2024届杭州市江干区高三上数学期末联考模拟试题

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角"条形码粘贴处"。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

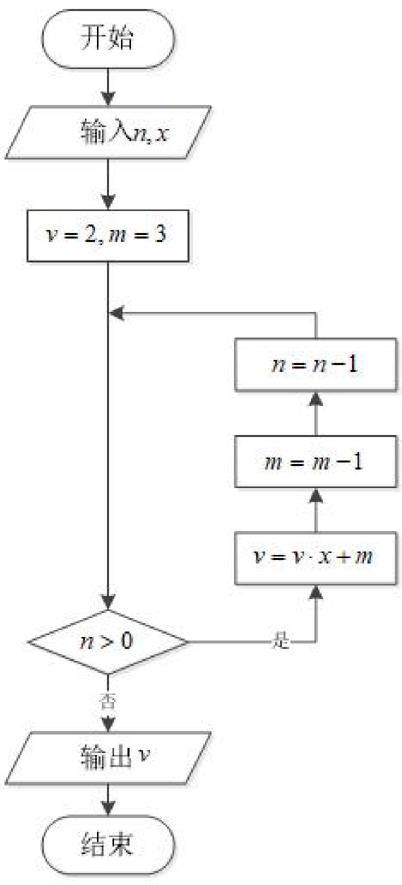
4．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知α为锐角，且$\sqrt{3}\sin 2\alpha=2\sin\alpha$，则$\cos 2\alpha$等于（　　）

A．$\dfrac{2}{3}$　　B．$\dfrac{2}{9}$　　C．$-\dfrac{1}{3}$　　D．$-\dfrac{4}{9}$

2．秦九韶是我国南宁时期的数学家，普州（现四川省安岳县）人，他在所著的《数书九章》中提出的多项式求值的秦九韶算法，至今仍是比较先进的算法.如图所示的程序框图给出了利用秦九韶算法求某多项式值的一个实例.若输入n、x的值分别为3、1，则输出v的值为（　　）



A．7　　B．8　　C．9　　D．10

3．已知斜率为2的直线l过抛物线C：$y^2=2px(p>0)$的焦点F，且与抛物线交于A，B两点，若线段AB的中点M

的纵坐标为 1，则 p＝（　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．4

4．已知函数 $f(x)=(x-a-1)e^{x}$，若 $2^{a}=\log_2 b=c$, 则（　　）

A．$f(a)<f(b)<f(c)$　　B．$f(b)<f(c)<f(a)$

C．$f(a)<f(c)<f(b)$　　D．$f(c)<f(b)<f(a)$

5．用数学归纳法证明 $1+2+3+\cdots+□^2=\frac{□^4+□^2}{2}$，则当 $□=□+1$ 时，左端应在 $□=□$ 的基础上加上（　　）

A．$□^2+1$　　B．$(□+1)^2$

C．$(□^2+1)+(□^2+2)+\cdots+(□+1)^2$　　D．$\frac{(□+1)^4+(□+1)^2}{2}$

6．双曲线 $\frac{□^2}{□^2}-\frac{□^2}{□^2}=1\ (□>0,\ □>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$，则其渐近线方程为

A．$□=\pm\sqrt{2}□$　　B．$□=\pm\sqrt{3}□$　　C．$□=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}□$　　D．$□=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}□$

7．已知 $□(□)$，$□(□)$ 都是偶函数，且在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，设函数 $□(□)=□(□)+□(1-□)-|□(□)-□(1-□)|$，若 $□>0$，则（ ）

A．$□(-□)\geq□(□)$ 且 $□(1+□)\geq□(1-□)$

B．$□(-□)\geq□(□)$ 且 $□(1+□)\leq□(1-□)$

C．$□(-□)\leq□(□)$ 且 $□(1+□)\geq□(1-□)$

D．$□(-□)\leq□(□)$ 且 $□(1+□)\leq□(1-□)$

8．做抛掷一枚骰子的试验，当出现 1 点或 2 点时，就说这次试验成功，假设骰子是质地均匀的.则在 3 次这样的试验中成功次数 X 的期望为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．1　　D．2

9．已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$, 则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影为（　　　）

