第二十五章 概率初步综合题拓展训练

目录与链接

考点一、列举法求概率

1．将号码分别为1，2，3，…，9的九个小球放入一个袋中，这些小球仅号码不同，其余完全相同，甲从袋中摸出一个球，号码为a，放回后乙再摸出一个球，号码为b，则使不等式$a-2b+10>0$成立的事件发生的概率为（　）

A．$\frac{52}{81}$　　B．$\frac{59}{81}$　　C．$\frac{60}{81}$　　D．$\frac{61}{81}$

【答案】D

【分析】本题是一个等可能事件的概率，试验发生包含的事件是两次分别从袋中摸球，共有9×9种结果，满足条件的事件是使不等式a-2b+10＞0成立的，即2b-a＜10，列举出当当b=1，2，3，4，5，6，7，8，9时的所有的结果，得到概率.

【详解】由题意知本题是一个等可能事件的概率，

试验发生包含的事件是两次分别从袋中摸球，共有9×9=81种结果，

满足条件的事件是使不等式a-2b+10＞0成立的，即2b-a＜10

当b=1，2，3，4，5时，a有9种结果，共有45种结果，

当b=6时，a有7种结果

当b=7时，a有5种结果

当b=8时，a有3种结果

当b=9时，a有1种结果

∴共有45+7+5+3+1=61种结果，

∴所求的概率是$\frac{61}{81}$，

故选D.

【点睛】本题考查等可能事件的概率，在解题的过程中注意列举出所有的满足条件的事件数时，因为包含的情况比较多，又是一个数字问题，注意做到不重不漏.

2．向上抛掷质地均匀的骰子（如图），落地时向上的面点数为a（a的可能取值为1，2，3，4，5和6），则关于x的不等式$\frac{1-ax}{3-x}>2$有不大于2的整数解的概率为（　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{6}$

【答案】A

【分析】将 a 为 1，2，3，4，5 和 6 分别代入不等式中求出对应不等式的解集，判断是否有不大于 2 的整数解即可；

【详解】当 $a=1$ 时，不等式 $\frac{1-ax}{3-x}>2$ 变为：$\frac{x-5}{3-x}>0$，

解得该不等式的解为：$3<x<5$，没有不大于 2 的整数解，不符合；

当 $a=2$ 时，不等式 $\frac{1-ax}{3-x}>2$ 变为：$\frac{-5}{3-x}>0$

解得该不等式的解为：$x>3$，没有不大于 2 的整数解，不符合；

当 $a=3$ 时，不等式 $\frac{1-ax}{3-x}>2$ 变为：$\frac{-x-5}{3-x}>0$

解得该不等式的解为：$x<-5$ 或 $x>3$，有不大于 2 的整数解，符合；

当 $a=4$ 时，不等式 $\frac{1-ax}{3-x}>2$ 变为：$\frac{-2x-5}{3-x}>0$

解得该不等式的解为：$x<-\frac{5}{2}$ 或 $x>3$，有不大于 2 的整数解，符合；

当 $a=5$ 时，不等式 $\frac{1-ax}{3-x}>2$ 变为：$\frac{-3x-5}{3-x}>0$

解得该不等式的解为：$x<-\frac{5}{3}$ 或 $x>3$，有不大于 2 的整数解，符合；

当 $a=6$ 时，不等式 $\frac{1-ax}{3-x}>2$ 变为：$\frac{-4x-5}{3-x}>0$

解得该不等式的解为：$x<-\frac{5}{4}$ 或 $x>3$，有不大于 2 的整数解，符合；

综上，a 取值为 3，4，5，6 时满足要求，故概率为：$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，

答案为：$\frac{2}{3}$；

【点睛】本题考查了概率计算以及不等式解答，熟练掌握不等式解法是解答该题的关键

3．若关于 x 的一元一次不等式组 $\begin{cases}3x-2\geq 2(x+2)\\ a-2x<-5\end{cases}$ 的解集为 $x\geq 6$，且关于 y 的分式方程 $\frac{y+2a}{y-1}+\frac{3y-8}{1-y}=2$ 的解是正整数，则所有满足条件的整数 a 是非负整数的概率为________．

【答案】$\frac{3}{4}$

【分析】解一元一次不等式组的解集，根据不等式组的解集为 $x\geq 6$，列出 $\frac{a+5}{2}<6$，求出 a 的范围 $a<7$；解出分式方程的解，根据方程的解是正整数，列出 $\frac{a+5}{2}>0$，求得 a 的范围 $a>-5$；检验分式方程，列出 $\frac{a+5}{2}\neq 1$，即 $a\neq -3$，求得 a 的范围 $-5<a<7$ 且 $a\neq -3$，最后根据方程的解是正整数求得满足条件的整数 a

的值，求概率即可．

【详解】解：$\begin{cases}3x-2\geq 2(x+2)① \\ a-2x<-5②\end{cases}$，

解不等式①得：$x\geq 6$，

解不等式②得：$x>\frac{a+5}{2}$，

∵不等式组的解集为$x\geq 6$，

∴$\frac{a+5}{2}<6$，

∴$a<7$，

分式方程两边都乘$(y-1)$得：$y+2a-3y+8=2(y-1)$，

解得：$y=\frac{a+5}{2}$，

∵方程的解是正整数，

∴$\frac{a+5}{2}>0$，

∴$a>-5$；

∵$y-1\neq 0$，

∴$\frac{a+5}{2}\neq 1$，

∴$a\neq -3$，

∴$-5<a<7$且$a\neq -3$，

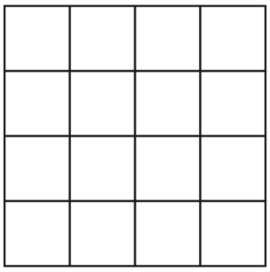
∴能是正整数解的a是：$-1,1,3,5$，

∴a是非负整数的概率为$\frac{3}{4}$，

故答案为：$\frac{3}{4}$．

【点睛】本题考查了解一元一次不等式组，解分式方程，求概率，注意解分式方程一定要检验是本题的关键．

4．如图为一个4×4的正方形格子，现在给其中的三个小正方形染色，求被染色的三个小正方形不同行也不同列的概率．



【答案】$\frac{6}{35}$

【分析】本题考查了列举法求概率．熟练掌握概率=所求情况数与总情况数之比是解题的关键．

由题意知，给其中任意三个小正方形染色共有$16\times15\times14$种情况，其中三个小正方形不同行也不同列的共有$16\times9\times4$种情况，然后求概率即可．

【详解】解：由题意知，给其中任意三个小正方形染色共有$16\times15\times14$种情况，其中三个小正方形不同行也不同列的共有$16\times9\times4$种情况，

