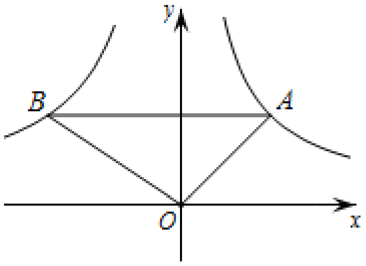
专题 02 已知面积求 k

1．如图，点A是函数 $y_1=\frac{4}{x}(x>0)$ 图像上的任意一点，过点A作 $AB // x$ 轴，交另一个函数 $y_2=\frac{k}{x}(k<0,x<0)$ 的图像于点 B．



(1)若 $S_{\triangle AOB}=5$，则 $k=$________．

(2)当 $k=-8$ 时，若点A的横坐标是1，则线段 $OB=$________．

(3)若无论点A在何处，函数 $y_2=\frac{k}{x}(k<0,x<0)$ 图像上总存在一点 D，使得四边形 $AOBD$ 为平行四边形，求 k 的值．

【答案】(1)－6

(2) $2\sqrt{5}$

(3)存在，$k=-8$

【分析】（1）如图：AB 交 y 轴于 M，根据反比例函数的比例系数的几何意义得 $S_{VAOM}=\frac{1}{2}\times 4=2$，$S_{VBOM}=\frac{1}{2}|k|=-\frac{1}{2}k$，由于 $S_{\triangle AOB}=5$，则 $2-\frac{1}{2}k=5$，即可得出 k 的值；

（2）由 $y_1=\frac{4}{x}(x>0)$ 可得出 $A(1,4)$，再由 $y_2=-\frac{8}{x}(x<0)$ 可得出 $B(-2,4)$，即可得出 OB 的长度；

（3）如图，作 $AH\perp x$ 轴于点 H，$DF\perp AB$ 于点 F，证 $\triangle DBF\cong\triangle AOH$，得出 D 点的坐标即可得出 k 的值．

（1）

解：如图：AB 交 y 轴于 M，

∵点A是函数 $y_1=\frac{4}{x}(x>0)$，点 B 是函数 $y_2=\frac{k}{x}(k<0,x<0)$，

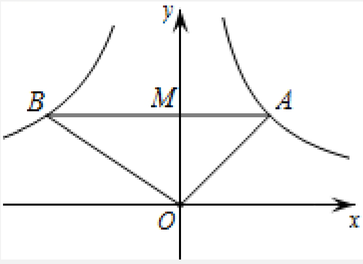
∴由反比例函数的比例系数的几何意义得：$S_{VAOM}=\frac{1}{2}\times 4=2$，$S_{VBOM}=\frac{1}{2}|k|=-\frac{1}{2}k$，

∵ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOM}+S_{\triangle HOM}=5$，

∴ $2-\frac{1}{2}k=5$，

∴ $k=-6$；

故答案为：-6；



（2）

由题意得：

当 $x=1$ 时，$y=\frac{4}{4}=1$，

∴ $A(1,4)$，

当 $k=-8$ 时，$y_2=-\frac{8}{x}(x<0)$，

当 $y=4$ 时，$4=\frac{-8}{x}$，

∴ $x=-2$，

∴ $B(-2,4)$，

∴ $OB=\sqrt{(-2-0)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$；

故答案为：$2\sqrt{5}$；

（3）

存在，点 D 在点 B 上方，

如图，作 $AH\perp x$ 轴于点 H，$DF\perp AB$ 于点 F，

设 $A\left(a,\frac{4}{a}\right)$，则 $B\left(\frac{ka}{4},\frac{4}{a}\right)$，则 $AH=\frac{4}{a}$，$OH=a$，

