摘要

中国期权市场的发展可以追溯到2005年，但由于历史原因和市场参与者的不熟悉，市场规模一直较小。近年来，随着资本市场的不断发展，中国期权市场也得到了更多的关注和支持。然而，中国期权市场目前存在一些问题，如缺乏流动性、交易成本较高、期权产品设计和推广不足等。在这种情况下，研究期权隐含波动率显得尤为重要。通过研究期权隐含波动率，可以更好地理解市场风险和预期，为投资者提供更准确的风险管理和决策依据，还可以为期权定价和交易提供重要的参考和支持。

本文以期权隐含波动率和套利策略为主要研究对象。使用沪深 300 股指期权的实证数据，基于SVI模型对期权隐含波动率曲面“微笑”等特征能够较好地拟合，提出在SVI模型进行参数估计环节对目标函数引入期权市场先验信息的加权，以期进一步完善SVI模型。在此基础上，结合统计套利思想，探索期权市场的套利策略和风险管理方法。本文主要的研究内容和结果如下：

（1）SVI模型在期权隐含波动率曲面拟合上已被证明有良好的效果，且其参数估计方便快捷，是热门的波动率模型研究对象。本文验证了SVI模型在沪深 300 股指期权市场上是有效的。并且创新性地提出对SVI模型的目标函数进行加权，以区分不同价值状态的期权在市场中的重要性，本文根据对期权成交量、内在价值等先验信息的分析，提出并对比分析了 3 种权重函数的形式，最终通过实际数据证明基于Vega值加权的效果是最好的，相比原始的SVI模型不加权的目标函数，其拟合波动率曲线时均方根误差有平均 10%以上的提升。

（2）基于SVI模型对隐含波动率曲面的拟合，结合实际市场情况，提出了两种期权套利策略。包含单期权交易策略、Delta中性对冲策略，对于每种

套利策略，本文从理论和实践两个方面进行深入分析，包括策略的构建、执行、收益和风险的评估等，同时给出了详细的操作流程和实证分析。单期权策略能够利用SVI模型识别到的有定价误差的期权实现较大的收益，在对历史 3 年数据的回测中，其收益超过了 100%，但其风险稍高。Delta中性对冲策略能够严控风险，在保持年化收益波动率和最大回撤较低的水位下，实现可观的收益，取得较高的超额利润。

（3）Vega加权SVI模型参数估计的目标函数能够有效地提高单期权策略和Delta中性对冲策略的盈利能力和风险控制水平。将不同的期权赋予不同的权重，有助于挖掘更理想的波动率曲面，提升拟合效果。实证结果显示，这样做不仅可以使策略的风险更低，同时也能使收益更高。

最后，本文提出了研究中存在的不足，并指出了未来可能的研究方向，包括利用更加有效的模型拟合波动率曲面、考虑更多的市场因素和风险控制手段以期更加全面深入地探究期权市场的特点和规律，增强套利策略的可靠性，帮助投资者更好地规避市场风险，提高投资回报率，为期权市场的发展和创新提供有益的参考。

关键词：期权，隐含波动率，SVI模型，套利策略，沪深 300 股指期权

ABSTRACT

The development of China's options market can be traced back to 2005, but due to historical reasons and the unfamiliarity of market participants, the market size has always been small. With the capital market experiencing continuous growth over the last few years, China's options market has also received more attention and support. However, there are currently some problems in China's options market, such as lack of liquidity, high transaction costs, insufficient design and promotion of options products, etc. In this case, it is particularly important to study the implied volatility of options. By studying the implied volatility of options, we can better understand the market risks and expectations, thus providing more accurate risk management and decision-making basis for investors, and also providing important reference and support for option pricing and trading.

This paper takes option implied volatility and arbitrage strategy as the main research object. This article uses the empirical data of CSI 300 Index Options. On the basis that the SVI model can well fit the features such as the "smile" of the option implied volatility surface, this paper proposes to weight the objective function of the parameter estimation of the SVI model, and introduce the prior information of the option market in order to further improve the SVI model. On this basis, combined with the idea of statistical arbitrage, the arbitrage strategy and risk management method of option market are explored. The following outlines the primary research content and outcomes presented in this paper:

(1) The SVI model has been proven to have a good effect on the surface fitting of option implied volatility, and its parameter estimation is convenient and quick, so it is a popular research object of volatility models. This paper verifies that the SVI model is effective in the CSI 300 Index Options market. And this paper innovatively proposes to weight the objective function of the SVI model to distinguish the importance of options with different moneyness in the market. Based on the analysis of prior information such as option trading volume and intrinsic value, this paper

proposes and compares 3 forms of weighting functions. Finally, the actual data proves that the effect of Vega weighting is the best. Compared with the unweighted objective function of the original SVI model, the root mean square error of the curve fitting has an average improvement of more than 10%.

(2) Based on the fitting of the implied volatility surface by the SVI model, this paper proposes two option arbitrage strategies in combination with the actual market conditions. Including single option trading strategy and delta neutral hedging strategy. For each arbitrage strategy, this article conducts an in-depth analysis from both theoretical and practical aspects, including strategy construction, execution, return and risk assessment, etc. At the same time, the detailed operation process and empirical analysis are given. The single option trading strategy can use the options with pricing errors identified by the SVI model to achieve great returns. In the backtest of historical data for 3 years, its returns exceeded 100%, but its risks were slightly higher. The delta neutral hedging strategy can strictly control risks, and achieve considerable returns and high excess profits while maintaining a low level of annualized return volatility and maximum retracement.

(3) Vega weighting the objective function of SVI model parameter estimation can effectively improve the profitability and risk control level of both single option trading strategy and delta neutral hedging strategy. Assigning different weights to different options helps to mine a more ideal volatility surface and improve the fitting effect. Empirical results show that doing so can not only make the strategy less risky, but also make the return higher.

Finally, this paper also proposes further research directions for the deficiencies in the research. Including using a more effective model to fit the volatility surface, considering more market factors and risk control methods, in order to explore the characteristics of the option market more comprehensively and deeply. Thereby enhancing the reliability of the arbitrage strategy, helping investors to better avoid market risks, boosting the investment's rate of return, and providing a useful reference for the development and innovation of the options market.

