第二章　测度论

引言

实变函数论的核心问题是对读者在数学分析中已学过的黎曼（Riemann）积分进行推广，而建立一种应用范围更广，使用起来更灵活、便利的新的积分理论即 Lebesgue 积分理论.

数学分析中 Riemann 积分基本上是处理几乎连续的函数，但随着理论的发展，Riemann 积分理论的缺陷变得愈来愈明显，主要表面在以下两个方面：一方面是对被积函数的连续性要求太强，以致于著名的 Dirichlet 函数这样一种非常简单的函数都不可积；另一方面是应用起来有很大的局限性，这种局限性突出表现在可积函数项级数的逐项积分，以及可积函数列的积分与极限的可交换性方面，一般要求函数列或函数项级数要具有一致收敛性,而这一要求在实际问题中常常得不到满足，或虽然满足要想验证又非常的繁复,因此，无论在理论方面还是在实际应用方面改进 Riemann 积分的定义使之适用更广泛的函数类是很有必要的.

通常对 Riemann 积分的改进可从两方面着手,一方面是对积分范围划分的改进。在 Riemann 积分中，对积分范围的划分一般是采用通常意义下的“有面积”或“有体积”划分，即把积分范围划分成在通常意义下“有面积或体积”的小块.这种划分的方法无法控制在每个小块上函数值的变化幅度以致于 Dirichlet 函数不可积. 所以有必要对“有面积或体积”划分的含义进行扩充，即对通常意义下的“有面积或体积”的集合进行扩充，使之适合于更广的一类集合，由此便产生了本章要介绍的集合的测度；另一方面是对被积函数进行改进 . Riemann 积分中的被积函数对连续的要求很苛刻，以致于函数的连续性稍微不好，就会导致函数不可积. 所以有必要对被积函数在已有的测度的基础上进行扩充，使之适合于更广的一类函数，由此产生了第三章要介绍的可测函数 .

本章主要介绍集合的 Lebesgue 测度，它是通常意义下“面积或体积”概念的一种推广（即能保持通常意义下“体（面）积”的特性：①非负性；②当集合为区间时，其测度即为区间的体积；③完全可加性即当$\{E_i\}$为一列互不相交的

有测度的集合时，$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 的测度恰好为每个集的测度之和）.

§1 外测度

一、外测度的定义

记 R^n 中的开区间 $I=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid a_i<x_i<b_i, i=1,2,\cdots,n\}$ 其中 $a_i<b_i$ 为有限数.

若上述记号中等号可能出现，则称 I 为区间，显然 $R^n=R^1$ 时，I 即为 R^1 上的区间.

另外还规定 $|I|=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$ 为区间 I 的体积.

定义 1　设 $E\subset R^n$，$\{I_i\}$ 是 R^n 中覆盖 E 的任一列开区间，即 $E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$，

记 $\mu=\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|$（$\mu$ 可以取 $+\infty$），显然所有这样的 μ 构成一个有下界的数集，则它的下确界称为 E 的 Lebesgue 外测度，记为 m^*E 即 $m^*E=\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}|I_i| \mid E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\}$.

注　定义中覆盖 E 的开区间列，可以只有有限个开区间，也可以有可数个开区间，显然，对任意 $E\subset R^n$，m^*E 均存在，且可以取 $+\infty$.

二、外测度的基本性质

定理　外测度具有如下性质：

（1）对任意 $E\subset R^n$ 都有 $m^*E\geq 0$ 且 $m^*\varnothing=0$　（非负性），

（2）设 $B\subset A\subset R^n$，则 $m^*B\leq m^*A$　（单调性），

（3）设 $A_i\subset R^n$，则 $m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)\leq\sum_{i=1}^{\infty}m^*A_i$（次可加性），

（4）设 $A,B\subset R^n$，若 $\rho(A,B)>0$，则 $m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B$（隔离性）.

证明 （1）显然成立。下面只证（2）（3）（4）

（2）因为对任意覆盖 A 的开区间列 $\{I_i\}$，即 $A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$，由于 $B\subset A$

所以 $B\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$，从而 $m^*B\le\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|$，$m^*B\le\inf\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|=m^*A$，$A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$.