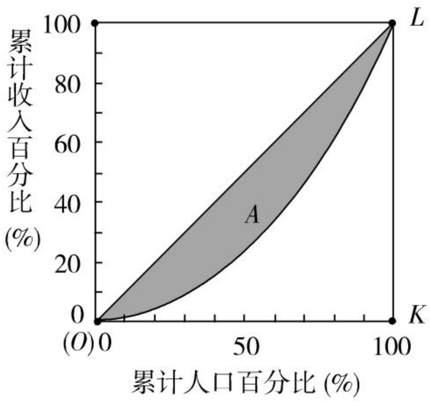
A．-2　　B．-1　　C．-3　　D．2

10．已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1,a_2=2$，且当 n 为奇数时，$a_{n+2}-a_n=2$；当 n 为偶数时，$a_{n+2}+1=3(a_n+1)$．则此数

列的前20项的和为（　　）

A．$\frac{3^{11}-3}{2}+90$　　B．$\frac{3^{11}-3}{2}+100$　　C．$\frac{3^{12}-3}{2}+90$　　D．$\frac{3^{12}-3}{2}+100$

11．为了研究国民收入在国民之间的分配，避免贫富过分悬殊，美国统计学家劳伦茨提出了著名的劳伦茨曲线，如图所示.劳伦茨曲线为直线OL时，表示收入完全平等.劳伦茨曲线为折线OKL时，表示收入完全不平等.记区域A为不平等区域，a表示其面积，S为$\triangle OKL$的面积，将$\text{Gini}=\frac{a}{S}$称为基尼系数.



对于下列说法：

①Gini越小，则国民分配越公平；

②设劳伦茨曲线对应的函数为$y=f(x)$，则对$\forall x\in(0,1)$，均有$\frac{f(x)}{x}>1$；

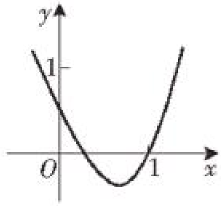
③若某国家某年的劳伦茨曲线近似为$y=x^2(x\in[0,1])$，则$\text{Gini}=\frac{1}{4}$；

④若某国家某年的劳伦茨曲线近似为$y=x^3(x\in[0,1])$，则$\text{Gini}=\frac{1}{2}$.

其中正确的是：

A．①④　　B．②③　　C．①③④　　D．①②④

12．如图是二次函数$f(x)=x^2-bx+a$的部分图象，则函数$g(x)=a\ln x+f'(x)$的零点所在的区间是（　　）



A．$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$　　B．$\left(\frac{1}{2},1\right)$　　C．$(1,2)$　　D．$(2,3)$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．已知函数$f\left(x\right)=2a\left(\ln x-x\right)+x^2\left(a>0\right)$有两个极值点$x_1$、$x_2\left(x_1<x_2\right)$，则$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)$的取值范围为

________.

14．ΔABC的三个内角A，B，C所对应的边分别为a，b，c，已知$2b\cos A=2c+\sqrt{3}a$，则$\angle B=$________.

15．集合$A=\{x\,|\,x=2k-1,k\in Z\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，则$A\bigcap B=$_____.

16．已知$f\left(x\right)=\begin{cases}x^2,x\geq 0\\-x^2,x<0\end{cases}$，若$f\left(3a-2\right)>4f\left(a\right)$，则$a$的取值范围是______.

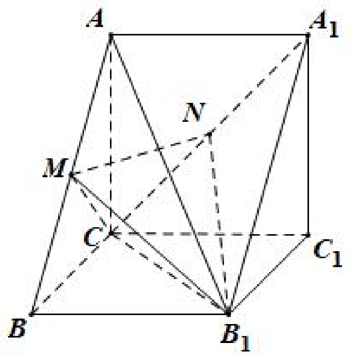
三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（12分）已知函数$f\left(x\right)=\left(2-x\right)e^x+ax$.

（I）已知$x=2$是$f\left(x\right)$的一个极值点，求曲线$f\left(x\right)$在$\left(0,f\left(0\right)\right)$处的切线方程

（II）讨论关于x的方程$f\left(x\right)=a\ln x\left(a\in R\right)$根的个数.

18.（12分）如图，在三棱柱ABC－$A_1B_1C_1$中，A_1A⊥平面ABC，$\angle ACB$＝90°，AC＝CB＝C_1C＝1，M，N分别是AB，A_1C的中点.



（1）求证：直线MN⊥平面ACB_1；

（2）求点C_1到平面B_1MC的距离.