$\because \frac{16\times9\times4}{16\times15\times14}=\frac{6}{35}$，

∴被染色的三个小正方形不同行也不同列的概率为$\frac{6}{35}$．

5．有五张正面分别写有数字-4，-3，0，2，3的卡片，五张卡片除了数字不同外其余全部相同，现将它们背面朝上，洗匀后从中随机抽取一张，记卡片上的数字为n，则抽取的n既能使关于x的方程$x^2-2(n+1)x+n(n-3)=0$有实数根，又能使以x为自变量的二次函数$y=-x^2+2nx+1$，当$x>2$时，y随x的增大而减小的概率为_______．

【答案】$\frac{2}{5}$

【分析】根据方程有实数根列出关于n的不等式，再根据二次函数的图象列出关于n的不等式，从而求出n的取值范围，找出符合条件的整数解，最后根据概率公式进行计算即可．

【详解】$\because x^2-2(n+1)x+n(n-3)=0$有实数根，

$\therefore \Delta \geq 0$，

$\therefore [-2(n+1)]^2-4n(n-3)\geq 0$，

$\therefore n\geq -\frac{1}{5}$，

又$\because y=-x^2+2nx+1$，

对称轴为：$x=-\frac{2n}{-2}=n$，

$\because x>2$时，y随x增大而减小，

$\therefore n \leq 2$，

综上$-\frac{1}{5} \leq n \leq 2$，

$\therefore n$可取 0，2，

$\therefore P=\frac{2}{5}$，

故答案为：$\frac{2}{5}$.

【点睛】此题考查二次函数的性质及概率公式，得到满足条件的 n 的情况数是解决本题的关键.

6．“田忌赛马”的故事闪烁着我国古代先贤的智慧光芒．该故事的大意是：齐王有上、中、下三匹马 A_1,B_1,C_1，田忌也有上、中、下三匹马 A_2,B_2,C_2，且这六匹马在比赛中的胜负可用不等式表示如下：$A_1>A_2>B_1>B_2>C_1>C_2$（注：$A>B$ 表示 A 马与 B 马比赛，A 马获胜）．一天，齐王找田忌赛马，约定：每匹马都出场比赛一局，共赛三局，胜两局者获得整场比赛的胜利．面对劣势，田忌事先了解到齐王三局比赛的“出马”顺序为上马、中马、下马，并采用孙膑的策略：分别用下马、上马、中马与齐王的上马、中马、下马比赛，即借助对阵（C_2A_1,A_2B_1,B_2C_1）获得了整场比赛的胜利，创造了以弱胜强的经典案例．

假设齐王事先不打探田忌的“出马”情况，试回答以下问题：

（1）如果田忌事先只打探到齐王首局将出“上马”，他首局应出哪种马才可能获得整场比赛的胜利？并求其获胜的概率；

（2）如果田忌事先无法打探到齐王各局的“出马”情况，他是否必败无疑？若是，请说明理由；若不是，请列出田忌获得整场比赛胜利的所有对阵情况，并求其获胜的概率．

【答案】（1）田忌首局应出“下马”才可能在整场比赛中获胜，$\frac{1}{2}$；（2）不是，田忌获胜的所有对阵是 (C_2A_1,A_2B_1,B_2C_1)，(C_2A_1,B_2C_1,A_2B_1)，(A_2B_1,C_2A_1,B_2C_1)，(A_2B_1,B_2C_1,C_2A_1)，(B_2C_1,C_2A_1,A_2B_1)，(B_2C_1,A_2B_1,C_2A_1)，$\frac{1}{6}$

【分析】（1）通过理解题意分析得出结论，通过列举法求出获胜的概率；

（2）通过列举齐王的出马顺序和田忌获胜的对阵，求出概率．

【详解】（1）田忌首局应出“下马”才可能在整场比赛中获胜．

此时，比赛的所有可能对阵为：

(C_2A_1,A_2B_1,B_2C_1)，(C_2A_1,B_2C_1,A_2B_1)，

$\left(C_2A_1,B_2B_1,A_2C_1\right)$，$\left(C_2A_1,A_2C_1,B_2B_1\right)$，共四种.

其中田忌获胜的对阵有

$\left(C_2A_1,A_2B_1,B_2C_1\right)$，$\left(C_2A_1,B_2C_1,A_2B_1\right)$，共两种，

故此时田忌获胜的概率为$P_1=\dfrac{1}{2}$.

（2）不是.

齐王的出马顺序为A_1,B_1,C_1时，田忌获胜的对阵是$\left(C_2A_1,A_2B_1,B_2C_1\right)$；

齐王的出马顺序为A_1,C_1,B_1时，田忌获胜的对阵是$\left(C_2A_1,B_2C_1,A_2B_1\right)$；

齐王的出马顺序为B_1,A_1,C_1时，田忌获胜的对阵是$\left(A_2B_1,C_2A_1,B_2C_1\right)$；

齐王的出马顺序为B_1,C_1,A_1时，田忌获胜的对阵是$\left(A_2B_1,B_2C_1,C_2A_1\right)$；

齐王的出马顺序为C_1,A_1,B_1时，田忌获胜的对阵是$\left(B_2C_1,C_2A_1,A_2B_1\right)$；

齐王的出马顺序为C_1,B_1,A_1时，田忌获胜的对阵是$\left(B_2C_1,A_2B_1,C_2A_1\right)$.

综上所述，田忌获胜的所有对阵是

$\left(C_2A_1,A_2B_1,B_2C_1\right)$，$\left(C_2A_1,B_2C_1,A_2B_1\right)$，$\left(A_2B_1,C_2A_1,B_2C_1\right)$，

$\left(A_2B_1,B_2C_1,C_2A_1\right)$，$\left(B_2C_1,C_2A_1,A_2B_1\right)$，$\left(B_2C_1,A_2B_1,C_2A_1\right)$.

齐王的出马顺序为A_1,B_1,C_1时，比赛的所有可能对阵是

$\left(A_2A_1,B_2B_1,C_2C_1\right)$，$\left(A_2A_1,C_2B_1,B_2C_1\right)$，$\left(B_2A_2,A_2B_1,C_2C_1\right)$，

$\left(B_2A_1,C_2B_1,A_2C_1\right)$，$\left(C_2A_1,A_2B_1,B_2C_1\right)$，$\left(C_2A_1,B_2B_1,A_2C_1\right)$，

共 6 种，同理，齐王的其他各种出马顺序，也都分别有相应的 6 种可能对阵，

所以，此时田忌获胜的概率$P_2=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$.

【点睛】本小题考查简单随机事件的概率等基础知识，考查推理能力、应用意识，考查统计与概率思想；通过列举所有对阵情况，求得概率是解题的关键.