(3) 由外测度的定义知，对任意给定的正数 ε，存在覆盖 A_i 的开区间列 $\{I_m^{(i)}\}$ 使

$$\sum_{m=1}^{\infty}|I_m^{(i)}|\le m^*A_i+\frac{\varepsilon}{2^i},\qquad i=1,2,\cdots$$

显然

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty}I_m^{(i)}\Big)\supset\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i \text{ 且 } \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|I_m^{(i)}|=\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}|I_m^{(i)}|\Big)\le\sum_{i=1}^{\infty}\Big(m^*A_i+\frac{\varepsilon}{2^i}\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}m^*A_i+\varepsilon$$

所以 $m^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)\le\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|I_m^{(i)}|\le\sum_{i=1}^{\infty}m^*A_i+\varepsilon$.

（4）仅在 R^1 上证明. 对任意 $\varepsilon>0$，存在开区间列 $\{I_n\}$，使 $A\cup B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\le m^*(A\cup B)+\varepsilon$，

因为 $\rho(A,B)=d>0$，若 $|I_n|<d$，则 I_n 保留；若 $|I_n|\ge d$，则用分点将 I_n 分成有限个小的

开区间 $J_1,J_2,\cdots,J_k$，使 $|J_i|<d\ (i=1,2\cdots k)$，并且各分点再用 $k-1$ 个长度小于 d 的开区

间 $L_1,L_2\cdots L_{k-1}$ 盖住，使得 $\sum_{i=1}^{k-1}|L_i|<\varepsilon/2^n$，用上述得到的 $J_1,\cdots,J_k$ 及 $L_1,\cdots,L_{k-1}$ 代替 I_n，

显然 $\sum_{i=1}^{k}|J_i|+\sum_{i=1}^{k-1}|L_i|<|I_n|+\frac{\varepsilon}{2^n}$，

把改造后的开区间列记为 $\{k_m\}$，则 $A\cup B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}k_m$，

且 $\quad |k_m| \quad |I_n| \quad \frac{\ }{2^n} \quad m*(A \quad B)\ 2$.

$\quad\ {}_{m\ 1} \qquad {}_{n\ 1} \qquad {}_{n\ 1}$

由于$|k_m|$ d，k_m 中任何k_m不可能同时含有 A,B 中的点，所以把 k_m 分为两类，

含有 A 中点的k_m作为一类记为k_n ，含有 B 中点的k_m作为一类记为k_n ，则

$A \quad k_n$，$B \quad k_n$

所以 $m*A \quad m*B \qquad |k_{n'}| \quad |k_{n''}| \quad |k_m| \quad m*(A \quad B)\ 2$ ，

$\qquad\qquad\qquad\qquad {}_{m\ 1}$

再让 $\to 0$ 得

$m*A \quad m*B \quad m*(A \quad B)$， 证毕.

例 1 设 E 为[0，1]中的全体有理数，则$m*E \quad 0$.

证明 因为 E 为可数集 记为 $E \quad \{r_1, r_2, ..\, r_n, ...\}$

对任意$\varepsilon>0$，取 $I_n \quad r_n \quad \frac{\ }{2^{n\ 1}}, r_n \quad \frac{\ }{2^{n\ 1}}, n \quad 1,2,$

显然，$E \quad I_n$,所以$0 \quad m*E \quad |I_n| \quad \frac{\ }{2^n}$ ，

$\qquad {}_{n\ 1} \qquad\qquad {}_{n\ 1} \qquad {}_{n\ 1}$

让$\varepsilon \to 0$ 得 $m*E \quad 0$，证毕.

思考题 若 E 为R^n中的可数点集，则$m*E \quad 0$.

注 外测度为零的集称为零测集，故R^n中的可数点集为零测集.

例 2 若$m*A \quad 0$，则对任意$E \quad R^n$，总有$m*(E \quad A) \quad m*E$.

证明 由外测度的性质（1)、（2）得

$m*E \quad m*(E \quad A) \quad m*E \quad m*A \quad m*E$，

所以 $m*(E \quad A) \quad m*E$.

例 3 （1）零测集的任意子集仍为零测集.

（2）至多可数个零测集的并集仍为零测集.

由零测集的定义及外测度的性质易证，证明留给读者.

例 4　对任何区间 $I \subset R^n$，总有 $m^*I = |I|$.

证明　对任意 $\varepsilon > 0$，存在开区间 I^*，使 $I \subset I^*$ 且 $|I^*| < |I| + \varepsilon$，由外测度的定义知 $m^*I \le |I^*| \le |I| + \varepsilon$，再让 $\varepsilon \to 0$，得 $m^*I \le |I|$.