Key words: Options, Implied volatility, SVI model, Arbitrage strategy, CSI 300 Index Options

目录

1 绪论

1.1 研究背景和意义

在金融市场中，期权作为一种重要的金融工具，近年来受到了越来越多的关注和重视。期权市场不仅可以为投资者提供风险管理工具和投机机会，也为企业融资和资产定价提供了参考。因此，深入研究期权市场的发展和重要性，对于理解金融市场的运作和投资风险管理具有重要意义。

随着芝加哥商品交易所的建立和Black-Scholes模型的提出，期权市场在全世界迅速发展。美国是全球最大的期权市场，也是期权交易的发源地。在美国，期权交易的规模和流动性非常大，涵盖了各种类型的期权，如股票期权、指数期权、商品期权等。美国期权市场的主要交易所有芝加哥期权交易所和纳斯达克期权交易所。欧洲的期权市场规模较小，但也在快速发展。欧洲的期权交易主要以欧式期权为主，欧式期权是指只有在到期日才能行权的期权。欧洲市场的主要交易所有荷兰、德国和英国伦敦证券交易所。在亚洲，韩国和日本的期权也得到了较大的发展。韩国是亚洲最大的期权市场之一，主要交易所为韩国证券交易所。日本的期权市场也相对发达，主要交易所有东京证券交易所和大阪证券交易所。

中国期权市场的发展情况可以说是相对较新的，但也是一个快速发展的市场。我国在 2005 年才开始交易正式的权证产品；2011 年，在银行间市场上推出了人民币的外汇期权；2015 年 2 月 9 日上海证券交易所正式推出上证 50 ETF期权，这是我国首支场内期权产品。2019 年 12 月 23 日，我国首支股指期权品种——沪深 300 股指期权在中国金融期货交易所上市，又为期权市场带来了新的能量，在上市至今 3 年多的时间里，虽然在受新冠肺炎疫情和其他因素的影响下资本市场有震荡起伏，但无法阻止投资者的热情，其成交量虽然存在一定的波动，但总体保持上升态势，如图 1 所示。沪深 300 股指期权的上市是我国资本市场供给侧结构性改革的全新成就，也是金融衍生品

市场独特的创新探索。

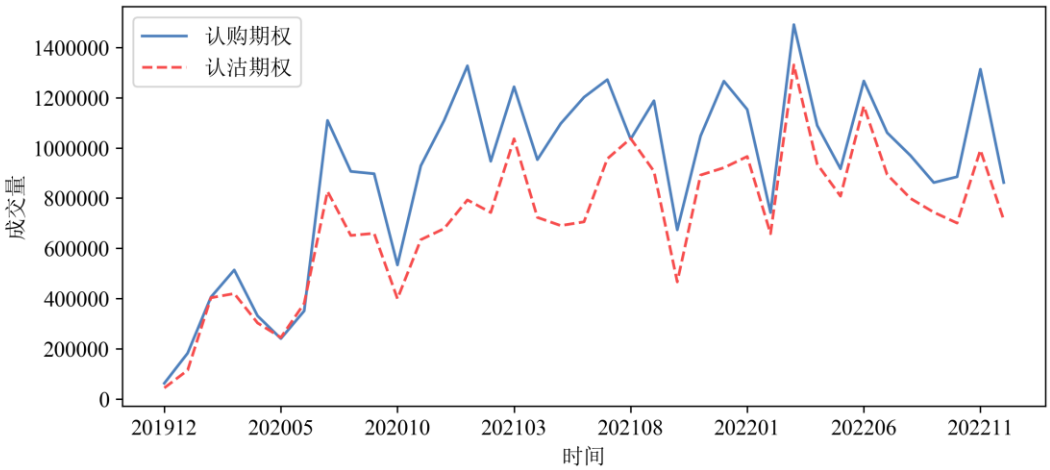

图 1 沪深 300 股指期权每月成交量

在交易品种和交易规模方面，我国期权市场在不断发力进行创新和扩大。截至 2022 年底，我国期权品种的上市数量总共为 38 个。其中，商品类期权品种 28 个，金融类期权品种共计 10 个。国内持续推进期权品种的创新，而新品种的加入使得期权产品的体系逐渐完善。根据中国期货业协会发布的《2022 年度期货市场发展概述》，中国境内期货及期权市场运行情况非常平稳， 2022年，国内期货期权市场单边成交金额534.9万亿元，成交量为67.68亿手，占全球总成交量的 8.07%。中国期权市场的参与主体包括了机构投资者、个人投资者和期货公司等。其中，机构投资者是中国期权市场的主要参与者，个人投资者则是近年来逐渐增多的一部分。中国证券监督管理委员会主要负责监管期货期权市场的运行和保障投资者权益。总的来说，中国期权市场的发展呈现出较为快速的趋势，市场规模和产品类型不断扩大，并且吸引了越来越多的投资者参与。

相较于欧美等发达市场，中国的期权市场仍处于发展初期。首先中国期权市场规模和品种还比较有限，比起发达市场有些差距。从交易时间来看，中国期权市场的交易时间较短，一般只在交易日内开放交易，而一些欧美市场的期权交易时间则可以跨越多个交易日和夜间交易。在欧美等发达市场，个人投资者和零售投资者占据了较大比例，与中国市场的机构投资者占主导的情况略有差异。中国期权市场的监管体系已逐步完善，但与欧美等发达市

场相比，监管力度和机制还有一定差距，例如在交易信息披露、期权产品的审批和监管等方面还需要加强。相对于海外期权市场，中国期权市场有一定的发展空间，但在政策环境、监管体系和投资者保护等方面不断改进和完善的情况下，未来有望逐步扩大市场规模和品种，吸引更多的投资者参与。

期权市场在发展金融市场、控制投资者风险方面发挥着巨大的作用，因此是非常重要的市场。在金融市场中，期权是一种最主要的风险管理工具，通过期权市场，投资者可以利用期权合约对自己的投资组合进行保护和风险控制。例如，如果一个投资者拥有某个股票，他可以在期权市场购买看跌期权来对冲下跌风险。期权还能提供投机和套利机会，投资者可以根据自己对市场的判断进行买卖期权合约来获取收益。对于企业来说，期权提供了一个重要的融资渠道，企业可以通过期权市场发行股票期权等金融产品来获取融资。同时，期权也可以为资产定价提供参考，期权合约的市场供需关系决定了其价格，因此期权价格波动也反映了市场对于股票或指数未来价格波动的预期。综上所述，期权市场在金融市场中发挥着非常重要的作用，不仅可以提供风险管理工具和投机套利机会，也为企业融资和资产定价提供了参考。