考点二、概率公式

7．从同一副扑克牌中挑出5张红桃、6张黑桃、7张方块，将这18张扑克牌洗匀后背面朝上，再从中抽出15张牌，抽出的这15张牌中恰好有4张红桃的概率是（　　）

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{1}{10}$　　D．$\frac{3}{10}$

【答案】D

【分析】此题考查概率的计算公式，设抽出的牌中有x张红桃、y张黑桃、z张方块，根据$x\le 5$、$y\le 6$、$z\le 7$，$x+y+z=15$，得出$x\ge 2$，则x的可能取值有2，3，4，5最后逐一计算即可，熟记公式是解题的关键．

【详解】设抽出的牌中有x张红桃、y张黑桃、z张方块，则x、y、z都为正整数，且$x\le 5$、$y\le 6$、$z\le 7$，$x+y+z=15$，

∵ $y+z\le 13$，

∴ $x\ge 2$，

∴ x的可能取值有2，3，4，5，

① 当$x=2$时，$y+z=13$，

∴ $y=6$，$z=7$只有1种可能；

② 当$x=3$时，$y+z=12$，

∴ $y=6$，$z=6$或$y=5$，$z=7$，有2种可能；

③ 当$x=4$时，$y+z=11$，

∴ $y=6$，$z=5$，或$y=5$，$z=6$或$y=4$，$z=7$，有3种可能；

④ 当$x=5$时，$y+z=10$，

∴ $y=6$，$z=4$或$y=5$，$z=5$或$y=4$，$z=6$或$y=3$，$z=7$，有4种可能，

共10种可能，其中恰好有4张红桃的可能有3种，

∴所求概率为$\frac{3}{10}$，

故选：D．

8．现有三个正方体形的公正骰子，每个骰子的六个面上分别标有点数1，2，3，4，5，6．投掷这三个骰子，则其中两个骰子的点数之和恰好等于余下的一个骰子的点数的概率是（　　）

A．$\frac{7}{36}$　　B．$\frac{13}{72}$　　C．$\frac{1}{6}$　　D．$\frac{5}{24}$

【答案】D

【分析】先求得总的可能情形，根据题意得出有9种可能，按照不同方式可得共有45种符合题意的情形，进而根据概率公式，即可求解．

【详解】解：根据树状图法可得第一个数字有6种情形，第二个数字可以选6个数字，第三个数字也可以选6个数字，故总可能结果有$6\times 6\times 6=216$种可能

依题意，$1+1=2,1+2=3,1+3=4,1+4=5,1+5=6$，$2+2=4,2+3=5,2+4=6,3+3=6$

，共有 9 种可能，每种有 6 种排列方式，

其中$1,1,2$，$2,2,4$，$3,3,6$每种可能有 3 种不同排列

$(1,1,2);(1,2,1);(2,1,1)$；$(2,2,4);(2,4,2);(4,2,2)$和$(3,3,6);(3,6,3);(6,3,3)$， 共 9 种可能；

$1,2,3$的排列有$(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)$ 6 种可能，同理$1,3,4;1,4,5;1,5,6$....， 6 种可能

则符合题意的共有$6\times6+3\times3=45$种，

∴其中两个骰子的点数之和恰好等于余下的一个骰子的点数的概率是$\frac{45}{216}=\frac{5}{24}$，

故选：D．

【点睛】本题考查了根据概率公式求概率，根据题意找出符合题意的可能数是解题的关键．

9．小亮有黑、白各 10 张卡片，分别写有数字 0~9．把它们像扑克牌那样洗过后，数字朝下，排成四行，排列规则如下：

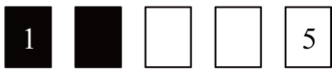
①从左至右按从小到大的顺序排列：

②黑、白卡片数字相同时，黑卡片放在左边．

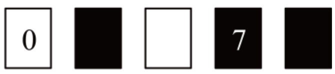
小亮每行翻开了两张卡片，如图所示：

第一行：

第二行：



第三行：



第四行：

其余卡片上数字小亮让小明根据排列规则进行推算，小明发现有的卡片上数字可以唯一确定，例如第四行最后一张白色卡片上数字只能是______有的卡片上的数字并不能唯一确定，小明对不能唯一确定的卡片上数字进行猜测，则小明一次猜对所有数字的概率是______．

【答案】 8 $\frac{1}{2}$

【分析】本题考查概率问题，图形类规律探索，根据规则确定数值，然后根据不能确定的数字进行求概率即可．

【详解】解：∵黑卡8在左边，

∴白卡数字可能为8或9，

又∵白卡9排在第一行，

∴第四行最后一张白色卡片上数字只能是8，

每行能确定的数字为：

第一行：1 5 6 7 9

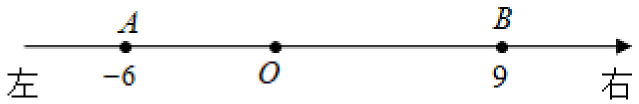
第二行：1 2 3 4 5

第三行：0 _ 6 7 9

第四行：0 2 _ 8 8

不能确定的是黑色 3 和 4，共有两种填法，是等可能性的，填对的有一种，即概率为$\frac{1}{2}$.

10．如图，程序员在数轴上设计了 A、B 两个质点，它们分别位于—6 和 9 的位置，现两点按照下述规则进行移动：每次移动的规则 x 分别掷两次正方体骰子，观察向上面的点数：



①若两次向上面的点数均为偶数，则 A 点向右移动 1 个单位，B 点向左移 2 个单位；

②若两次向上面的点数均为奇数，则 A 点向左移动 2 个单位，B 点向左移动 5 个单位；

③若两次向上面的点数为一奇一偶，则 A 点向右移动 5 个单位，B 点向右移 2 个单位.

(1)经过第一次移动，求 B 点移动到 4 的概率；

(2)从如图所示的位置开始，在完成的 12 次移动中，发现正方体骰子向上面的点数均为偶数或奇数，设正方体骰子向上面的点数均为偶数的次数为 a，若 A 点最终的位置对应的数为 b，请用含 a 的代数式表示 b，并求当 A 点落在原点时，求此时 B 点表示的数；

(3)从如图所示的位置开始，经过 x 次移动后，若 $AB=3$，求 x 的值.

【答案】(1)$\frac{1}{4}$；

(2)B 点表示的数为-21；

(3)x 的值为 4 或 6.

【分析】（1）利用概率公式计算即可；

（2）根据题意可知当向上的点数均为偶数时，A 点向右移动 a 个单位，当向上的点数均为奇数时，A 点向左移动 2(12-a)个单位，再根据平移的规则推算出结果即可；

（3）刚开始的距离是 15，根据三种情况算出缩小的距离，即可算出缩小的总距离，分别除以 3 即可得到结果.