下证 $m^*I \ge |I|$.

对任意 $\varepsilon > 0$，作闭区间 I_0，使 $I_0 \subset I$ 且 $|I| < |I_0| + \frac{\varepsilon}{2}$. 又由外测度的定义知对上述 I_0 及 ε，存在开区间列 $\{I_i\}$ 使 $I_0 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$，且 $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \le m^*I_0 + \frac{\varepsilon}{2}$，由 Borel 有限覆盖定理，在 $\{I_i\}$ 中存在有限多个区间，不妨设为 $I_1, \cdots, I_k$ 使 $I_0 \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_i$，所以 $|I_0| \le \sum_{i=1}^{k} |I_i|$ 从而

$$|I| < |I_0| + \frac{\varepsilon}{2} \le \sum_{i=1}^{k} |I_i| + \frac{\varepsilon}{2} \le \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| + \frac{\varepsilon}{2} \le m^*I_0 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = m^*I_0 + \varepsilon \le m^*I + \varepsilon,$$

让 $\varepsilon \to 0$，得 $|I| \le m^*I$，故 $|I| = m^*I$，证毕.

思考题　若 I 为无穷区间，如何证明?

注　例 4 表明外测度是“面积或体积”的一种拓广.

§2　可测集

上节介绍的集合的外测度是区间“体积”的一种拓广，这种拓广是否为通常意义下“体积”的拓广呢? 在通常意义下，有体积的集合有这样一个性质:“对两个有体积的不交集合 A,B，总有 $A \cup B$ 的体积 = A 的体积 + B 的体积，即体积具有可加性”，对外测度而言，当 $\rho(A,B) > 0$ 时，$m^*(A \cup B) = m^*A + m^*B$，但仅当 $A \cap B = \varnothing$ 且 $\rho(A,B) = 0$ 时有例子可以说明 $m^*(A \cup B) = m^*A + m^*B$ 并不一定成立，这说明对一般集合而言外测度并非通常意义下“体积”的拓广. 要想做到这一点，必须对所考虑的集合作一些限制(正如通常意义下并非每个集合都有体积

一样）. 本节要介绍的可测集就是这种限制下的集合。可测集的定义方法很多，本节采用一种在理论上运用很广泛的定义方法——德国数学家 C • Caratheodory 给出的定义.

一、可测集的定义及等价条件

定义 1　设 E　R^n,如果对任意 T　R^n 总有

$$m^*T = m^*(T \quad E) \quad m^*(T \quad E^c),$$

则称 E 为 Lebesgue 可测集，或 E 称是可测的，此时 E 的外测度 m^*E 称为 E 的 Lebesgue 测度，记为 mE .

注　与外测度不同，并非每个集都是可测的即都有测度.

下面用一个定理给出可测集的几种等价条件.

定理 1　设 E　R^n,则下列三种说法是等价的

（1）E 是可测集,

（2）E^c 是可测集,

（3）对任意 A　E, B　E^c,总有 $m^*(A \quad B) \quad m^*A \quad m^*B$,

证明　先证（1）与（2）的等价性

事实上，E 可测　对任意 T　R^n 总有 $m^*T \quad m^*(T \quad E) \quad m^*(T \quad E^c)$

对任意 T　R^n 总有 $m^*T \quad m^*(T \quad E^c) \quad m^*(T \quad (E^c)^c)$

E^c 可测 .

再证（1）与（3）的等价性

一方面　若 E 可测，则 对任意 A　E, B　E^c,记 T　A　B

$$m^*(A \quad B) \quad m^* \quad A \quad B \quad E \quad m^*((A \quad B) \quad E^c) \quad m^*A \quad m^*B$$

另一方面　对任意 T　R^n,记 A　T　E　E, B　T　E^c　E^c

因为 T　A　B,所以 $m^*T \quad m^*(A \quad B) \quad m^*A \quad m^*B \quad m^*(T \quad E) \quad m^*(T \quad E^c)$,

从而 E 为可测集，证毕 .

注　由（3）立即可推出若$m^*E=0$(即E为零测集)，则E可测，从而再由（2）可推出R^n是可测的.

二、可测集的基本性质

定理 2　若E_1,E_2都可测，则$E_1\cup E_2,E_1\cap E_2$也可测.