Black和Scholes[3]建立了一种期权定价模型，为期权价格的合理确定提供了依据。该模型基于一些假设条件，提供了一个公式来计算期权的价格，将期权价格表示为标的资产价格、无风险利率、到期期限、行权价格、标的资产波动率的函数，其中实际波动率是唯一一个无法从市场数据进行观察就能直接得到的数据，它被假设为一个常数。但事实并非如此，将期权的市场价格代入Black-Scholes模型得到的波动率不是一个不变的常数，而是一个变化的值，这样反推出来的波动率也被称作隐含波动率。换句话说，期权的隐含波动率就是使得Black-Scholes模型预测的期权价格与市场上实际流通的期权价格相同的波动率值。期权的隐含波动率反映了人们对市场未来波动率的预期，它是期权定价和风险管理中的核心问题。

对于同一标的资产，通过在三维空间中绘制不同行权价格和到期时间的隐含波动率，可以生成一个隐含波动率曲面。期权隐含波动率曲面是用于展示期权市场中隐含波动率变化的工具，波动率曲面的研究可以帮助交易者和投资者更好地理解期权市场中各类期权的价格差异以及市场对未来波动率的预期变化，从而更好地制定投资策略，也可以在风险控制等方面进行广泛应

用。

目前，期权隐含波动率曲面的研究已经成为期权市场中的热门研究领域之一。国内外学者们利用不同的数学模型和统计方法来研究波动率曲面的构成和变化规律，例如随机波动率模型、局部波动率模型、参数化模型等等，并通过实证研究来验证不同的波动率曲面模型的有效性。尽管已经取得了一些进展，但仍然存在一些问题和难点需要解决。其中一个主要的问题是由于期权市场的局限性和交易约束，隐含波动率的研究往往只能集中在少数的标的资产和期限上，难以对全市场和多种资产进行全面和深入的分析。此外，还存在一些技术和理论难点需要解决。例如，在期权隐含波动率的预测和分析中，如何选择合适的模型和参数，如何平衡精度和复杂度等问题。另外，在波动率曲面的研究中，如何解释和预测其变化和形态，如何处理波动率曲面上的奇异点等问题，也是需要探讨和解决的难点。

Gatheral[23]提出的SVI(Stochastic Volatility Inspired)模型提供了一种通过少量参数建立波动率曲面的方法，可以较好地刻画市场期权隐含波动率曲面的实际情况。SVI模型最初被应用于欧式期权定价，之后逐渐应用于其他各种类型的期权定价。该模型的优点在于以下几个方面：首先，模型参数较少，具有灵活性，可以适应不同市场和不同情况下的波动率曲面。其次，模型具有精确性，对于曲面拟合的精度问题，传统的模型在极端点处容易出现较大的误差，而SVI模型的提出能够更好地拟合出曲面在极端点附近的变化趋势，提高拟合的精度。此外，SVI模型还能够解决波动率曲面上的奇异点问题。在实际市场中，由于各种因素的影响，波动率曲面上可能会出现一些不符合正常规律的波动率数据点，即所谓的奇异点。这些奇异点可能会影响到波动率曲面的拟合和分析。而SVI模型通过几个参数的调节，能够较好地解决这个问题。另外，传统的模型参数在不同时间段内存在较大的变化，而SVI模型的参数变化相对较缓，更具有稳定性，可以更好地适用于实际市场。基于以上的优点，SVI模型已经成为期权市场中应用最为广泛的波动率曲面模型之一。

然而，SVI模型并不能完美解决所有的问题。例如，针对市场上所有类型的期权，SVI模型提供相同的拟合形式，尽管这样会有较强的灵活性，但是可能忽略某些期权特有的影响因素。再者，SVI模型并不能提供准确的波

动率预测，这是因为SVI模型只能根据市场上现有的期权价格数据进行拟合，而对于未来的期权，SVI模型无法直接进行预测。另外一个问题是数据的可靠性和有效性。SVI模型进行隐含波动率曲面的拟合需要大量的期权数据，而这些数据可能受到市场噪音、流动性变化、交易费用和套利策略等因素的影响，从而导致计算结果的误差和不稳定性。最后，从SVI模型对波动率进行拟合到真正的进行投资策略和风险管理的应用中间的研究还比较少，实际应用SVI模型进行期权投资的相关策略制定应该如何实现，也是亟待解决的问题。

因此，未来的研究还需进一步探索和发展新的方法，针对以上问题，本文对期权隐含波动率曲面和SVI模型进行研究，并提出以下几个方面的重点工作，以推动期权市场的发展和完善。第一，模型优化。继续对现有的波动率曲面模型进行优化和改进，如对SVI模型进行修正，以提高模型的适用性和预测准确性，尤其是不同类型的期权可能会呈现出不同的特点，针对不同情况进行波动率曲面模型的调整，发展适用于不同类型期权的波动率曲面模型。第二，数据质量优化。在对期权隐含波动率曲面进行研究时，往往需要大量的市场信息数据，但是这些数据可能存在噪声和缺失，因此需要更好地处理和清洗数据，提高数据质量和可用性。提高波动率估计的准确性和稳定性，更加准确地拟合波动率曲面。第三，交易策略设计。利用波动率曲面研究的成果，开发出有效的交易策略和风险管理方法，提高投资组合的收益和抗风险能力。第四，行业应用。将波动率曲面研究成果应用到金融市场和实际交易中，如期权定价、风险管理、套利交易等，为投资者和市场提供更好的服务和工具。

1.2 文献综述

1.2.1 隐含波动率的特征

期权的隐含波动率是衡量标的资产波动性的一个重要指标。与实际波动率不同的是，它是由期权定价模型中反推出来的，而不是通过历史数据计算得来的。Black-Scholes期权定价模型假设同一标的的期权的波动率为常数，

这与实际情况存在很大的出入，实际中期权隐含波动率通常具有“微笑”、倾斜和期限结构的特征。

隐含波动率的“微笑”是指在特定的到期期限下，隐含波动率和行权价的关系表现为一种中部较低、两侧较高的“微笑”型。美国股指期权中的这种行为是由 Rubinstein（1985）首先研究出来的。在此基础上，Platen和Schweizer（1998）对20份没有交易的期权报价进行了剔除，并发现实值期权和虚值期权的波动率要高于平值期权的波动率。Dumas等（1998）对标普 500 指数进行了实证研究，结果表明，在不同的价值状态下，期权的隐含波动率既呈现“微笑”形态，又呈现出一种倾斜的趋势。Foresi和Wu（2005）对全球 12 个主要金融市场中的股指期权进行了分析，结果表明，股指期权的隐含波动率都有非常明显的“微笑”和倾斜现象。以上研究都说明在不同的期权市场中，隐含波动率“微笑”和倾斜的现象普遍存在。