∵四边形 $AOBD$ 为平行四边形，

∴ $BD=AO$，$BD//AO$，

∴ $\angle DBF=\angle BAO$，

∵ $AB//x$ 轴，

∴ $\angle AOH=\angle BAO$，

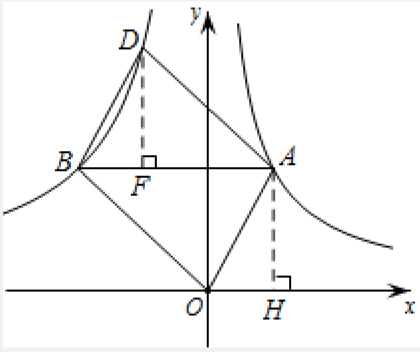
∴ $\triangle DBF\cong\triangle AOH$，

$\therefore BF = OH = a$，$DF = AH = \frac{4}{a}$，

$\therefore D\left(\frac{ka}{4}+a, \frac{8}{a}\right)$，

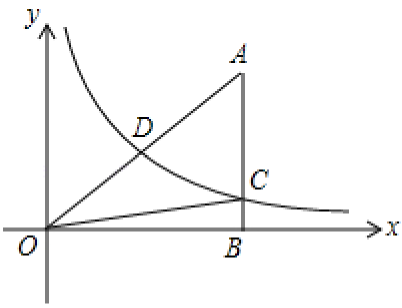
$\therefore \left(\frac{ka}{4}+a\right)\cdot\frac{8}{a}=k$，

解得 $k=-8$.



【点睛】本题考查了反比例函数的综合题：掌握反比例函数图像上点的坐标特征、反比例函数的比例系数的几何意义和平行四边形的性质是解题的关键.

2．如图，在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，$Rt\triangle OAB$ 的直角边 OB 在 x 轴的正半轴上，点 A 的坐标为（6，4），斜边 OA 的中点 D 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$x>0$）的图象上，AB 交该图象于点 C，连接 OC.



(1)求 k 的值；

(2)求△OAC 的面积.

【答案】(1)6

(2)9

【分析】（1）根据线段中点的坐标的确定方法求得点 D 的坐标，再根据反比例函数图象上点的坐标特征求出 k；

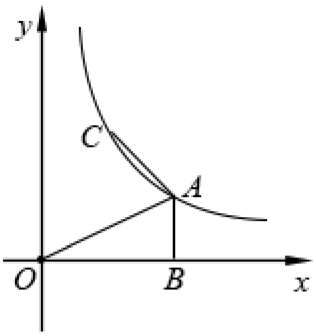
（2）由反比例函数解析式求出点 C 的纵坐标，进而求出 AC 的长，再根据三角形的面积公式计算即可.

（1）解：$\because$ 点A的坐标为$(6,4)$，点D为OA的中点，$\therefore$ 点D的坐标为$(3,2)$，$\because$ 点D在反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象上，$\therefore k=3\times2=6$；

（2）解：由题意得，点C的横坐标为6，$\therefore$ 点C的纵坐标为：$\frac{6}{6}=1$，$\therefore AC=4-1=3$，$\therefore \Delta OAC$的面积$=\frac{1}{2}\times6\times3=9$．

【点睛】本题考查的是反比例函数系数k的几何意义、反比例函数图象上点的坐标特征，掌握反比例函数的性质、解题的关键是正确求出AC的长度．

3．如图，点A在反比例函数$y=\frac{k}{x}(x>0)$的图像上，$AB\perp x$轴，垂足为B，$\tan\angle AOB=\frac{1}{2}, AB=2$．



(1)求k的值：

(2)点C在这个反比例函数图像上，且$\angle BAC=135°$，求OC的长．

【答案】(1)8

(2)$2\sqrt{5}$

【分析】（1）利用正切函数的定义可求出OB的长度，进而根据反比例函数中k值的几何意义可求得k值．

（2）连接OC,过点C作$CH\perp x$轴于点H，过点A作$AM\perp CH$于点M，根据（1）中结论利用矩形的性质可求出OH，CH的长度，进而利用勾股定理可得OC长度．

(1)

解：$\because \tan\angle AOB=\frac{AB}{OB}=\frac{1}{2}, AB=2$

$\therefore OB=4$

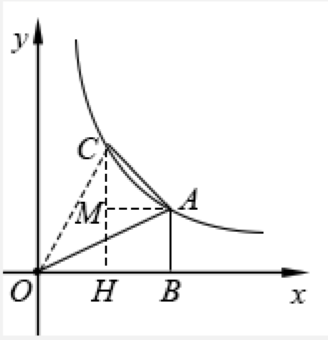
根据k值的几何意义可知：

$\therefore k=2S_{\triangle OAB}=2\times\frac{1}{2}AB\times OA$

$k = 8$

(2)

解：如图所示，连接 OC,过点 C 作 $CH \perp x$ 轴于点 H，过点 A 作 $AM \perp CH$ 于点 M.