证明　$\forall T\subset R^n$，如图示

$$T=(T\cap(E_1\setminus E_2))\cup(T\cap(E_2\setminus E_1))\cup(T\cap(E_1\cap E_2))\cup(T\setminus(E_1\cup E_2))=A\cup B\cup C\cup D$$

因$A\cup C\subset E_1$,$B\cup D\subset E_1^c$,而E_1可测,

由定理 1（3）得

$$m^*T=m^*(A\cup B\cup C\cup D)=m^*(A\cup C\cup B\cup D)$$

$$=m^*(A\cup C)+m^*(B\cup D)$$

同理　$m^*(A\cup C\cup B)=m^*B+m^*(A\cup C)$

又因E_2可测，所以$m^*(B\cup D)=m^*B+m^*D$，

所以　$m^*T=m^*(A\cup C)+m^*B+m^*D=m^*(A\cup B\cup C)+m^*D$

$$=m^*(T\cap(E_1\cup E_2))+m^*(T\setminus(E_1\cup E_2))=m^*(T\cap(E_1\cup E_2))+m^*(T\cap(E_1\cup E_2)^c)$$

，

所以 $E_1\cup E_2$可测.

又$E_1\cap E_2=(E_1^c\cup E_2^c)^c$由定理 1 及上述已证并集的可测性知，$E_1\cap E_2$也可测.

推论 1　若E_1,E_2可测，则$E_1\setminus E_2$也可测.

证明　因$E_1\setminus E_2=E_1\cap E_2^c$.

推论 2　若E_i（$i=1,2,\cdots,m$）都可测，则$\bigcup_{i=1}^{m}E_i$，$\bigcap_{i=1}^{m}E_i$都可测，并且当E_i两两不交时，

对任意 $T\subset R^n$， $m^*(T\cap(\bigcup_{i=1}^m E_i))=\sum_{i=1}^m m^*(T\cap E_i)$

特别 当 $T=\bigcup_{i=1}^m E_i$ 时，$m(\bigcup_{i=1}^m E_i)=\sum_{i=1}^m mE_i$.

证明 反复利用定理 2 即得 $\bigcup_{i=1}^m E_i$ 与 $\bigcap_{i=1}^m E_i$ 的可测性. 下证当 E_i 两两不交时

$\forall T\subset R^n$

$$m^*(T\cap(\bigcup_{i=1}^m E_i))=\sum_{i=1}^m m^*(T\cap E_i)$$

只证两个集合 E_1,E_2 的情形，一般情形反复利用两个集合的情形立即可得.

因 $T\cap(E_1\cup E_2)=(T\cap E_1)\cup(T\cap E_2)=A\cup B$，其中 $A\subset E_1$，$B\subset E_2\subset E_1^c$

而 E_1 可测，由定理 1 得

$$m^*(T\cap(E_1\cup E_2))=m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B=m^*(T\cap E_1)+m^*(T\cap E_2).$$

定理 3 若 $E_i, i=1,2,\cdots$，都是可测的，则 $\bigcup_{i=1}^\infty E_i$ 也是可测的，并且当 E_i 两两不交时，

总有对任意 $T\subset R^n$， $m^*(T\cap(\bigcup_{i=1}^\infty E_i))=\sum_{i=1}^\infty m^*(T\cap E_i)$.

特别 取 $T=\bigcup_{i=1}^\infty E_i$，有 $m(\bigcup_{i=1}^\infty E_i)=\sum_{i=1}^\infty mE_i$， ……（1）

证明 由于 $\bigcup_{i=1}^\infty E_i=E_1\cup(E_2\setminus E_1)\cup(E_3\setminus\bigcup_{j=1}^2 E_j)\cup\cdots\cup(E_i\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1} E_j)\cup\cdots$

所以只须证明当 E_i 两两不交时，$\bigcup_{i=1}^\infty E_i$ 可测即可.

不妨设 E_i 两两不交，记 $S=\bigcup_{i=1}^\infty E_i$， $\forall T\subset R^n$

显然 $m^*T\le m^*(T\cap S)+m^*(T\cap S^c)$

且 $m^*(T\quad S)\ m^*(T\quad (\ \underset{n\,1}{}\ E_n))\quad \underset{n\,1}{}\ m^*(T\quad E_n)$

而由推论 2, 对任意自然数i, $\overset{i}{\underset{j\,1}{}}\ m^*(T\quad E_j)\ \ m^*(T\quad (\overset{i}{\underset{ji\,1}{}}\ E_j))$