19.（12分）下表是某公司2018年5~12月份研发费用（百万元）和产品销量（万台）的具体数据：

月 份	5	6	7	8	9	10	11	12
研发费用（百万元）	2	3	6	10	21	13	15	18
产品销量（万台）	1	1	2	2.5	6	3.5	3.5	4.5

（I）根据数据可知y与x之间存在线性相关关系，求出y与x的线性回归方程（系数精确到0.01）；

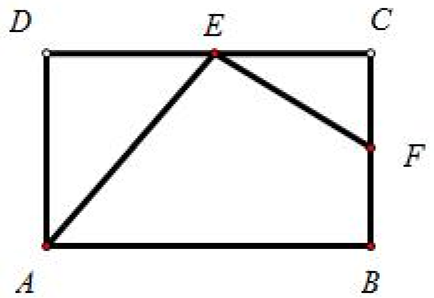
（II）该公司制定了如下奖励制度：以Z（单位：万台）表示日销售，当$Z\in\left[0,0.13\right)$时，不设奖；当$Z\in\left[0.13,0.15\right)$时，每位员工每日奖励200元；当$Z\in\left[0.15,0.16\right)$时，每位员工每日奖励300元；当$Z\in\left[0.16,+\infty\right)$时，每位员工每日奖励400元.现已知该公司某月份日销售Z（万台）服从正态分布$N\left(\mu,0.0001\right)$（其中μ是2018年5-12月产品销

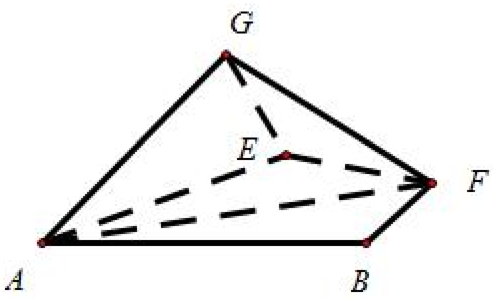
售平均数的二十分之一），请你估计每位员工该月（按30天计算）获得奖励金额总数大约多少元.

参考数据：$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=347$，$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1308$，$\sum_{i=1}^{n}y_i^2=93$，$\sqrt{7140}\approx 84.50$，

参考公式：相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2\right)}}$，其回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中的 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，若随机变量 x 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $P\left(\mu-\sigma<x\le\mu+\sigma\right)=0.6826$，$P\left(\mu-2\sigma<x\le\mu+2\sigma\right)=0.9544$.

20.（12分）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=3$，点 E,F 分别是线段 DC,BC 的中点，分别将 $\triangle DAE$ 沿 AE 折起，$\triangle CEF$ 沿 EF 折起，使得 D,C 重合于点 G，连结 AF.





（I）求证：平面 $GEF\perp$ 平面 GAF；

（II）求直线 GF 与平面 GAE 所成角的正弦值.

21.（12分）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}ax^2-(a+1)x+\ln x,a\in R$.

（1）当 $a=0$ 时，求曲线 $f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 的切线方程；

（2）讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

22.（10分）已知函数 $g(x)=\ln x-mx-1$.

（1）讨论 $g(x)$ 的单调性；

（2）若函数 $f(x)=xg(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，证明 $\ln x_1+\ln x_2>2$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

由$\sqrt{3}\sin 2\alpha=2\sin\alpha$可得$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，再利用$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$计算即可.

【详解】

因为$2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha$，$\sin\alpha\neq 0$，所以$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\dfrac{2}{3}-1=-\dfrac{1}{3}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查二倍角公式的应用，考查学生对三角函数式化简求值公式的灵活运用的能力，属于基础题.

2、B

【解析】

列出循环的每一步，由此可得出输出的v值.

【详解】

由题意可得：输入$n=3$，$x=1$，$v=2$，$m=3$；

第一次循环，$v=2\times 1+3=5$，$m=3-1=2$，$n=3-1=2$，继续循环；

第二次循环，$v=5\times 1+2=7$，$m=2-1=1$，$n=2-1=1$，继续循环；

第三次循环，$v=7\times 1+1=8$，$m=1-1=0$，$n=1-1=0$，跳出循环；

输出$v=8$.

故选：B.

【点睛】

本题考查根据算法框图计算输出值，一般要列举出算法的每一步，考查计算能力，属于基础题.

3、C

【解析】

设直线 l 的方程为 $x=\dfrac{1}{2}y+\dfrac{p}{2}$，与抛物线联立利用韦达定理可得 p.

【详解】

由已知得 F（$\dfrac{p}{2}$，0），设直线 l 的方程为 $x=\dfrac{1}{2}y+\dfrac{p}{2}$，并与 $y^2=2px$ 联立得 $y^2-py-p^2=0$，

设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），AB 的中点 C（x_0，y_0），

$\therefore y_1+y_2=p$，

又线段 AB 的中点 M 的纵坐标为 1，则 $y_0=\dfrac{1}{2}$（y_1+y_2）$=\dfrac{p}{2}=1$，所以 p=2,

故选 C.