Q $AM \perp CH, AB \perp x, CH \perp x$

$\therefore$ 四边形 $AMHB$ 是矩形

$\therefore AM = BH, AB = HM, \angle BAM = 90°$

Q $\angle BAC = 135°$

$\therefore \angle MAC = \angle BAC - \angle BAM = 45°$

$\therefore AM = CM$

设 $OH = x$，则 $CM = AM = BH = OB - OH = 4 - x$，

$\therefore CH = CM + MH = 4 - x + 2 = 6 - x$

$\therefore x(6 - x) = 8$

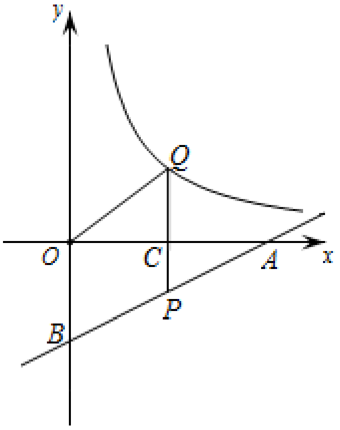
解得：$x_1 = 2, x_2 = 4$（舍去）

则 $OH = 2, CH = 4$

$\therefore OC = \sqrt{OH^2 + CH^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

【点睛】本题考查了反比例函数的几何应用，涉及到勾股定理、矩形的判定与性质、以及反比例函数的性质，熟练掌握反比例函数中的 k 值的几何意义是解决本题的关键.

4．如图，一次函数 $y = \frac{1}{2}x - 2$ 的图象分别交 x 轴、y 轴于 A 、B，P 为 AB 上一点且 PC 为VAOB 的中位线，PC 的延长线交反比例函数 $y = \frac{k}{x}$（$k > 0$）的图象于点 Q，$S_{VOQC} = \frac{3}{2}$.



（1）求A点和B点的坐标；

（2）求k的值和Q点的坐标．

【答案】（1）A（4，0），B（0，-2）；（2）$k=3$，Q的坐标为$(2,\frac{3}{2})$．

【分析】（1）因为一次函数$y=\frac{1}{2}x-2$的图象分别交x轴，y轴于A，B，所以当$y=0$时，可求出A的横坐标，当$x=0$时可求出B的纵坐标，从而可得解．

（2）因为三角形OQC的面积是Q点的横纵坐标乘积的一半，且等于$\frac{3}{2}$，所以可求出k的值，PC为中位线，可求出C的横坐标，也是Q的横坐标，代入反比例函数可求出纵坐标．

【详解】解：（1）设A点的坐标为（a，0），B点坐标为（0，b），

分别代入$y=\frac{1}{2}x-2$，解方程得$a=4$，$b=-2$，

∴A（4，0），B（0，-2）；

（2）∵PC是△AOB的中位线，

∴$PC\perp x$轴，即$QC\perp OC$，

又Q在反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象上，

∴$2S_{\triangle}OQC=k$，

∴$k=2\times\frac{3}{2}=3$，

∵PC是△AOB的中位线，

∴C（2，0），

可设Q（2，q）

∵Q在反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象上，

∴$q=\frac{3}{2}$，

∴点 Q 的坐标为(2，$\frac{3}{2}$).

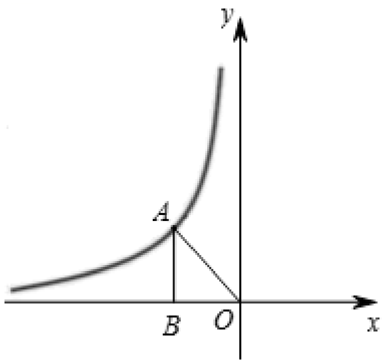
【点睛】本题考查反比例函数的综合运用，熟练掌握并应用反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k>0$）中 k 的几何意义是解题的关键.

5．已知反比例函数 $y=\frac{k-1}{x}$（k 为常数，$k\neq1$）.

（Ⅰ）若点 $A(1,2)$ 在这个函数的图象上，求 k 的值；

（Ⅱ）若在这个函数图象的每一支上，y 随 x 的增大而减小，求 k 的取值范围；

（Ⅲ）如图，若反比例函数 $y=\frac{k-1}{x}(x<0)$ 的图象经过点 A，$AB\perp x$ 轴于 B，且$\triangle AOB$ 的面积为 6，求 k 的值；



【答案】(1) $k=3$；(2) $k>1$；(3) $k=-11$

【分析】(1) 根据反比例函数图象上点的坐标特征得到 k-1=1×2，然后解方程即可；

(2) 根据反比例函数的性质得 k-1>0，然后解不等式即可；

(3) 根据反比例函数 k 的几何意义求解即可.