所以 $m^*T\quad m^*(T\quad (\overset{i}{\underset{j\,1}{}}\ E_j))\ m^*(T\quad (\overset{i}{\underset{j\,1}{}}\ E_j)^c)$

$\geqslant \overset{i}{\underset{j\,1}{}}\ m^*(T\quad E_j)\ \ m^*(T\quad (\ \underset{i\,1}{}\ E_i)^c$,(因为 $\overset{i}{\underset{j\,1}{}}\ E_j^{\ c}\qquad \underset{i\,1}{}\ E_i^{\ c}$

让i 得

$m^*T\qquad \underset{i\,1}{}\ m^*(T\quad E_i)\ \ m^*(T\quad (\ \underset{i\,1}{}\ E_i)^c\quad m^*(T\quad S)\ \ m^*(T\quad S^c)$ ………(*)

所以 $m^*T\quad m^*(T\quad S)\ \ m^*(T\quad S^c)$，故 $\underset{n\,1}{}\ E_n$ 可测 .

在（*）中取T 为T $\underset{i\,1}{}\ E_i$，即 $m^*(T\quad \underset{i\,1}{}\ E_i)= \underset{i\,1}{}\ m^*(T\quad E_i)$，证毕.

注 定理 3 中等式（1）称为测度的完全可加性，它表明测度确为通常意义下“体积的拓广.

推论 3 若 E_n 可测, n =1, 2, …, 则

（1） $\underset{n\,1}{}\ E_n$ 也可测, （2） $\underline{\lim}_{n} E_n$, $\overline{\lim}_{n} E_n$ 也可测 .

证明 （1）因为 $\underset{n\,1}{}\ E_n\qquad \underset{n\,1}{}\ E_n^{c\ \ c}$.

（2） $\underline{\lim}_{n} E_n\qquad \underset{n\,1}{}\underset{k\,n}{}\ E_k$, $\overline{\lim}_{n} E_n\qquad \underset{n\,1}{}\underset{k\,n}{}\ E_k$.

综合以上定理及推论知，可测集对集合的至多可数并、交、差（余）及极限运算是封闭的. 若 M 表示 R^n 中的可测集全体，则显然 M 是一个 域.

下面，我们再给出单调可测集列的测度性质 .

定理 4　设 E_n ,n　1,2,　为单调上升的可测集列，

记 $S = \;\; E_n \;\; \lim_n E_n$ ，　则 $\lim_n mE_n \;\; mS$.

$n\,1$

证明　因为 E_n 单调上升，记 E_0 　，所以

$S = \;\; E_n \;\; (E_n \backslash E_{n\,1})$，其中 $E_n \backslash E_{n\,1}$ 两两不交，由定理 3 得

$n\,1 \quad n\,1$

$$mS \quad m(E_n \backslash E_{n\,1}) \quad \lim_n{}^{n} m(E_i \backslash E_{i\,1}) \quad \lim_n m({}^{n} (E_i \backslash E_{i\,1})) \quad \lim_n mE_n .$$

$n\,1 \quad i\,1 \quad i\,1$

定理 5　设 E_n , n　1,2　为单调下降的可测集列，$E = \;\; E_n \;\; \lim_n E_n$,若存在某

$n\,1$

个 E_{n_0} ，

使 mE_{n_0} 　，则 $mE \;\; \lim_n mE_n$.

证明　不妨设 mE_1 　，则 $E_1 \backslash E_n$ 单调上升且

$$(E_1 \backslash E_n) \quad (E_1 \quad E_n{}^c) \quad E_1 \quad (\quad E_n{}^c) \quad E_1 \quad (\quad E_n)^c \quad E_1 \backslash \quad E_n \quad E_1 \backslash E$$

$n\,1 \quad n\,1 \quad n\,1 \quad n\,1 \quad n\,1$

由定理 4 知，$m(E_1 \backslash E) \;\; \lim_n m(E_1 \backslash E_n)$，

又 mE_1 　，$mE_1 \;\; m(E_1 \backslash E) \;\; E \;\; m(E_1 \backslash E) \;\; mE$

$$mE_1 \quad m(E_1 \backslash E_n) \quad E_n \quad m(E_1 \backslash E_n) \quad mE_n$$

所以 $mE \;\; \lim_n mE_n$ ，证毕.

注　定理 5 中存在某个 E_{n_0} 使 mE_{n_0} 　不能去掉，否则结论不一定成立 ,比如

取 $E_n \;\; (n, \;\;)$，n　1,2,　,显然 E_n 单调下降，

E_n ,mE_n 　但 $\lim_n mE_n$ 　0　m　.