关于波动率“微笑”现象的成因，主要是Black-Scholes模型对资产收益和市场的假设条件与实际不符。Dupire 、张晓蓉、倪中新等人的研究都支持这一观点。Dupire（1994）认为，在金融市场中，波动率的随机性、价格的异常值以及交易费用等三个因素会对微笑曲线产生影响。张晓蓉（2003）主要从资产价格过程以及市场交易机制两方面出发对波动率微笑进行解释。资产价格过程方面，张晓蓉提到Black-Scholes模型关于标的资产收益率服从正态分布的假设与市场实际不符，市场的实际数据显示收益率更多是尖峰肥尾的分布；另外将资产价格假设为连续的Ito过程，也忽略了其发生跳跃的可能；还提到波动率微笑现象还与投资者对标的资产价格的预期相关。前两个都源于Black-Scholes模型的假设不成立。市场机制方面，张晓蓉主要提出了深度实值期权供需不平衡带来的市场溢价、标的资产和期权的交易成本、做市商机制导致的买卖价差不对等产生交易成本的不对称性、报价机制与价格误差四方面的造成波动率“微笑”的因素。倪中新（2020）将波动率微笑的形成原因分为两类观点，一类观点认为隐含波动率的“微笑”和倾斜与尾部资产收益率的“负尾”有很强的相关性；另一类认为波动率微笑主要是由于市场主体对市场的期望造成的，也可以说，在不同的估值状态下，隐含波动率的差异性可以反映出投资者对于市场状况的判断。而倪中新提出，尾部资产收益率和市场预期之间存在着一种交互作用，投资者预期和信息披露对资产价格的

尾部风险具有显著影响。期权数据中的隐含风险信息包括了期权交易者对未来标的资产的预期和看法，同时也包括了整个市场尾部风险的信息。

期权的另一特征——“期限结构”指的是当期权的行权价和标的资产相同时，隐含波动率随到期日变化而发生一定变化的现象。Rubinstein（1985）指出，期权隐含波动率“微笑”具有一定的期限结构，特别是在临近到期的期权市场中，这一特征更加显著。Derman（1996）对 1995 年 9 月 27 号的标普 500 指数期权进行了实证研究，发现离到期日越近的期权隐含波动率越大，而离到期日较远的期权则基本不会出现波动率“微笑”现象。陈信华（2010）认为波动率期限结构反映了隐含波动率与期权到期期限之间的关系。以上研究证实了波动率期限结构的存在，李雪飞（2019）等人进一步探索了期限结构的应用，通过对上证 50ETF期权在不同期限内隐含波动率和标的真实波动率的研究，表明波动率的期限结构对期权定价和交易都有很大的指导意义。

以上文献对期权隐含波动率的“微笑”、倾斜、期限结构等特征进行了一定的研究，包括这些特征的定义、在市场中的表现以及出现的原因和在实际中的应用等，可以说期权的隐含波动率在期权市场发挥着重要作用，下面进一步探讨对隐含波动率曲面的构建。

1.2.2 隐含波动率曲面建模

隐含波动率曲面是使用一组离散的隐含波动率数据，针对不同的行权价和到期日构建的。期权隐含波动率曲面可分为两个方面：一是不同到期日的合约呈现出的期限结构，二是相同到期日但不同行权价的合约呈现出的“微笑”或倾斜形态。后续研究针对Black-Scholes模型进行改进，纷纷对隐含波动率曲面采取新的方法进行构建，典型的建模方法有以下几种：随机波动率模型、局部波动率模型、参数或半参数模型、Levy过程（包括跳跃扩散模型）、对隐含波动率的动态直接建模、专门的插值方法等。这些方法中都会隐式或显式地嵌入无套利的条件以保证对市场的适用性，下面主要针对前三类模型进行讨论，分别针对各类模型进行讨论。

（1）随机波动率模型。

用随机波动率模型来拟合市场实际的数据集是一类广泛的方法， Heston

和SABR模型以及它们的扩展形式是最常见的两种随机波动率模型，能得到无套利的过程来构建隐含波动率曲面。这两种模型的扩展形式中具有时间相关的参数，允许在行权价和时间方向上执行校准。使用时间相关参数的主要缺点是计算成本增加，因为在许多情况下没有解析解，在求解参数时必须使用数值解。然而，对于Heston模型和SABR模型，可以使用解析近似值来缓解这个问题。

Heston （1993）模型放弃了 Black-Scholes模型中波动率是常数的假设，他认为波动率服从一个随机过程，具有均值回归的特点，而且波动率的平方，也就是方差，遵循Cox-Ingersoll-Ross （CIR）过程，该模型利用对特征函数的傅里叶变换，可以得到期权价格的解析解。Heton模型的缺点在于它只有一组参数，通常不足以很好地匹配不同到期时间相对应的市场数据。因此，考虑时间相关参数的想法被提出来。当把时间参数考虑为分段常量时，仍然可以使用马尔可夫论证结合仿射模型（Elices，2007）推导出递归闭合公式，但用时仍比较久。Benhamou等人（2010）使用波动率扩展的小波动率和Malliavin 微积分技术，为任意时间的 Heston 模型推导出普通期权价格的解析解。与基于傅立叶的方法相比，在不降低准确性的同时，这种方法可以将估值加快 100 倍以上。

SABR模型，全称是“Stochastic-Alpha-Beta-Rho”，由Hagan等人（2002）提出，和Heston模型类似，也摒弃了波动率为常数这一看法，SABR模型假定标的资产的远期价格是随机过程，同时也假设隐含波动率是随机过程。其中前者的变动受自身和标的资产波动率的影响，而波动率变动仅受波动率自身和参数影响。SABR模型存在解析解。Henry-Labordere（2008） 在论文中介绍了 SABR的扩展形式（称为 lambda-SABR）和相应的渐近近似，该模型的参数λ为 0 时退化为原始SABR模型。