【详解】（1）解：根据题意，B 点移动到 4，则向左移 5 个单位，且第一次就移动到 4，

故两次向上的点数均为奇数(正方体骰子奇数为 1，3，5，)，

则 P(奇数)$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，

∴P(B 点移动到 4)$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$；

（2）解：当向上的点数均为偶数时，A 点向右移动 a 个单位，

当向上的点数均为奇数时，A 点向左移动 $2(12-a)$个单位，

∴$b=-6+a-2(12-a)=3a-30$，

当 $b=0$ 时，$3a-30=0$，

∴$a=10$，即均为偶数有 10 次，均为奇数有 2 次，

∴B 点表示的数为 $9-10\times2-2\times5=-21$；

（3）解：刚开始 AB 的距离等于 15，

均为偶数时，AB 距离缩短 3，

均为奇数时，AB 距离缩短 3，

均为一奇一偶时，AB 距离也缩短 3，

当缩短至 3 时，$(15-3)\div3=4$，∴$x=4$；

当缩短至 0 再增长 3 时，$(15+3)\div3=6$，∴$x=6$；

∴x 的值为 4 或 6.

【点睛】本题考查概率公式，数轴，代数式等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题.

11．某公交公司有一栋 4 层的立体停车场，第一层供车辆进出使用，第二至四层停车．每层的层高为 6m，横向排列 30 个车位，每个车位宽为 3m，各车位有相应号码，如：201 表示二层第 1 个车位．第二至四层每层各有一个升降台，分别在 211，316，421，为便于升降台垂直升降，升降台正下方各层对应的车位都留空．每个升降台前方有可在轨道上滑行的转运板（以第三层为例，如图所示）.该系统取车的工作流程如下（以取停在 311 的车子为例）：

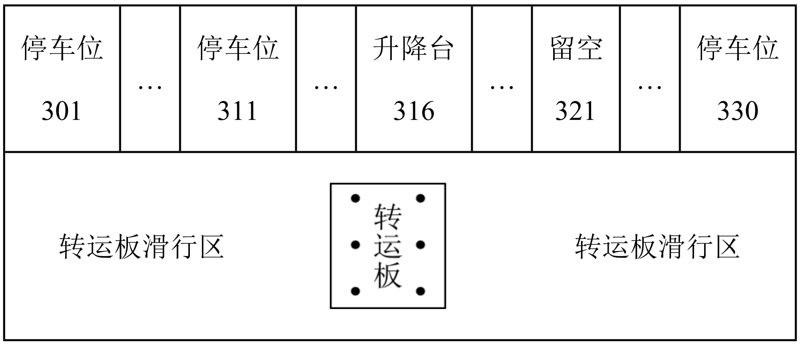
① 转运板接收指令，从升降台 316 前空载滑行至 311 前；

② 转运板进 311，托起车，载车出 311；

③ 转运板载车滑行至 316 前；

④ 转运板进 316，放车，空载出 316，停在 316 前；

⑤ 升降台垂直送车至一层，系统完成取车．



如图停车场第三层平面示意图，升降台升与降的速度相同，转运板空载时的滑行速度为 1m/s，载车时的滑行速度是升降台升降速度的 2 倍．

(1)若第四层升降台送车下降的同时，转运板接收指令从 421 前往 401 取车，升降台回到第四层 40s 后转运板恰好载着 401 的车滑行至升降台前，求转运板载车时的滑行速度；

（说明：送至一层的车驶离升降台的时间、转运板进出车位所用的时间均忽略不计）

(2)在（1）的条件下，若该系统显示目前第三层没有车辆停放，现该系统将某辆车随机停放在第三层的停车位上，取该车时，升降台已在 316 待命，求系统按上述工作流程在 1 分钟内完成取该车的概率．

【答案】(1)转运板载车时的滑行速度为 0.6m/s

(2)P（系统按上述工作流程在 1 分钟内完成取该车）$=\frac{1}{7}$

【分析】本题考查了分式方程的应用、一元一次不等式的应用和列举法求概率，掌握列方程或不等式解决实际问题和概率公式是解题的关键．

（1）设转运板载车时的滑行速度为 x m/s，则升降台升降速度为 $0.5x$ m/s，由“升降台回到第四层 40s 后转运板恰好载着 401 的车滑行至升降台前”列出方程即可求解；

（2）根据（1）的结论，设系统将车辆随机停放在 316 旁的第 a 个车位，由“系统按上述工作流程在 1 分钟内完成取该车”列出不等式求出 a，再根据概率公式即可求解．

【详解】（1）解：设转运板载车时的滑行速度为 x m/s，则升降台升降速度为 $0.5x$ m/s，

依据题意可知，车位 421 与 401 相距 $20\times3=60$ m，且每层的层高为 6 m，

可列方程：$\frac{2\times3\times6}{0.5x}+40=\frac{60}{1}+\frac{60}{x}$，

解得：$x=0.6$ ，

经检验，原分式方程的解为 $x=0.6$，且符合题意．

答：转运板载车时的滑行速度为 0.6m/s．

（2）解：设系统将车辆随机停放在 316 旁的第 a 个车位，要使得系统按上述工作流程在 1 分钟内完成取该车，

则 $3a+\frac{3a}{0.6}+\frac{2\times6}{0.3}<60$．

解得：$a<2.5$．

因为 a 是正整数，所以 $a\le2$．

因此，要使得系统按上述工作流程在 1 分钟内完成取该车，该车只能停放在 316 左右两旁一共 4 个车位上，也即该系统将某辆车随机停放在第三层的停车位上共有 28 种可能性相等的结果，而停放在满足条件“系统按上述工作流程在 1 分钟内完成取该车”的停车位上的结果有 4 种，所以 P（系统按上述工作流程在 1 分钟内完成取该车）$=\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$．

12．交强险是车主必须为机动车购买的险种，若普通 6 座以下私家车投保交强险第一年的费用（基准保费）统一为 a 元，在下一年续保时，实行的是费率浮动机制，保费与上一年度车辆发生道路交通事故的情况相联系，发生交通事故的次数越多，费率也就越高，具体浮动情况如表：

交强险浮动因素和浮动费率比率表		
	浮动因素	浮动比率
A_1	上一个年度未发生有责任道路交通事故	下浮 10%
A_2	上两个年度未发生有责任道路交通事故	下浮 20%
A_3	上三个及以上年度未发生有责任道路交通事故	下浮 30%
A_4	上一个年度发生一次有责任不涉及死亡的道路交通事故	0%
A_5	上一个年度发生两次及两次以上有责任道路交通事故	上浮 10%
A_6	上一个年度发生有责任道路交通死亡事故	上浮 30%

某机构为了研究某一品牌普通 6 座以下私家车的投保情况，随机抽取了 60 辆车龄已满三年的该品牌同型号私家车的下一年续保时的情况，统计得到了下面的表格：

类型	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
数量	10	5	5	20	15	5

以这 60 辆该品牌车的投保类型的频率代替一辆车投保类型的概率，完成下列问题：

(1)按照我国《机动车交通事故责任强制保险条例》汽车交强险价格的规定 $a=950$．求某同学家的一辆该品牌车在第四年续保时的平均费用；（费用值保留到个位数字）

(2)某二手车销售商专门销售这一品牌的二手车，且将下一年的交强险保费高于基本保费的车辆记为事故车．假设购进一辆事故车亏损 5000 元，一辆非事故车盈利 10000 元；