$n\,1$

§3　可测集类及可测集的结构

一、可测集类

在§2 中，我们曾指出零测集是可测集，即下面的定理成立.

定理 1 （1）外测度为 0 的集为可测集.

（2）零测集的任何子集为零测集，从而也为可测集

（3）至多可数个零测集的并集仍为零测集，从而也为可测集

除零测集外，还有哪些常见集合是可测集呢？下面先考查区间的可测性

定理 2 R^n中任何区间 I 都是可测集，且$mI \quad |I|$.

证明 先证对任一开区间I_0，总有$m^*(I_0 \quad I) \quad m^*(I_0 \quad I^c) \quad |I_0|$

仅就$R^n \quad R^2$的情形证明，一般情形证明方法类似.

因为$I_0 \quad I^c$可以分解成至多四个互不相交的区间$I_i, i \quad 1,2,3,4$，

所以 $m^*(I_0 \quad I^c) \quad \sum_{i 1}^{4} |I_i|$

而 $I_0 \quad (I_0 \quad I) \quad I_1 \quad I_2 \quad I_3 \quad I_4$ 从而$|I_0| \quad |I_0 \quad I| \quad \sum_{i 1}^{4} |I_i|$

所以 $m^*(I_0 \quad I) \quad m^*(I_0 \quad I^c) \quad |I_0 \quad I| \quad \sum_{i 1}^{4} |I_i|$

反向不等式显然成立，所以

$$m^*(I_0 \quad I) \quad m^*(I_0 \quad I^c) \quad |I_0|$$

再证 I 的可测性

对任意$T \quad R^n$，由外测度的定义知 对任意 $\quad 0$总存在一列开区间$\{I_i\}$，

使得$T \quad \sum_{i 1} I_i$,且 $\sum_{i 1} |I_i| \quad m^*T \quad$ ，又$T \quad I \quad \sum_{i 1} (I \quad I_i)$,$T \quad I^c \quad \sum_{i 1} (I^c \quad I_i)$

所以 $m^*(T \quad I) \quad \sum_{i 1} m^*(I_i \quad I)$，$m^*(T \quad I^c) \quad \sum_{i 1} m^*(I_i \quad I^c)$

从而 $m^*(T \quad I) \quad m^*(T \quad I^c) \quad \sum_{i 1} m^*(I_i \quad I) \quad \sum_{i 1} m^*(I_i \quad I^c)$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} m^*(I_i \cap I) + m^*(I_i \cap I^c)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \le m^*T + \varepsilon$$

让 $\varepsilon \to 0$,得 $m^*(T \cap I) + m^*(T \cap I^c) \le m^*T$

反向不等式显然成立，所以

$m^*(T \cap I) + m^*(T \cap I^c) = m^*T$，故 I 可测，证毕.

由定理 2 再结合开集、闭集，Borel 集的结构以及可测集的运算性质知

定理 3 R^n 中的开集，闭集及 Borel 集都是可测集.

显然 Borel 集合全体构成一个 σ 域，而且还可证明并非每个可测集都是 Borel 集，那么可测集类除 Borel 集外，究竟还包含一些怎样的集呢？这一些集合与 Borel 集之间有何关系呢？

二、可测集与 Borel 集的关系

定理 4 设 $E \subset R^m$,则存在 G_δ 型集 G，使 $E \subset G$，且 $mG = m^*E$.

证明 由外测度的定义知，对任意自然数 n，存在一列开区间 $\{I_i^n\}$，使

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^n, \text{且} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i^n| \le m^*E + \frac{1}{n}$$

记 $G_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^{(n)}$, $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$，显然 G 为 G_δ 型集，且 $E \subset G \subset G_n$

所以 $m^*E \le m^*G = mG \le mG_n \le \sum_{i=1}^{\infty} |I_i^{(n)}| \le m^*E + \frac{1}{n}$

让 $n \to \infty$ 得 $mG = m^*E$，证毕.

定理 5 设 $E \subset R^m$，则下列关系等价

（1）E 为可测集，

（2）对任意 $\varepsilon > 0$.存在开集 G，使 $E \subset G$.且 $m(G \setminus E) < \varepsilon$，

（3）存在 G_δ 型集 G，使 $E \subset G$，且 $mG = m^*E$，$m(G \setminus E) = 0$.