随机波动率模型都是在Black-Scholes模型基础之上的修改，对波动率都是假设服从连续的随机过程。随机波动率模型的缺点在于其参数数量多，而且模型比较复杂，此外，模型中的参数通常是非线性的，并且难以通过标准的最小二乘法估计，因此在模型拟合和数值优化方面需要更多的工作。

（2）局部波动率模型。

另外一个重要的研究工具是局部波动率模型。在这类模型中，波动率被

表达为时间与标的资产的确定函数。Dupire, Derman等人在差不多的时间内提出了局部波动率模型。Dupire（1994）提出了Dupire公式，将局部波动率表示为有关期权市场价格、行权价、到期时间的三元方程。在 Gyöngy（1986）的研究基础上， Derman和Kani（1994）提出了一种新的二叉树模型。另外，Rubinstein （1994）将局域波动率分解为三元映射，并利用隐含树方法为构造局部波动率曲面提供了一种计算手段。然而， Rebonato（2005）的经验数据表明，隐含树方法收敛速度效果不好，且在样本量之外的结果也不理想。所以，Dupire的理论分析方法受到了学术界和工业界的青睐。但是因为 Dupire提出的解析法是以期权价格为基础的，而期权交易更多是以隐含波动率而不是期权价格为基础的，所以Kotzé（2015）根据市场的交易习惯，给出了以隐含波动率为基础的局部波动率解析公式。

局部波动率模型仍然假设波动率是连续的过程，无法很好地捕捉价格跳跃的特征，而现实市场中价格跳跃是一个普遍存在的现象，使得局部波动率模型在实际市场中的预测效果受到限制。

（3）参数化模型。

参数化模型一般是先提出关于隐含波动率的参数化公式，再基于市场实际离散数据和优化方法得到参数估计，将参数带回参数模型构建隐含波动率曲面。参数化模型具有更高的灵活性，可以适用于更广泛的市场。

有不少学者提出过各类参数化模型。Dumas（1998）提出将隐含波动率曲面建模为期权的价值状态的二次函数，Borovkova（2009）在石油市场中尝试了这一假设，结论是该模型只能给出平均形状，因为对于所有的到期日，波动率和价值程度的关系都相同。为了解决这一问题，Borovkova提出了一种半参数的方法，对于每个到期日，保持了隐含波动率的二次参数化，并加入了和时间有关的系数。然而，该方法并不能确保所构造的波动率曲面具有非套利性，且无法准确刻画波动率曲面的动态变化。郑振龙（2017）基于隐含波动率的“微笑”特征和期限结构，建立了一个新型的半参数模型，该模型用到了 9 个具有实际经济意义的参数，分别是期权的在值程度和剩余期限的水平、斜率、曲度和交互因子，该模型不仅能很好地拟合现实数据，也被证明在预测未来波动率曲面的效果是不错的。

参数化模型中应用最广泛的是Gatheral（2004）提出的SVI模型。对于不

同的到期日，SVI模型用双曲线来拟合隐含方差曲面。虽然 SVI模型能够更好地拟合隐含波动率曲线的形状，但是这个模型并没有研究如何避免日历价差套利和蝶式价差套利，后来学者主要针对这一点进行了改进。Gurrieri（2010）推导出一组SVI模型的参数满足无日历价差套利的条件，扩大了SVI模型的适用范围。Gatheral和Jacquier（2014）进一步拓展了 SVI模型的参数设定，分别建立了自然 SVI模型、跳跃 SVI模型以及 SVI曲面模型，并给出了无蝶式套利和日历套利的显式条件。庄颖（2018）基于半参数 SVI，将原有的对数执行价替换为对数执行价格以及剩余期限的一种特定组合，建立了新的规避跨期套利的半参数 SVI，使得其更加灵活、精确地构造出隐含波动率曲面。Martini和Mingone（2021）通过对SVI 参数的自然重新缩放和 Durrleman 条件的细致分析获得了参数的简单范围条件，提出了在无套利域上直接执行最小二乘法，其结果与实际交易数据高度一致，且能够确保形成无蝶式套利情形下的微笑曲线。

对SVI模型的另一个主要讨论点是模型校准方面，选择何种形式的损失函数往往根据市场数据和实际需求。De Marco在 2009 年提出了一种基于参数降维的准显示校准方法拟合Gatheral的SVI模型中隐含方差，通过该方法计算的参数比较可靠和稳定。Nagy和Ormos（2019）提出最小化Vega值加权隐含波动率的绝对值损失函数，能够解决期权流动性不足时波动率曲面不稳定的问题，且L1 范数的形式足够简单。Damghani和Kos（2013）在构建无套利波动率曲面时则是最小化观测波动率和拟合波动率之间的平方损失函数，而Homescu （2011）建议采用最小化隐含方差（隐含波动率的平方）的实际值和拟合值之间的平方损失函数，且在求解过程中延续了De Marco（2009）提出的使用一段时间内总隐含方差的平方损失函数最小化的方法。对于损失函数的形式，目前仍有一些改进的空间，适用于我国期权市场的形式有待补充。

SVI模型具有许多优点，例如计算时间短、相对较好地拟合深度实值和深度虚值期权的隐含波动率、模型形式简单。Gatheral和Jacquier（2014）证明了随着期权到期期限增大，Heston 随机波动率模型的波动率曲线会趋近于SVI 模型，说明 SVI可以模拟出与随机波动率模型相似的波动性曲线，进一步扩大了 SVI 模型的理论效应和应用范围。而在SVI模型参数校准方面，也有不同学者提出了不同的目标函数形式，涵盖了绝对值损失函数、平方损失

函数等多种类型，本文也将着重研究SVI模型，并在目标函数的形式上进行改进，重点讨论加权的平方损失函数，补充现有形式的空白。

1.2.3 期权套利策略

期权市场的统计套利策略主要分为两类。第一类是以期权平价公式为基础的无风险套利策略，重点是对看涨期权和看跌期权以及现货之间价差的不合理性进行研究，然后在此基础上展开无风险套利。这类策略的利润空间逐渐减小，但是，其收益只依赖于期权的价格，盈利逻辑比较直接。