【点睛】

本题主要考查了直线与抛物线的相交弦问题，利用韦达定理是解题的关键，属中档题.

4、C

【解析】

利用导数求得 $f\left(x\right)$ 在 $\left(a,+\infty\right)$ 上递增，结合 $y=c$ 与 $y=2^x, y=\log_2 x, y=x$ 图象，判断出 a,b,c 的大小关系，由此比较出 $f\left(a\right), f\left(b\right), f\left(c\right)$ 的大小关系.

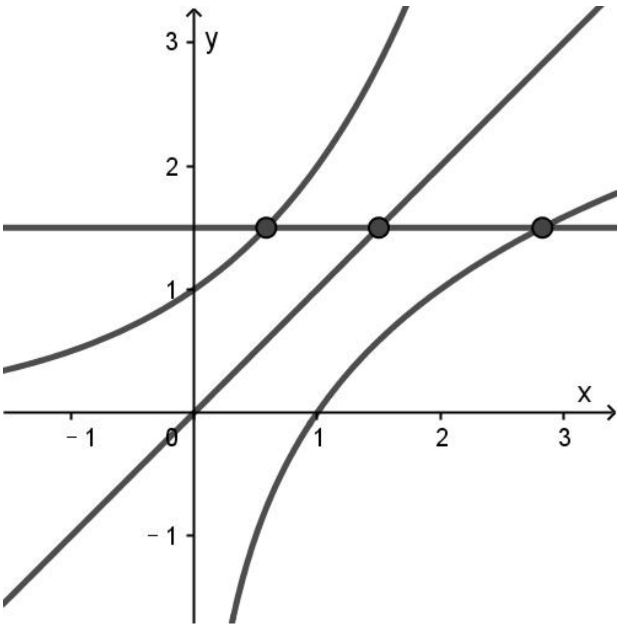
【详解】

因为 $f'(x)=(x-a)\mathrm{e}^x$，所以 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增；

在同一坐标系中作 $y=c$ 与 $y=2^x, y=\log_2 x, y=x$ 图象，

$\because 2^a=\log_2 b=c$，可得 $a<c<b$，故 $f(a)<f(c)<f(b)$.

故选：C



【点睛】

本小题主要考查利用导数研究函数的单调性，考查利用函数的单调性比较大小，考查数形结合的数学思想方法，属于中档题.

5、C

【解析】

首先分析题目求用数学归纳法证明 1+1+3+…+n^1=$\frac{□^4+□^2}{2}$时，当 n=k+1 时左端应在 n=k 的基础上加上的式子，可以分别使得 n=k，和 n=k+1 代入等式，然后把 n=k+1 时等式的左端减去 n=k 时等式的左端，即可得到答案．

【详解】

当 n=k 时，等式左端=1+1+…+k^1，

当 n=k+1 时，等式左端=1+1+…+k^1+k^1+1+k^1+1+…+（k+1）^{1}，增加了项（k^1+1）+（k^1+1）+（k^1+3）+…+（k+1）^{1}．

故选：C．

【点睛】

本题主要考查数学归纳法，属于中档题./

6、A

【解析】

分析：根据离心率得 a,c 关系，进而得 a,b 关系，再根据双曲线方程求渐近线方程，得结果.

详解：$\because □ = \frac{□}{□} = \sqrt{3}, \therefore \frac{□^2}{□^2} = \frac{□^2-□^2}{□^2} = □^2 - 1 = 3 - 1 = 2, \therefore \frac{□}{□} = \sqrt{2},$

因为渐近线方程为$□ = \pm\frac{□}{□}□$，所以渐近线方程为$□ = \pm\sqrt{2}□$，选 A.

点睛：已知双曲线方程$\frac{□^2}{□^2} - \frac{□^2}{□^2} = 1(□, □ > 0)$求渐近线方程：$\frac{□^2}{□^2} - \frac{□^2}{□^2} = 0 \Rightarrow □ = \pm\frac{□}{□}□$.