【详解】(1) ∵点 $A(1,2)$ 在这个函数的图象上，

∴ $k-1=1\times2$，

∴ $k=3$；

(2) ∵在这个函数图象的每一支上，y 随 x 的增大而减小，

∴ $k-1>0$，

∴ $k>1$；

(3) 由题根据反比函数 k 的几何意义，可知：$S_{\triangle AOB}=\frac{|k-1|}{2}$，

∴ $\frac{|k-1|}{2}=6$，解得：$k=13$ 或 $k=-11$，

又∵反比例函数图象经过第二象限，

$\therefore k-1<0$，即：$k<1$，

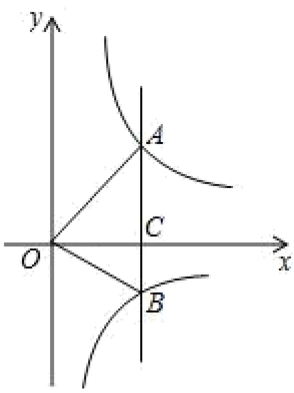
$\therefore k=-11$.

【点睛】本题考查求解反比例函数的系数，反比函数的性质及反比例函数 k 的几何意义，熟记基本性质是解题关键.

6．如图，直线 $x=t(t>0)$与双曲线 $y=\frac{k_1}{x}(k_1>0)$交于点 A，与双曲线 $y=\frac{k_2}{x}(k_2<0)$交于点 B，连接 OA，OB.

(1)当 k_1、k_2 分别为某一确定值时，随 t 值的增大，$\triangle AOB$ 的面积________(填增大、不变、或减小)

(2)当 $k_1+k_2=0$，$S_{\triangle AOB}=8$ 时，求 k_1、k_2 的值.



【答案】（1）不变；（2）$k_1=8$，$k_2=-8$.

【分析】（1）根据反比例函数系数 k 的几何意义即可得出答案；

（2）由题意可知 $S_{\triangle}AOB=\frac{1}{2}k_1-\frac{1}{2}k_2$，然后与 $k_1+k_2=0$ 构成方程组，解之即可.

【详解】解：（1）不变.

$\because S_{\triangle}AOC=\frac{1}{2}|k_1|$，$S_{\triangle}BOC=\frac{1}{2}|k_2|$，

$\therefore S_{\triangle}AOB=S_{\triangle}AOC+S_{\triangle}BOC=\frac{1}{2}(|k_1|+|k_2|)$，

$\because k_1$，k_2 分别为某一确定值，$\therefore \triangle AOB$ 的面积不变.

故答案为：不变；

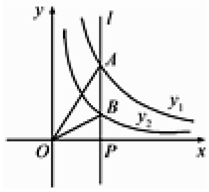
（2）由题意知：$k_1>0$，$k_2<0$，$\therefore S_{\triangle}AOB=\frac{1}{2}k_1-\frac{1}{2}k_2=8$，

$\because k_1+k_2=0$，$\therefore k_1=8$，$k_2=-8$.

【点睛】本题考查的是反比例函数系数 k 的几何意义，属于常考题型，熟知反比例函数系数 k 的几何意义是解题的关键.

7．如图，直线 $l\perp x$ 轴于点 P，且与反比例函数 $y_1=\frac{k_1}{x}(x>0)$及 $y_2=\frac{k_2}{x}$ (x

＞0)的图象分别交于点 A，B，连接 OA，OB，已知△OAB 的面积为 2，求 k_1-k_2 的值.



【答案】4

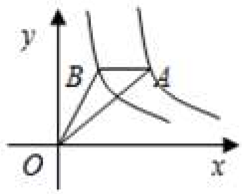
【分析】根据反比例函数 k 的几何意义可知：△OAP 的面积为 $\frac{1}{2}k_1$，△OBP 的面积为 $\frac{1}{2}k_2$，由题意可知△OAB 的面积为 $\frac{1}{2}(k_1-k_2)$ 即可得出答案

【详解】解：∵反比例函数 $y=\frac{k_1}{x}$ （x＞0）及 $y=\frac{k_2}{x}$ （x＞0）的图象均在第一象限内，∴ k_1 ＞0， k_2 ＞0