在各类市场中，市场有效运行的前提下，基于期权平价公式的套利策略都有一定的机会，但很少或者出现后很快消失。Lee和Nayar（1993）以期权平价公式为基础，探讨了S&P500 指数期权的交易策略，结果是期权在市场中虽存在定价误差，但是很少有机会得到套利。Draper（2002）对伦敦市场的 FTSE-100 欧洲指数期权进行了研究，他的结果表明面临交易成本的交易者使用期权平价公式进行套利的利润集中在平值期权中，但机会通常会在不到 3 分钟内迅速消失，证实了伦敦国际金融期货和期权交易所市场是有效的。吕家彦（2015）以期权平价理论为基础，对港交所H股股指期权进行实证研究，给出了套利机会的详细分布，发现套利机会主要集中在早盘开盘后和午盘收盘前，而盘中的套利次数相对较少，套利机会在日内交易时间呈现U形分布。王堃（2015）在上证 50ETF期权刚上市的时候利用期权平价理论分析了三个月的数据，结论是市场中存在的套利机会并不多，而且一旦存在，就会被兑现。王堃表示尽管上证 50 ETF期权表现出了良好的定价效果，但市场中仍然存在着一些套利空间。山磊（2016）等人通过分析期权价格的性质，利用期权价格的凸性进行无风险套利，当某一期权合约价格偏离其凸性不等式时，套利机会产生，其策略在上证 50ETF期权市场有机会。 Zhang和Watada（2019）在对上海证券交易所 （SSE） 交易的首批中国 50ETF 期权合约分别采用认沽平价套利、箱式价差套利和边界套利策略进行研究时发现，当考虑交易成本时，套利机会是存在的但并不频繁。在箱式价差套利和边界套利策略方面，获利套利机会的比例较低。流动性相对较差、交易不活跃的期权出现更多的套利机会。

另一类期权套利策略则是基于期权的隐含波动率。利用对波动率的估计和预测等方法，对期权价格进行判断，在适当的时候，构建一个期权组合来进行套利，这一类型的策略拥有比基于期权平价公式的策略更多的机会，但是，该类策略的获利情况取决于很多因素，比如隐含波动率的计算方法、投资组合的构造方法等。赵建和薛奕达（2009）通过波动率指数构建了一种期权对冲策略，能挖掘出市场上隐含波动率被高估或者被低估的期权，对这些期权进行买卖并用标的现货进行对冲，在香港恒生指数期权数据上进行了实证，结果显示该策略能敏锐发现市场的误差并进行盈利。Nasekin（2019）提出了一种基于动态半参数因子模型的统计套利策略，根据模型与观察到的杠杆ETF期权隐含波动率曲面的对比生成交易建议，证明了该策略很有可能产生正的收益，还将 Heston模型纳入了策略的价值状态缩放环节，提高了模型的便捷性。前两个研究基于对隐含波动率的拟合，而后面介绍的两个研究侧重于用模型来预测未来的波动率。Can和Fadda（2014）使用神经网络对隐含波动率进行预测，其预测值与真实值的MSE最小为 0.0116，能够准确预测未来的波动率，使投资者能够在预期市场趋势变化的情况下建立适当的策略进行套利。波动率指数 （VIX）被许多市场参与者视为衡量市场风险和投资者情绪的常用指标，Osterrieder（2020）讨论了一种通过仅使用最具流动性的期权的子集来预测日内 VIX 的新方法，将以往需要 350 个期权复制VIX指数减少到 10 个期权，用具有一个 LSTM 层的神经网络的输入特征时便可以以 61.2% 的准确度预测 VIX，从而更容易进行套利。

以上文献综述介绍了关于期权套利策略的不同研究。这些研究主要探讨了从期权价格和隐含波动率对两方面进行套利交易，前面的研究表明运行时间较久的期权市场基于期权价格的套利空间逐渐缩小，未来的研究主要集中在期权波动率的套利策略上。对套利策略的研究，一方面可以帮助投资者在市场中获得利润，另一方面对于纠正市场失灵、提高市场运行效率具有重要意义。

1.3 研究内容与创新点

本文旨在研究如何使用SVI模型构建准确的期权隐含波动率曲面，并基

于该曲面设计有效的期权套利策略，进而提高期权交易的收益和效率，促进期权市场的进一步发展与完善。本文的主要研究对象是沪深 300 股指期权。首先是对SVI模型进行完善，主要考虑到不同价值状态期权的差异性，着眼于SVI模型目标函数的重新设计，对其进行加权的处理，增强模型对波动率曲面的拟合精度。其次是套利策略的设计，基于改进后的SVI模型对期权波动率曲面拟合的研究成果，提出有效的交易策略与风险控制方法。

从前人的研究来看，之前的SVI模型拟合期权隐含波动率曲面时往往没有考虑到不同价值状态的期权的重要性差异，加权的平方损失函数形式还不曾有人研究。而本研究则引入了反正切函数加权、高斯密度函数加权和基于期权Vega值的加权 3 种方案，应用于目标函数的设计中。通过在沪深 300 股指期权市场的实证研究中对比不同加权方案的拟合效果，结果表明基于期权Vega值的加权方案对模型的拟合效果具有显著提升作用。

此外，本研究利用SVI模型设计了两种期权套利策略，还验证了Vega加权SVI目标函数对策略的提升作用，Vega加权的方案通过对期权隐含波动率曲面的准确拟合，实现了套利策略收益的提升和风险的降低。

综上，本研究提出了一种基于期权Vega值的加权方案，能够显著提升SVI模型拟合期权隐含波动率曲面的效果，并且在实际的套利交易中能够有效提升收益和降低风险。这种方案具有一定的创新性和实际应用价值。

1.4 研究方法

本文采用的研究方法有理论分析、实证研究、数学建模等。

首先，通过阅读相关文献、参加培训课程、与专家进行沟通对期权隐含波动率曲面、SVI模型、期权套利策略进行研究，学习其原理和用法。

其次，进行数据收集，收集期权的合约信息和日线行情数据，并将其整理为适合研究的格式。之后进行模型构建，通过对市场数据的实证分析来了解期权隐含波动率曲面的变化情况，并使用SVI模型来拟合期权隐含波动率曲线，评估其准确性和稳定性。