①若该销售商购进两辆（车龄已满三年）该品牌二手车，第一辆经鉴定为非事故车，求第二辆车是事故车的概率；

②若该销售商一次购进 100 辆（车龄已满三年）该品牌二手车，求他获得利润的平均数．

【答案】(1)942 元

(2)①$\frac{1}{3}$　②50万元

【分析】（1）根据加权平均数计算解题即可；

（2）①从 60 辆已满三年的该品牌同型号私家车中，任意抽出一辆车为事故车的有 20 辆，可直接得出第二辆车为事故车的概率；

②设为该销售商购进并销售一辆二手车的利润，根据题意求得的可能取值和对应的概率后，可得的平均值，最后求购进 100 辆车获得利润的平均费用再乘以 100 即可．

【详解】（1）解：$\frac{950\times0.9\times10+950\times0.8\times5+950\times0.7\times5+950\times20+950\times1.1\times15+950\times1.2\times5}{60}\approx942$ 元，

答：在第四年续保时的平均费用约为942 元；

（2）①解：由题意得到从 60 辆已满三年的该品牌同型号私家车中，任意抽出一辆车为事故车的有 20 辆，

∴任意一辆该品牌车龄已满三年的二手车为事故车的概率为 $\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$；

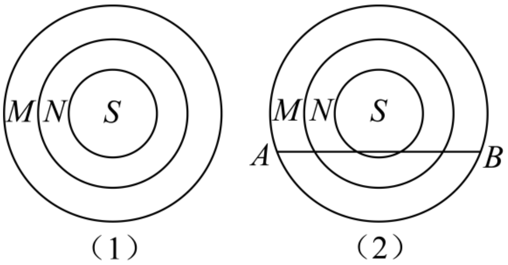
②一次购进 100 辆（车龄已满三年）该品牌二手车，获得利润的平均数为：$\left(-5000\times\frac{1}{3}+10000\times\frac{2}{3}\right)\times100=50$ 万元．

【点睛】本题考查加权平均数的计算，列举法求概率，掌握加权平均数的计算公式是解题的关键．

考点三、几何概率

13．如图（1），一只圆形平盘被同心圆划成 M，N，S 三个区域，随机向平盘中撒一把豆子，计算落在 M，N，S

三个区域的豆子数的比．多次重复这个试验，发现落入三个区域的豆子数的比显示出一定的稳定性，总在三个区域的面积之比附近摆动．如图（2）将一根筷子放在该盘中 AB 位置，发现三个圆弧刚好将 AB 五等分．我们把豆子落入三个区域的概率分别记作 $P(M)$，$P(N)$，$P(S)$，已知 $P(S)=\frac{1}{5}$，则 $P(M)$ 等于（　）



A．$\frac{8}{15}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{4}{15}$　　D．$\frac{1}{5}$

【答案】A

【分析】本题考查几何概率，掌握几何概率就是求几何图形的面积比是解题的关键，设小圆的半径为 r，则大圆的半径为 $\sqrt{5}r$，设 $AB=10a$，根据勾股定理求出 $r^2=6a^2$，然后解出 M 部分面积与整个圆面积的比即为概率．

【详解】解：如图，设小圆的半径为 r，则大圆的半径为 $\sqrt{5}r$，设 $AB=10a$，

$AE=5a$，$CE=3a$，$\mathrm{DE}=a$，

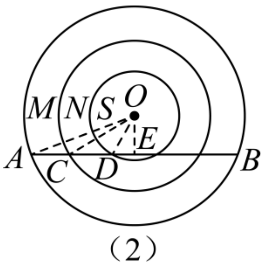
$\therefore OE^2=\left(\sqrt{5}r\right)^2-(5a)^2=r^2-a^2=OC^2-(3a)^2$，

解得：$r^2=6a^2$，$OC^2=14a^2$，

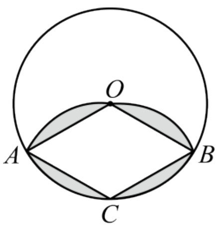
$\therefore M$ 部分面积与整个圆面积的比：$\frac{5\pi r^2-14\pi a^2}{5\pi r^2}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$，

$\therefore P(M)$ 等于 $\frac{8}{15}$，

故选 A．



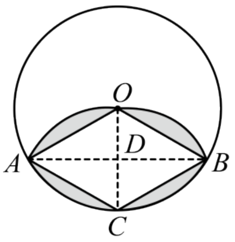
14．如图，A，B，C 为 $\odot O$ 上的三个点，C 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，连接 OA，OB，AC，BC，以 C 为圆心，AC 长为半径的弧恰好经过点 O，若要在圆内任取一点，则该点落在阴影部分的概率是________．



【答案】$\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

【分析】连接OC、AB交于点D，设圆的半径为1，可证$\triangle OAC$、$\triangle OBC$为等边三角形，先求出$\frac{1}{2}S_{阴影部分}$，为$S_{扇形OACB}-S_{四边形OACB}$，分别求出扇形和四边形面积，可求出阴影部分面积，再根据概率公式求解即可．

【详解】解：连接OC、AB交于点D，设$\odot O$半径为1，



∵ $AC=OC=CB$，OA、OB、OC为半径，

∴$\triangle OAC$、$\triangle OBC$为等边三角形，

∵AB为弦，OC为半径，

∴OC垂直平分AB，

在$\text{Rt}\triangle OAD$中，$OA=1$，$\angle AOD=60°$，

$OD=\frac{1}{2}$，$AD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$AB=2AD=\sqrt{3}$

$S_{四边形OACB}=2S_{\triangle OAB}=2\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\frac{1}{2}S_{阴影部分}=S_{扇形OACB}-S_{四边形OACB}=\frac{120\pi}{360}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$S_{阴影部分}=\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{3}$，

$P=\frac{S_{阴影部分}}{S_{\odot O}}=\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{3\pi}=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{\pi}$，

故答案是：$\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{\pi}$．

【点睛】此题考查了等边三角形的性质，扇形的弧、弦、圆心角定理，勾股定理，扇形面积公式，几何概率，根据图形作出恰当的辅助线，将不规则的图形拆分为规则图形求出面积是解题的关键．

15．如图，四个全等的直角三角形围成一个大正方形，中间是个小正方形，这个图形是我国汉代数学家赵爽在注解《周髀算经》时给出的，人们称它为“赵爽弦图”，现分别连接大、小正方形的四组顶点得到图2