∵$AP\perp x$ 轴，∴$S_{\triangle OAP}$= $\frac{1}{2}k_1$ ，$S_{\triangle OBP}$= $\frac{1}{2}k_2$ ，∴$S_{\triangle OAB}$=$S_{\triangle OAP}$− $S_{\triangle OBP}$= $\frac{1}{2}(k_1-k_2)$ =2，解得 k_1-k_2 =4

【点睛】本题考查了反比例 k 的几何意义，得出 k_1与k_2 的关系是解题的关键

8．如图，是反比例函数 $y=\frac{k_1}{x}$ 和 $y=\frac{k_2}{x}$ （k_1＞k_2）在第一象限的图象，直线 A B // x 轴，并分别交两条曲线于 A 、B 两点．



（1）若点 A 的纵坐标是 3 ，则可得点 B 的纵坐标是_________．

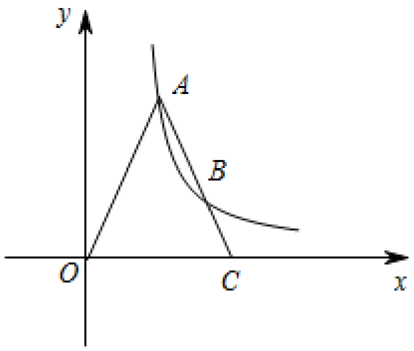
（2）若 $S_{\triangle AOB}=4$，则 k_1 与 k_2 之间的关系是__________________．

【答案】（1） 3 ，（2） $k_1-k_2=8$.

【详解】试题分析：（1）平行线间的距离处处相等，B 到 x 轴的距离也是 3．（2）由图像知 k_1 与 k_2 都大于 0，延长 AB 交 y 轴于 C,△AOC 的面积等于二分之一乘以 K_1，△BOC 的面积二分之一乘以 K_2，这两个三角形面积相减等于△AOB 的面积=4，解得 $k_1-k_2=8$.

考点：反比例函数图像性质

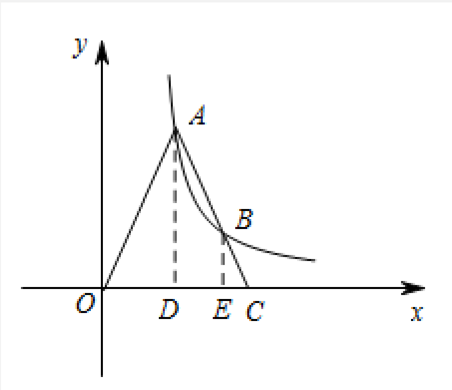
9．如图，A、B 是双曲线 $y=\frac{k}{x}(x>0)$上两点，A、B 两点的横坐标分别为 1、2，线段 AB 的延长线交 x 轴于点 C，若△AOC 的面积为 6，求 k 的值．



【答案】4

【分析】作 $AD\perp x$ 轴于 D，$BE\perp x$ 轴于 E，如图，根据反比例函数图象上点的坐标特征得到 $A(1,k)$，$B(2,\frac{k}{2})$，则 $OD=1$，$DE=1$，$AD=2BE$，所以 BE 为△ADC 的中位线，得到 $CE=DE=1$，然后根据三角形面积公式计算 k 的值．

【详解】解：作 $AD\perp x$ 轴于 D，$BE\perp x$ 轴于 E，如图，



∵A、B 两点的横坐标分别为 1、2，

∴A（1,k），B（2,$\frac{k}{2}$），

∴$OD=1$，$DE=1$，$AD=2BE$，

∴BE 为△ADC 的中位线，

∴$CE=DE=1$，

∴$OC=3$，

∵△AOC 的面积为 6，

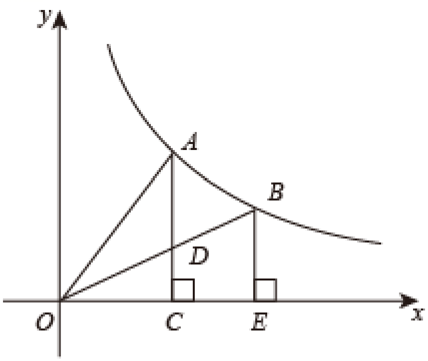
∴ $\frac{1}{2}\times3\times k=6$，

∴$k=4$．

【点睛】本题考查了比例系数 k 的几何意义：在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 图象中任取一点，过这一个点向 x

轴和 y 轴分别作垂线，与坐标轴围成的矩形的面积是定值$|k|$.