7、A

【解析】

试题分析：由题意得，$□(□) = \begin{cases} 2□(1-□), □(□) \ge □(1-□) \\ 2□(□), □(□) < □(1-□) \end{cases}$，

$\therefore □(-□) = \begin{cases} 2□(1+□), □(□) = □(-□) \ge □(1+□) \\ 2□(-□), □(□) = □(-□) < □(1+□) \end{cases}$，$□(□) = \begin{cases} 2□(1-□), □(□) \ge □(1-□) \\ 2□(□), □(□) < □(1-□) \end{cases}$，

$\because □ > 0$，$\therefore (□+1)^2 - (□-1)^2 = 4□ > 0$，$\therefore |1+□| > |□-1| \Rightarrow □(1+□) > □(1-□)$,

$\therefore$若$□(□) > □(1+□)$：$□(-□) = 2□(1+□)$，$□(□) = 2□(1-□)$，$\therefore □(-□) > □(□)$,

若$□(1-□) \le □(□) \le □(1+□)$：$□(-□) = 2□(-□) = 2□(□)$，$□(□) = 2□(1-□)$，$\therefore □(-□) \ge □(□)$,

若$□(□) < □(1-□)$：$□(-□) = 2□(-□) = 2□(□)$，$□(□) = 2□(□)$，$\therefore □(-□) = □(□)$,

综上可知□(−□) ≥ □(□)，同理可知□(1 + □) ≥ □(1 − □)，故选 A.

考点：1.函数的性质；2.分类讨论的数学思想.

【思路点睛】本题在在解题过程中抓住偶函数的性质，避免了由于单调性不同导致1 − □与1 + □大小不明确的讨论，从而使解题过程得以优化，另外，不要忘记定义域，如果要研究奇函数或者偶函数的值域、最值、单调性等问题，通常先在原点一侧的区间(对奇(偶)函数而言)或某一周期内(对周期函数而言)考虑，然后推广到整个定义域上.

8、C

【解析】

每一次成功的概率为□ $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$，□服从二项分布，计算得到答案.

【详解】

每一次成功的概率为□ $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$，□服从二项分布，故□(□) $= \frac{1}{3} \times 3 = 1$.

故选：□.

【点睛】

本题考查了二项分布求数学期望，意在考查学生的计算能力和应用能力.

9、A

【解析】

根据向量投影的定义，即可求解.

【详解】

$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影为 $|\vec{a}|\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-6}{3} = -2$.

故选:A

【点睛】

本题考查向量的投影，属于基础题.

10、A

【解析】

根据分组求和法，利用等差数列的前 n 项和公式求出前 20 项的奇数项的和，利用等比数列的前 n 项和公式求出前 20 项的偶数项的和，进而可求解.

【详解】

当 n 为奇数时，$a_{n+2} - a_n = 2$，

则数列奇数项是以1为首项，以2为公差的等差数列，

当n为偶数时，$a_{n+2}+1=3\left(a_n+1\right)$，

则数列中每个偶数项加1是以3为首项，以3为公比的等比数列.

所以$S_{20}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=a_1+a_3+\cdots+a_{19}+a_2+a_4+\cdots+a_{20}$

$=10\times1+\dfrac{10\times9}{2}\times2+\left(a_2+1\right)+\left(a_4+1\right)+\cdots\left(a_{20}+1\right)-10$

$=100+\dfrac{3\left(1-3^{10}\right)}{1-3}-10=\dfrac{3^{11}-3}{2}+90$.

故选：A

【点睛】

本题考查了数列分组求和、等差数列的前n项和公式、等比数列的前n项和公式，需熟记公式，属于基础题.

11、A

【解析】

对于①，根据基尼系数公式$\mathrm{Gini}=\dfrac{a}{S}$，可得基尼系数越小，不平等区域的面积$a$越小，国民分配越公平，所以①正确.

对于②，根据劳伦茨曲线为一条凹向横轴的曲线，由图得$\forall x\in(0,1)$，均有$f(x)<x$，可得$\dfrac{f(x)}{x}<1$，所以②错误.对于③，因为$a=\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x=(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3)|_0^1=\frac{1}{6}$，所以$\mathrm{Gini}=\dfrac{a}{S}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$，所以③错误.对于④，因为

$a=\int_0^1(x-x^3)\mathrm{d}x=(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4)|_0^1=\frac{1}{4}$，所以$\mathrm{Gini}=\dfrac{a}{S}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$，所以④正确.故选 A.

12、B

【解析】

根据二次函数图象的对称轴得出b范围，y轴截距，求出a的范围，判断$g(x)$在区间端点函数值正负，即可求出结论.

【详解】

$\because f(x)=x^2-bx+a$，结合函数的图象可知，

二次函数的对称轴为$x=\dfrac{b}{2}$，$0<f(0)=a<1$，

$\dfrac{1}{2}<x=\dfrac{b}{2}<1$，$\because f'(x)=2x-b$，

所以$g(x)=a\ln x+f'(x)=a\ln x+2x-b$在$(0,+\infty)$上单调递增.