的“风车”图案（阴影部分）．若图1中的四个直角三角形的较长直角边为9，较短直角边为5，现随机向图2大正方形内掷一枚小针，则针尖落在阴影区域的概率为______．

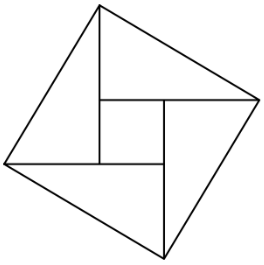


图1

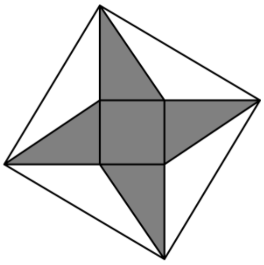
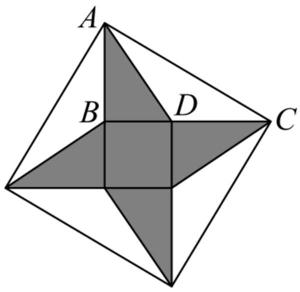


图2

【答案】$\frac{28}{53}$

【分析】此题考查了几何概率，根据题意易得$BD=4$，则图中阴影部分是由中间的小正方形和四个全等三角形组成的，利用三角形和正方形的面积公式计算即可求解，求出阴影区域的面积是解题的关键．

【详解】解：如图，



由题意可知，$AB=CD=5$，$BC=9$，

∴$BD=BC-CD=9-5=4$，

∴$S_{大正方形}=AC^2=AB^2+BC^2=106$，

则中间小正方形的面积为$4\times4=16$，

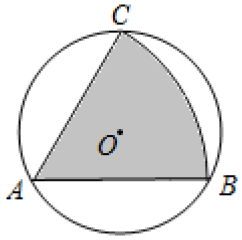
小正方形的外阴影部分的$4S_{\triangle ABD}=4\times\frac{1}{2}\times4\times5=40$，

∴阴影部分的面积为$16+40=56$，

∴针尖落在阴影区域的概率为$\frac{56}{106}=\frac{28}{53}$，

故答案为：$\frac{28}{53}$．

16．如图，点A在$\odot O$上，$\angle BAC=60°$，以A为圆心，AB为半径的扇形ABC内接于$\odot O$．某人向$\odot O$区域内任意投掷一枚飞镖，则飞镖恰好落在扇形ABC内的概率为______．



【答案】$\frac{1}{2}$/0.5

【分析】分别求得⊙O的面积和扇形的面积即可求解.

【详解】解：连接BC，

∵$\angle BAC=60°$，AB=AC，

∴△ABC 是等边三角形，

设⊙O的半径为r，如图，

连接OA，过点O作$OD\perp AB$，则$OA=r$，$AB=2AD$，

$\angle OAD=\frac{1}{2}\angle BAC=30°$，

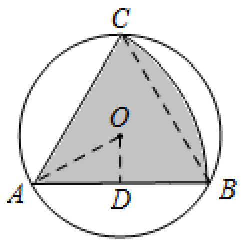
∴$\cos 30°=\frac{AD}{OA}=\frac{AD}{r}$，解得$AD=\frac{\sqrt{3}}{2}r$，

∴$AB=2AD=\sqrt{3}r$，

∴圆的面积为πr^2，扇形的面积为$\frac{60\pi\times\left(\sqrt{3}r\right)^2}{360}=\frac{1}{2}\pi r^2$，

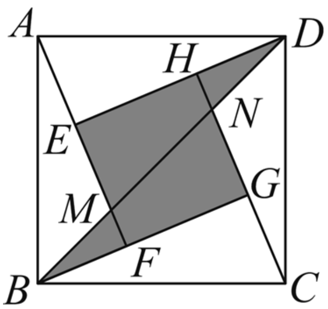
∴飞镖恰好落在扇形ABC内的概率为$\frac{\frac{1}{2}\pi r^2}{\pi r^2}=\frac{1}{2}$，

故答案为：$\frac{1}{2}$



【点睛】本题考查了几何概率，扇形的面积的计算，等边三角形的性质，正确的识别图形是解题的关键.

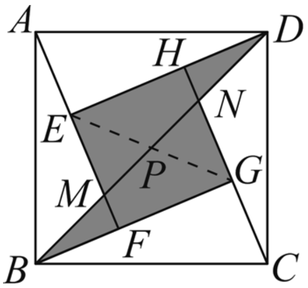
17. 如图，四个全等的直角三角形拼成"赵爽弦图"，得到正方形$ABCD$与正方形$EFGH$．连结BD交AF、CH于点M、N．若DE平分$\angle ADB$，现随机向该图形内掷一枚小针，则针尖落在阴影区域的概率为________.



【答案】$\frac{\sqrt{2}}{4}$/$\frac{1}{4}\sqrt{2}$/$0.25\sqrt{2}$

【分析】求出阴影部分的面积与正方形面积的比值，即可得到针尖落在阴影区域的概率.

【详解】解：如图，连接 EG 交 BD 于点 P，



∵ DE 平分∠ADB，

∴ ∠ADE＝∠MDE

∵四边形 $EFGH$ 是正方形

∴∠MED＝90°，

∴∠AED＝180°－∠MED＝90°

∴∠MED＝∠AED

∵DE＝DE

∴△ADE≌△MDE（ASA）

∴AE＝ME

同理可证△BGC≌△BGN（ASA），

∵四边形 $ABCD$ 是正方形

∴∠ADM＝45°

∴∠ADE＝∠MDE＝22.5°

∴∠EMD＝90°－∠ADE＝67.5°

∵∠MEG＝45°

∴∠MPE＝180°－∠EMD－∠MEG＝67.5°

∴$\angle EMD=\angle MPE$

∴$EM=EP$

设 $EM=EP=x$，则 $EG=2EP=2x$

在 Rt△EFG 中，$\angle EFG=45°$，

∴$FG=EG\times\sin45°=\sqrt{2}x$

∵△BFA≌△AED≌△CGB

∴$BF=AE=CG=x$,$BG=BF+FG=(\sqrt{2}+1)x$，△BFA≌△AED≌△CGB≌△NBG≌△MED，

在 Rt△BCG 中，

$$BC^2=CG^2+BG^2=\left(4+2\sqrt{2}\right)x^2$$

$$\therefore S_{阴影}=S_{\triangle DEM}+S_{\triangle BGN}=2S_{\triangle BGN}=2\times\frac{1}{2}x\times(\sqrt{2}+1)x=(\sqrt{2}+1)x^2$$

$$S_{正方形ABCD}=BC^2=\left(4+2\sqrt{2}\right)x^2$$

$$\therefore \frac{S_{阴影}}{S_{正方形ABCD}}=\frac{(\sqrt{2}+1)x^2}{(4+2\sqrt{2})x^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

∴针尖落在阴影区域的概率为$\frac{\sqrt{2}}{4}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{4}$.