10．如图，A、B 是双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上的两点，过 A 点作 $AC\perp x$ 轴，交 OB 于 D 点，垂足为 C，连接 OA，过 B 点作 $BE\perp x$ 轴，垂足为 E．若△ADO 的面积为 1，D 为 OB 的中点．



(1)四边形 $DCEB$ 的面积为　　；

(2)求 k 的值；

(3)若 A、B 两点的横坐标恰好是方程 $x^2-3x+2=0$ 的两个不同实根，求点 E 到直线 OA 的距离．

【答案】(1)1

(2)$\frac{8}{3}$

(3)$\frac{16\sqrt{73}}{73}$

【分析】（1）根据反比例函数 k 的几何意义得到△AOC 与△BOE 面积相等，进而得到四边形 $CDBE$ 面积与△AOD 面积相等，即可得到结果；

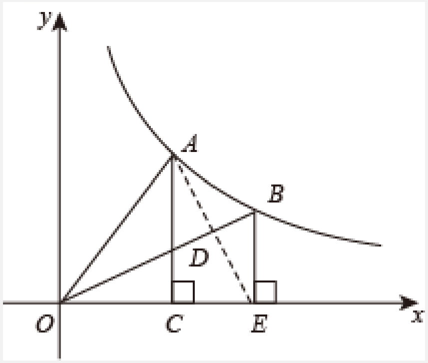
（2）证明△COD∽△EOB，根据 D 为 OB 中点，得到面积之比为 1：4，求出△COD 面积，得到△BOE 面积，即可确定出 k 的值；

（3）先根据因式分解法解一元二次方程，确定点 A 的坐标，根据勾股定理可得 OA 的长，最后根据三角形面积公式可得结论．

（1）解：∵A、B 是双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上的两点，$AC\perp x$ 轴，$BE\perp x$ 轴，∴$S_{\triangle AOC}=S_{\triangle BOE}$，即 $S_{\triangle AOD}+S_{\triangle COD}=S_{\triangle COD}+S_{四边形CDBE}$，∵$S_{\triangle AOD}=1$，∴$S_{四边形CDBE}=S_{\triangle AOD}=1$，故答案为：1；

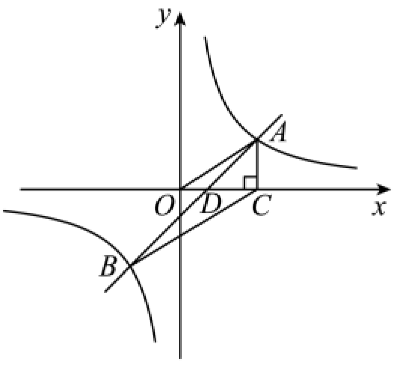
（2）解：∵$AC\perp x$ 轴，$BE\perp x$ 轴，∴$AC/\!/BE$，∴△COD∽△EOB，∵D 为 OB 中点，∴C 是 OE 的中点，∴$CD=\frac{1}{2}BE$，∴$S_{\triangle COD}$：$S_{\triangle BOE}=1$：4，∴$S_{\triangle COD}$：$S_{四边形CDBE}=1$：3，∴$S_{\triangle DOC}=\frac{1}{3}$，∴$S_{\triangle BOE}=\frac{4}{3}$，∴$k=\frac{8}{3}$；

（3）解：∵$x^2-3x+2=0$，∴（$x-1$）（$x-2$）＝0，∴$x_1=1$，$x_2=2$，∴点 A 的横坐标为 1，点 B 的横坐标为 2，当 $x=1$ 时，$y=\frac{\frac{8}{3}}{1}=\frac{8}{3}$，∴$A$（1，$\frac{8}{3}$），∴$OA=\sqrt{1^2+(\frac{8}{3})^2}=\frac{\sqrt{73}}{3}$，连接 AE，设点 E 到 OA 的距离为 h，∴$S_{\triangle OAE}=\frac{1}{2}\times 2\times \frac{8}{3}=\frac{1}{2}AO\bullet h$，∴$h=\frac{16\sqrt{73}}{73}$，即点 E 到直线 OA 的距离是 $\frac{16\sqrt{73}}{73}$.



【点睛】此题考查了反比例函数系数 k 的几何意义，反比例函数图象上点的坐标特点，相似三角形的判定和性质，解一元二次方程，勾股定理等知识，熟练掌握反比例函数系数 k 的几何意义是解本题的关键.