然后，进行套利策略设计。根据SVI模型的拟合结果和市场行情，设计适合的期权套利策略，并进行回测和优化，这可以帮助确定策略的可行性和

风险。根据套利策略的实施情况和市场变化，进行对应的风险管理，实时调整仓位和风险控制措施，保证投资组合的稳定性和收益。

最后是结果分析。将套利策略的表现和收益情况进行分析，总结SVI模型在期权交易中的应用价值，并对未来的研究方向提出建议。

1.5 本文结构

本文总共分为六章， 结构安排如下：

第一章是绪论。对论文的选题背景及研究意义进行了阐述，以及国内外对隐含波动率曲面、期权套利策略的研究现状，给出本文的研究目的。

第二章进行期权定价模型和隐含波动率曲面建模的理论介绍。包含期权的基础知识、Black-Scholes期权定价模型、隐含波动率的含义和“微笑”、倾斜、期限结构等特征，并阐述了用SVI模型进行隐含波动率曲面建模的原理，包括SVI模型的数学公式和参数的含义、参数估计的方法。

第三章从统计套利基本思想出发，介绍统计套利常用方法，引出期权套利策略的原理和方法分类，并给出常见风险管理的措施。

第四章着眼于SVI模型参数估计中对目标函数的改进和优化进行重点研究。具体优化方法是对不同类型的期权赋予不同权重，使SVI的目标函数形式更加符合市场实际情况，提升拟合效果，并进行了实证研究。

第五章是期权套利策略的实证部分，选取沪深 300 股指期权进行分析，基于SVI模型构建的隐含波动率曲面，结合期权套利策略的原理和实现方法，利用期权隐含波动率曲面来识别期权套利机会，设计单期权交易策略、Delta中性对冲策略，验证SVI模型拟合期权隐含波动率曲面在期权套利策略中的效果，以及目标函数优化后对策略效果的提升作用。在量化平台上对策略进行回测，进行收益评价，对策略进行分析和总结。

最后第六章对本文研究内容进行总结和展望。

2 期权定价和隐含波动率曲面建模

本章首先对期权的基本概念进行介绍，包括其定义、分类和交易方式，让读者对期权有一个大概的了解。接着阐述期权定价的重要性以及Black-Scholes期权定价模型，在此基础上引出期权的重要性质——隐含波动率，说明期权隐含波动率的含义和特征，随后构建隐含波动率曲面，并重点展示利用SVI 模型描述期权隐含波动率曲面的基本原理和SVI模型的参数估计方法。

2.1 期权基础知识

期权是一种金融衍生品，它授予持有人在一个约定的时间或之前可以按照约定的价格购买或出售某种特定资产的权利。这个约定的时间叫做到期日，或者是行权日，也是期权合约的最后交易日期。约定的价格被称为行权价，或者执行价。期权具有内在价值和时间价值，其内在价值是指行权价与标的资产市场价格之间的差额，时间价值是指期权价格超过其内在价值的部分，随着到期日的临近而逐渐减少，直到到期日期权的时间价值为零。

根据不同的标准，期权可以分成不同的类别。按照标的资产的不同类别，期权可分为外汇期权、利率期权、股票期权、股指期权、商品期权等。按照持有人的权利，可分为认购期权和认沽期权。其中认购期权授予持有人在到期日或之前以行权价购买某种资产的权利，又称看涨期权；而认沽期权则授予持有人在到期日或之前以行权价出售某种资产的权利，又称看跌期权。按照行权价与标的资产的价格关系，期权还可以分为实值期权、平值期权、虚值期权。实值期权指的是具有内在价值的期权，即立即行权可以获得正收益的期权，包含行权价小于当前标的价格的认购期权和行权价大于当前标的价格的认沽期权；平值期权指的是行权价等于当前标的的期权，平值期权的内在价值为零；虚值期权则是立即行权会产生负的现金流，包含行权价大于当前标的价格的认购期权和行权价小于当前标的价格的认沽期权，其内在价值是负数。

期权交易的方式和市场有多种，其中主要包括场内和场外交易。场内交易是指在交易所上市交易的期权合约，也称为交易所交易期权。场内交易的期权由交易所提供撮合交易服务，交易流程透明，成交价格公开，流动性好，交易规则和制度比较统一，投资者交易和结算过程比较简单。场内交易的期权通常采用标准化合约，投资者可以根据自己的需求选择合适的期权合约进行交易。目前全球比较有影响的场内期权市场有美国芝加哥期权交易所（CBOE）、欧洲期货交易所（Eurex），国内有中国金融期货交易所（CFFEX）等。场外交易也称为场外期权交易，场外交易是指由金融机构（如银行、证券公司等）提供的非标准化期权合约，由买方和卖方协商确定交易条件，包括期权类型、标的资产、行权价格、到期时间等。场外交易的期权具有灵活性，可以满足投资者的特殊需求，但流动性相对场内交易较差，交易过程不太透明，交易双方之间需要自行处理结算和风险管理。场外期权市场是非常庞大的，主要参与者包括投资银行、对冲基金、保险公司等专业机构，而个人投资者很少直接参与。除了场内交易和场外交易，还有一些其他的期权交易市场，例如股票期权的交易可能会发生在股票交易所的附属机构中，也可能由公司内部进行交易。这些交易方式的特点各有不同，投资者可以根据自己的需求和情况选择合适的交易方式和市场。

2.2 期权定价模型

进行期权定价的主要目的是确定期权的公允价格，即合理的市场价格。了解期权的公允价格可以帮助买方和卖方更加准确地估值，避免因为误判市场价格而蒙受损失。期权定价还可以帮助投资者进行期权交易策略的设计和风险管理。期权价格的变化与市场波动率、标的资产价格、期权到期时间等因素密切相关，了解期权的定价模型和定价原理，可以帮助投资者更好地制定期权交易策略，对期权价格和投资组合进行风险管理和控制。期权定价在金融市场中也有重要的理论和实践价值，可以帮助人们更好地理解金融市场的运行机制，促进金融市场的稳定和健康发展。实际应用方面，期权定价模型也可以被广泛用于金融工程领域的金融产品设计、风险管理等方面。

期权定价理论是金融学中的一个重要分支，通过建立合理的数学模型，

帮助投资者、金融机构和学者理解期权市场的价格形成机制，促进期权交易的发展和市场的健康稳定。

2.2.1 Black-Scholes模型

目前，Black-Scholes模型是较为主流的期权定价模型，Black-Scholes模型具有模型简单、计算速度快的优点，可以很好地解决欧式期权的定价问题。并且Black-Scholes模型是在随机过程和偏微分方程等数学工具的基础上建立起来的，具有较为扎实的理论基础。这种基础使得模型能够较为准确地预测未来股票价格的变化，从而对期权的定价提供更有说服力的依据。所以，下文重点对Black-Scholes模型进行研究和分析。