【点睛】本题考查了正方形的性质、全等三角形的判定和性质、勾股定理、正方形的面积、直角三角形的面积等知识点，求出阴影面积与正方形的面积的比是解答此题的关键.

考点四、列表法求概率

18．在一个不透明的箱子里装有 2 个红球，2 个白球和 1 个黄球，这些小球除颜色不同外其他都相同．从箱子中一次性摸出 2 个球，颜色相同的概率为（　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{5}$　　D．$\frac{1}{6}$

【答案】C

【分析】本题考查的是用列表法或画树状图法求概率．首先根据题意列出表格，然后由表格求得所有等可能的结果与 2 个球颜色相同的情况，再利用概率公式求解即可求得答案.

【详解】解：列表如下：

	红	红	白	白	黄

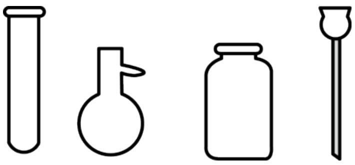
红		（红，红）	（白，红）	（白，红）	（黄，红）
红	（红，红）		（白，红）	（白，红）	（黄，红）
白	（红，白）	（红，白）		（白，白）	（黄，白）
白	（红，白）	（红，白）	（白，白）		（黄，白）
黄	（红，黄）	（红，黄）	（白，黄）	（白，黄）	

Q共有20种等可能的结果，2个球都摸到颜色相同的有4种情况，

$\therefore$两次都摸到红球的概率为$\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$，

故选：C．

19．现有4张化学仪器的示意图卡片，正面图案如图所示，它们除此之外完全相同，把这4张卡片，背面朝上洗匀，从中随机抽取两张，则抽取的两张卡片正面图案都是轴对称图形的概率是（　　）



A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

【答案】A

【分析】本题考查列表法与树状图法，熟练掌握列表法与树状图法以及概率公式是解答本题的关键．列表可得出所有等可能的结果数以及抽取的两张卡片正面图案都是轴对称图形的结果数，再利用概率公式可得出答案．

【详解】解：将这4张化学仪器的示意图卡片分别记为A，B，C，D，

则卡片正面图案是轴对称图形的有：A，C，D．

列表如下：

	A	B	C	D
A		(A,B)	(A,C)	(A,D)
B	(B,A)		(B,C)	(B,D)
C	(C,A)	(C,B)		(C,D)

D	(D,A)	(D,B)	(D,C)	

共有 12 种等可能的结果，其中抽取的两张卡片正面图案都是轴对称图形的结果有：(A,C)，(A,D)，(C,A)，(C,D)，(D,A)，(D,C)，共 6 种，

$\therefore$抽取的两张卡片正面图案都是轴对称图形的概率为$\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

故选：A

20．在一个不透明的袋子中装有 3 张完全相同的卡片，分别写有数字 1，2，3．从中随机抽取两张，组成的两位数是 3 的倍数的概率为______.

【答案】$\frac{1}{3}$

【分析】本题考查列表法与树状图法，熟练掌握列表法与树状图法以及概率公式是解答本题的关键．列表可得出所有等可能的结果数以及组成的两位数是 3 的倍数的结果数，再利用概率公式可得出答案．

【详解】解：列表如下：

	1	2	3
1		12	13
2	21		23
3	31	32	

共有 6 种等可能的结果，其中组成的两位数是 3 的倍数的结果有：12，21，共 2 种，

$\therefore$组成的两位数是 3 的倍数的概率为$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

故答案为：$\frac{1}{3}$

21．春节期间，有四部影片《热辣滚烫》《第二十条》《飞驰人生 2》《志愿军 2》热映，甲乙两名同学分别从这四部影片中随机选择一部观看，则他们选择的影片相同的概率为______.

【答案】$\frac{1}{4}$

【分析】本题考查了列表法与树状图法:通过列表法或树状图法展示所有等可能的结果求出n，再从中选出符合事件 A 或B的结果数目m，然后根据概率公式求出事件 A 或B的概率．

【详解】解：分别记四部影片《热辣滚烫》《第二十条》《飞驰人生 2》《志愿军 2》为A，B，C,D，列表如下：

	A	B	C	D

A	(A,A)	(B,A)	(C,A)	(D,A)
B	(A,B)	(B,B)	(C,B)	(D,B)
C	(A,C)	(B,C)	(C,C)	(D,C)
D	(A,D)	(B,D)	(C,D)	(D,D)

一共有 16 种等可能的情况，其中他们选择的影片相同有 4 种等可能的情况，

$\therefore P$（他们选择的影片相同）$=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

故答案为：$\frac{1}{4}$.

22．暑假期间，小林准备带家人在盐城游玩，通过上网查阅资料得知，盐城热门的景点有大洋湾、珠溪古镇和中华海棠园，随机选择一个或两个景点游玩．

(1)小林从中任意选择 1 个景点游玩，恰好是珠溪古镇的概率为_；

(2)小林从中任意选择 2 个景点游玩，请用列表或画树状图的方法，求出选择大洋湾和中华海棠园这两个景点的概率．

【答案】(1)$\frac{1}{3}$

(2)$\frac{1}{3}$

【分析】本题考查了列表法或画树状图进行概率的计算，列出所有的可能是求解的关键．

（1）根据概率的定义即可求解；

（2）用列表法列出所有可能的组合，然后根据概率的定义即可求解．

【详解】（1）解：由题意知，共有 3 种等可能的结果，其中恰好是珠溪古镇的结果有 1 种，

∴小林从中任意选择 1 个景点游玩，恰好是珠溪古镇的概率为$\frac{1}{3}$；

（2）解：将大洋湾、珠溪古镇和中华海棠园分别记为 A，B，C，

列表如下：

	A	B	C
A		(A,B)	(A,C)

B	(B,A)		(B,C)
C	(C,A)	(C,B)	

共有 6 种等可能的结果，其中选择大洋湾和中华海棠园这两个景点的结果有：(A,C)，(C,A)，共 2 种，

∴选择大洋湾和中华海棠园这两个景点的概率为$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

23．在两个不透明的袋子甲、乙中各装有相同的三个小球，小球分别标有数字$-3,0,2$，现从甲中任意摸出一个小球，将上面的数字记为a；再从乙中任意摸出一个小球，将上面的数字记为b.

(1)用列表或画树状图的方法表示出所有可能出现的结果；

(2)求点(a,b)在第四象限的概率.

【答案】(1)见解析

(2)$\frac{1}{9}$

【分析】本题考查用树状图法或列表法求概率：

（1）列出表格，表示出所有可能出现的结果即可；

（2）利用概率公式进行计算即可.