11．如图，已知一次函数 $y=kx+b$ 与反比例函数 $y=\frac{c}{x}$ 的图象交于点 $A(3,m)$、$B(n,-3)$，直线 AB 交 x 轴于点 D，$Rt\triangle AOC$ 的面积等于 3.



(1)求一次函数的解析式；

(2)直接写出不等式 $kx+b>\frac{c}{x}$ 的解集；

(3)点 P 是直线 AB 图象上的动点，若 CP 把 $\triangle ABC$ 分成面积比等于 2：3 的两部分，求点 P 的坐标.

【答案】(1) $y=x-1$

(2) $-2<x<0$ 或 $x>3$

(3) $(1,0)$ 或 $(0,-1)$

【分析】(1)利用反比例函数系数 k 的几何意义求得反比例函数的解析式，进而得出 A，B 的坐标，然后利用待定系数法求出一次函数的解析式即可；

（2）观察图象，写出一次函数的图象在反比例函数的图象上方时自变量的取值范围即可；

（3）过点 B 作 $BE \perp AC$ 交 AC 延长线于 E，过 P 作 $PF \perp AC$ 交 AE 于 F，设点 P 的横坐标为 n，则其纵坐标为 $n-1$，求出 $S_{\triangle ABC}=5$，表示出 $S_{\triangle APC}=3-n$，根据 CP 把 $\triangle ABC$ 分成面积比等于 2：3 的两部分分情况列式求出 n 的值即可解决问题.

（1）

解：$\because A$ 点在反比例函数 $y=\dfrac{c}{x}$ 的图象上，$AC \perp x$ 轴于点 C，

$\therefore c=2S_{\triangle AOC}=2\times 3=6$，

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y=\dfrac{6}{x}$，

把点 $A(3,m)$、$B(n,-3)$ 两点代入得：$m=2$，$n=-2$，

$\therefore A(3,2)$、$B(-2,-3)$，

$\because$ 一次函数图象经过点 A、B，

$\therefore \begin{cases} 3k+b=2 \\ -2k+b=-3 \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} k=1 \\ b=-1 \end{cases}$，

$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y=x-1$；

（2）

观察图象可得：不等式 $kx+b>\dfrac{c}{x}$ 的解集为：$-2<x<0$ 或 $x>3$；

（3）

$\because AC \perp x$ 轴，

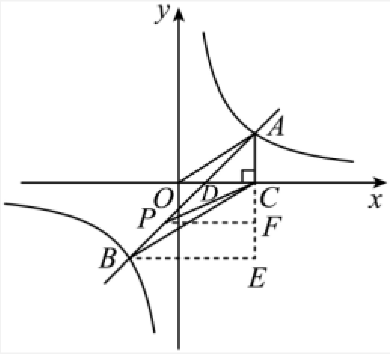
$\therefore C(3,0)$，

当 $y=x-1=0$ 时，解得：$x=1$，

$\therefore D(1,0)$，

$\therefore CD=3-1=2$，

如图：过点 B 作 $BE \perp AC$ 交 AC 延长线于 E，过 P 作 $PF \perp AC$ 交 AE 于 F，



设点 P 的横坐标为 n，则其纵坐标为 $n-1$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BE=\frac{1}{2}\times 2\times[3-(-2)]=5$，$S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot PF=\frac{1}{2}\times 2\times(3-n)=3-n$，

① 当 $S_{\triangle APC}=\frac{2}{5}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{5}\times 5=2$ 时，

$\therefore 3-n=2$，

解得：$n=1$；

② 当 $S_{\triangle APC}=\frac{3}{5}S_{\triangle ABC}=\frac{3}{5}\times 5=3$ 时，

$\therefore 3-n=3$，

解得：$n=0$，

当 $n=1$ 时，$n-1=0$；当 $n=0$ 时，$n-1=-1$.

$\therefore$ 符合条件的点 P 坐标为 $(1,0)$ 或 $(0,-1)$.

【点睛】本题考查了反比例函数系数 k 的几何意义，待定系数法求一次函数的解析式，根据函数图象求不等式解集以及一次函数的实际应用等知识，注意数形结合思想的应用.

12．如图，直线 $y=px+3(p\neq 0)$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 在第一象限内的图象交于点 $A(2,q)$，与 y 轴交于点 B，过双曲线上的一点 C 作 x 轴的垂线，垂足为点 D，交直线 $y=px+3$ 于点 E，且 $S_{\triangle AOB}:S_{\triangle COD}=3:4$.