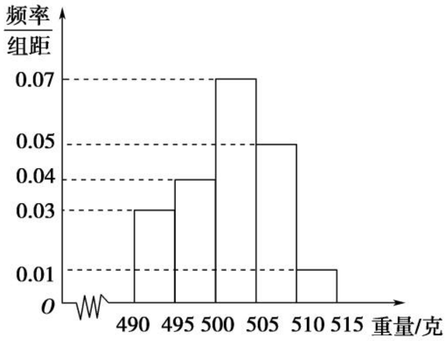
D．在相同的条件下，甲射击 10 次，5 次击中目标

3（2023 上·陕西西安 ）某中学进行校庆知识竞赛，参赛的同学需要从 10 道题中随机抽取 4 道来回答．竞赛规则规定：每题回答正确得 10 分，回答不正确得 $-5$ 分．

(1)已知甲同学每题回答正确的概率均为 0.5，且各题回答正确与否之间没有影响，记甲的总得分为 $X$，求 $X$ 的期望和方差；

(2)已知乙同学能正确回答 10 道题中的 6 道，记乙的总得分为 $Y$，求 $Y$ 的分布列．

4（2023 云南）某食品厂为了检查一条自动包装流水线的生产情况，随机抽取该流水线上的 40 件产品作为样本称出它们的质量(单位：克)，质量的分组区间为(490，495]，(495，500]，…，(510，515]．由此得到样本的频率分布直方图如图.



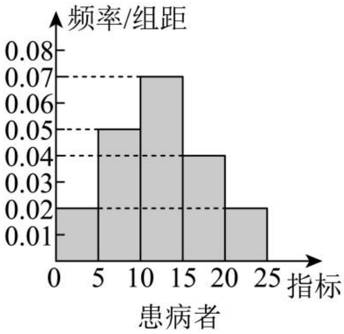

（1）根据频率分布直方图，求质量超过 505 克的产品数量；

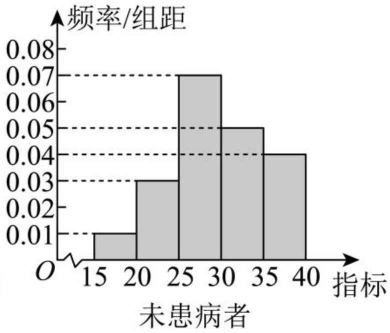
（2）在上述抽取的 40 件产品中任取 2 件，设 $X$ 为质量超过 505 克的产品数量，求 $X$ 的分布列；

（3）从该流水线上任取 2 件产品，设 $Y$ 为质量超过 505 克的产品数量，求 $Y$ 的分布列.

## 考法四 二项分布与超几何分布随机变量概率最值

【例 4-1】（2024 上·北京丰台 ）2023 年冬，甲型流感病毒来势汹汹．某科研小组经过研究发现，患病者与未患病者的某项医学指标有明显差异．在某地的两类人群中各随机抽取 20 人的该项医学指标作为样本，得到如下的患病者和未患病者该指标的频率分布直方图：




利用该指标制定一个检测标准，需要确定临界值 $a$，将该指标小于 $a$ 的人判定为阳性，大于或等于 $a$ 的人判定为阴性．此检测标准的漏诊率是将患病者判定为阴性的概率，记为 $p(a)$；误诊率是将未患病者判定为阳性的概率，记为 $q(a)$．假设数据在组内均匀分布，用频率估计概率．

(1)当临界值 $a=20$ 时，求漏诊率 $p(a)$ 和误诊率 $q(a)$；

(2)从指标在区间 $[20,25]$ 样本中随机抽取 2 人，记随机变量 $X$ 为未患病者的人数，求 $X$ 的分布列和数学期望；

(3)在该地患病者占全部人口的 5%的情况下，记 $f(a)$ 为该地诊断结果不符合真实情况的概率．当 $a\in[20,25]$ 时，直接写出使得 $f(a)$ 取最小值时的 $a$ 的值．

【例 4-2】（2024 上·河南漯河 ）为了引导居民合理用电，国家决定实行合理的阶梯电价，居民用电原则上以住宅为单位（一套住宅为一户）.

| 阶梯级别 | 第一阶梯 | 第二阶梯 | 第三阶梯 |
|---|---|---|---|
| 月用电范围（度） | $[0,210]$ | $(210,400]$ | $(400,+\infty)$ |

某市随机抽取 10 户同一个月的用电情况，得到统计表如下：

| 居民用电户编号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 用电量（度） | 53 | 86 | 90 | 124 | 214 | 215 | 220 | 225 | 420 | 430 |

(1)若规定第一阶梯电价每度 0.5 元，第二阶梯超出第一阶梯的部分每度 0.6 元，第三阶梯超出第二阶梯的部分每度 0.8 元，试计算某居民用电户用电 450 度时应交电费多少元？

(2)现要从这 10 户家庭中任意选取 3 户，求取到第二阶梯电量的户数的分布列与期望；

(3)以表中抽到的 10 户作为样本估计全市居民用电，现从全市中依次抽取 10 户，记取到第一阶梯电量的户数为$Y$，当$Y=k$时对应的概率为$P_k$，求$P_k$取得最大值时$k$的值.

【一隅三反】

1.（2024·全国·模拟预测）在信道内传输0，1信号，信号的传输相互独立.发送0时，收到1的概率为$\alpha(0<\alpha<1)$，收到 0 的概率为$1-\alpha$；发送 1 时，收到 0 的概率为$\beta(0<\beta<1)$，收到 1 的概率为$1-\beta$．考虑两种传输方案：单次传输和三次传输．单次传输是指每个信号只发送 1 次，三次传输是指每个信号重复发送 3 次．收到的信号需要译码，译码规则如下：单次传输时，收到的信号即为译码；三次传输时，收到的信号中出现次数多的即为译码（例如，若依次收到 1，0，1，则译码为 1）.

(1)当$\alpha=\dfrac{2}{5}$时，若发送 0，则要得到正确信号，试比较单次传输和三次传输方案的概率大小；

(2)若采用三次传输方案发送 1，记收到的信号中出现 2 次信号 1 的概率为$f(\beta)$，出现 3 次信号 1 的概率为$g(\beta)$，求$f(\beta)-g(\beta)$的最大值.

2．（2024 上·陕西西安·高二西安市铁一中学校考期末）某种植户对一块地的$n\left(n\in N^{*},n>2\right)$个坑进行播种，每个坑播$3$粒种子，每粒种子发芽的概率均为$\dfrac{1}{2}$，且每粒种子是否发芽相互独立，对每一个坑而言，如果至少有两粒种子发芽，则不需要进行补播种，否则要补播种.

(1)从 $n$个坑中选两个坑进行观察，两坑不能相邻，有多少种方案？

(2)对于单独一个坑，需要补播种的概率是多少？

(3)当 $n$取何值时，有 3 个坑要补播种的概率最大？最大概率为多少？