【详解】（1）解：列表如下：

	-3	0	2
-3	$(-3,-3)$	$(-3,0)$	$(-3,2)$
0	$(0,-3)$	$(0,0)$	$(0,2)$
2	$(2,-3)$	$(2,0)$	$(2,2)$

共有$(-3,-3)$，$(-3,0)$，$(-3,2)$，$(0,-3)$，$(0,0)$，$(0,2)$，$(2,-3)$，$(2,0)$，$(2,2)$，9 种情况；

（2）由（1）可知共有 9 种等可能的结果，其中点(a,b)在第四象限的结果有 1 种，

∴$P=\frac{1}{9}$.

24．在同升湖实验学校九年级的班级三人制篮球赛过程中，经过几轮激烈的角逐，最后由 2 班、5 班、6 班、9 班进入了年级四强进行最后的名次争夺赛．现在葛老师规定先用抽签的方式决定将这 4 个班级分成 2 个小组，再由两个小组的胜出者争夺一二名，小组落败者争夺三四名．

（1）直接写出 9 班和 5 班抽签到一个小组的概率；

（2）若 4 个班级的实力完全相当，任何两个班级对决的胜率都是 50%，求在年级四强的名次争夺赛中 9 班不与 5 班对决的概率．

【答案】（1）$\frac{1}{3}$；（2）$\frac{1}{3}$

【分析】（1）利用列举法求解即可；

（2）分类讨论，利用列举法即可求解．

【详解】（1）分组：(2，5)和(6，9)；(2，6)和(5，9)；(2，9)和(5，6)共 3 种，

9 班和 5 班抽签到一个小组只有一种情况，

故概率为：$\frac{1}{3}$；

（2）①分组为(2，5)和(6，9)，

	1、2 名争夺	3、4 名争夺
情况 1	(2，6)	(5，9)
情况 2	(2，9)	(5，6)
情况 3	(5，6)	(2，9)
情况 4	(5，9)	(2，6)

故概率为：$\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{6}$；

②分组为(2，9)和(5，6)，

	1、2 名争夺	3、4 名争夺
情况 1	(2，5)	(6，9)
情况 2	(2，6)	(5，9)
情况 3	(5，9)	(2，6)
情况 4	(6，9)	(2，5)

故概率为：$\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{6}$；

综上，在年级四强的名次争夺赛中 9 班不与 5 班对决的概率为$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

【点睛】本题考查了利用列举法求概率，通过列表法或树状图法展示所有等可能的结果求出 n，再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m，然后根据概率公式求出事件 A 或 B 的概率.

考点五、树状图求概率

25．同一元素中质子数相同，中子数不同的各种原子互为同位素，如$^{12}_{6}C$与$^{13}_{6}C$、$^{16}_{8}O$与$^{17}_{8}O$．在一次制取CO的实验中，$^{12}_{6}C$与$^{13}_{6}C$的原子个数比为 2：1，$^{16}_{8}O$与$^{17}_{8}O$的原子个数比为 1：1，若实验恰好完全反应生成CO，则反应生成$^{12}_{11}C^{16}_{8}O$的概率（　）

A．$\frac{1}{6}$　　　　B．$\frac{1}{3}$　　　　C．$\frac{2}{3}$　　　　D．$\frac{1}{2}$

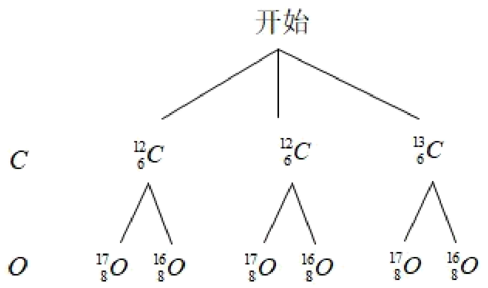
【答案】B

【分析】根据反应的化学方程式，画树状图展示所有 6 种等可能的结果数，找出反应生成$^{12}_{11}C^{16}_{8}O$的结果数，然后根据概率公式求解..

【详解】解：反应的化学方程式为$2C+O_2\xrightarrow{点燃}2CO$，

$^{12}_{11}C$与$^{13}_{6}C$的原子个数比为$2:1$，$^{16}_{8}O$与$x=\frac{d}{5}$的原子个数比为$1:1$，

反应后生成的$^{12}_{11}C^{16}_{8}O$中$^{12}_{6}C$来自于反应物 C，而$^{16}_{8}O$来自于反应物 O，



共有 6 种等可能的结果数，其中反应生成$^{12}_{11}C^{16}_{8}O$的结果数为 2，

∴反应生成$^{12}_{6}C^{16}_{8}O$的概率为$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，

故选：B．

【点睛】本题考查了列表法与树状图法：利用列表法或树状图法展示所有等可能的结果 n，再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m，然后利用概率公式计算事件 A 或事件 B 的概率.

26．如图 1，实验室中存放有 *A*，*B* 两组溶液（均为无色），*A* 组溶液中的两种酸性溶液分别为稀盐酸（HCl）和稀硫酸（H_2SO_4），*B* 组溶液中的两种碱性溶液分别为氢氧化钠溶液（NaOH）和氢氧化钙溶液（$Ca(OH)_2$）.

图1

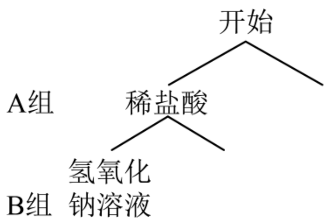


图2

(1)彤彤从 *A* 组溶液中随机选择一瓶溶液，则选中稀盐酸（HCl）的概率为______.

(2)下面是小杰求“从两组中各随机选一瓶溶液滴入同一试管中能够反应生成氯化钙溶液（$CaCl_2$）”的概率的部分过程，帮他补全如图 2 所示的树状图并完成求解.（提示：稀盐酸与氢氧化钙溶液反应可生成氯化钙溶液）

【答案】(1)$\frac{1}{2}$

(2)树状图见解析，$\frac{1}{4}$

【分析】本题考查列表法与树状图法、概率公式，熟练掌握列表法与树状图法以及概率公式是解答本题的关键.

（1）由题意知，共有 2 种等可能的结果，其中选中稀盐酸（HCl）的结果有 1 种，利用概率公式可得答案.

（2）根据题意补全树状图，由树状图可得出所有等可能的结果数以及从两组中各随机选一瓶溶液滴入同一试管中能够反应生成氯化钙溶液的结果数，再利用概率公式可得出答案.

【详解】（1）由题意知，共有 2 种等可能的结果，其中选中稀盐酸（HCl）的结果有 1 种，

∴选中稀盐酸（HCl）的概率为$\frac{1}{2}$；

（2）补全树状图如图 2 所示

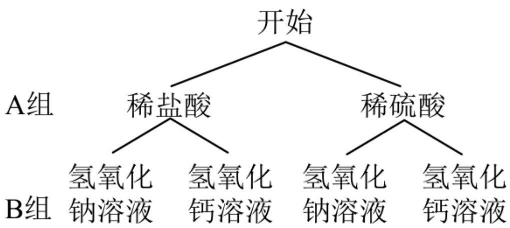


图2