Black和Scholes在 1973 年提出了Black-Scholes期权定价模型，用于计算欧式期权的理论价格。该模型是金融学领域的里程碑式成果之一，为金融衍生品定价提供了一种有效的方法，在经过修改和完善后获得诺贝尔经济学奖。

Black-Scholes模型的提出是在假设股票价格服从几何布朗运动的基础上。该模型有七条假设条件，包括：

（1）期权寿命期内，无风险利率是恒定不变的。

（2）标的资产的价格遵循随机游走，服从对数正态分布。

（3）标的股票在期权有效期内没有股利、分红等其他所得。

（4）期权只能在到期日行权，不可提前行权。

（5）市场的交易没有成本，在购买或出售资产时没有手续费，也不存在税收。

（6）投资者可以以无风险利率借出或借入任意数量的资金。

（7）市场允许卖空，即使投资者手里没有资产，也可以卖出资产获得该资产当天价值的资金。

在这些假设的基础上，根据风险中性定价原理，利用随机微积分和偏微分方程的方法，建立了一个可以计算期权理论价格的模型，根据Black-Scholes模型，欧式看涨期权的理论价格为：

$$C(S,t) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \tag{2-1}$$

其中，$C(S,t)$期权在时刻t的价格，S代表标的资产在时刻t的价格，K代

表期权的行权价，r代表无风险利率，T代表期权到期时间，d_1和d_2分别为：

$$d_1 = \frac{ln\frac{S}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma \times \sqrt{T - \mathrm{t}}}$$

$$d_2 = \frac{ln\frac{S}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma \times \sqrt{T - \mathrm{t}}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - \mathrm{t}}$$

其中，σ表示标的资产的波动率，$\Phi(d)$表示标准正态分布的累积分布函数。

根据期权的平价公式$\mathrm{C} - \mathrm{P} = \mathrm{S} - \mathrm{K}e^{-r(T-t)}$，可以得到看跌期权的价格：

$$P = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1)$$

Black-Scholes模型的优点在于，其使用简单、计算快速，且基于严格的数学推导和假设，使得其在金融市场中得到广泛的应用和接受。然而，Black-Scholes模型也有其局限性，例如对于美式期权和其他非欧式期权的定价能力有限，以及对市场波动率变化等因素的适应性较差。Black-Scholes模型的出现，不但为期权定价问题提供了思路，也促进了金融工程的发展。这个模型成为了许多其他金融衍生品定价模型的基础，也成为了投资者和交易员在实际交易中进行风险管理的工具。

Black-Scholes模型给出了期权价格的数学表达式，也确定了期权价格的主要风险来源，下一节将进行探讨。

2.2.2 期权风险因子

根据Black-Scholes期权定价模型，期权价格主要取决于标的资产价格、行权价格、剩余期限、波动率、无风险利率五个因素，在这些变量中，除了行权价是常量外，其他任一因素的变化都会造成期权价值的变化，也给期权带来了投资风险，因此衍生出了Delta(Δ)、Gamma(γ)、Theta(θ)、Vega(υ)、Rho(ρ)五个希腊字母作为期权价格的敏感性指标来估计这些风险，每个希腊字母都衡量期权价格对给定基础参数（如基础资产价格）价值变化的敏感性。

接下来对每个希腊字母进行详细介绍。

（1）Delta(Δ)

Delta是期权价格对标的资产价格的敏感性指标。它描述了在标的资产价格变动时，期权价格的变化情况。Delta的数学定义为期权价格对标的资产价格的一阶偏导数，可以表示为：

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

其中，V是期权价格，S是标的资产价格。假设一个看涨期权的Delta为0.5，意味着如果标的资产价格上涨 1 单位，期权价格将上涨 0.5 单位；反之，如果标的资产价格下跌 1 单位，期权价格将下跌 0.5 单位。对于看涨期权，Delta的取值范围为 0 到 1 之间；对于看跌期权，Delta的取值范围为-1 到 0 之间。当标的资产价格上涨时，看涨期权的Delta值将接近 1，而看跌期权的Delta值将接近 0。相反，当标的资产价格下跌时，看涨期权的Delta值将接近 0，而看跌期权的Delta值将接近-1。

（2）Gamma(γ)

Gamma是Delta对标的资产价格变动的响应率。它描述了Delta本身的变化情况，也就是Delta对标的资产价格变化的敏感度。Gamma的数学定义为期权价格对标的资产价格的二阶偏导数，可以表示为：

$$\gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

Gamma值越高，期权价格对标的资产价格的变化就越敏感。假设一个看涨期权的Gamma为 0.2，意味着如果标的资产价格上涨 1 单位，Delta将上涨 0.2 单位。对于看涨和看跌期权，Gamma的取值范围均为正数。当标的资产价格发生小幅波动时，Gamma值较高的期权价格变化更为剧烈，从而带来更高的交易风险。

（3）Theta(θ)

Theta是期权价格对时间剩余期限的敏感性。它描述了期权价格在时间流逝时的变化情况。Theta的数学定义为期权价格对时间的一阶偏导数，可以表示为：

$$\theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

其中，t是时间。若一个看涨期权的Theta为-0.05，意味着随着时间的流逝，期权价格每天将下跌 0.05 单位。对于看涨和看跌期权，Theta的取值范围

均为负数。当期权离到期时间越近时，Theta值越低，期权价格对时间变化的影响也越小。换言之，随着时间的推移，期权价格将不断下降，这种价值损失也称为时间衰减。

（4）Vega(υ)

Vega是期权价格对波动率的敏感性。它描述了当标的资产价格波动率变化时，期权价格的变化情况。Vega的数学定义为期权价格对波动率的一阶偏导数，可以表示为：

$$\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

其中，σ是标的资产价格的波动率。若一个看涨期权的Vega为 0.1，意味着如果标的资产价格的波动率上涨 1 个百分点，期权价格将上涨 0.1 单位。对于看涨和看跌期权，Vega的取值范围均为正数。当波动率上升时，Vega值较高的期权价格变化更为剧烈，从而带来更高的交易风险。尤其是在不确定性较高的市场条件下，如政治危机或金融危机等，波动率可能会剧烈上升，从而使得Vega值较高的期权价格变化更为剧烈。

（5）Rho(ρ)

Rho是期权价格对无风险利率的敏感性。它描述了当无风险利率变化时，期权价格的变化情况。Rho的数学定义为期权价格对无风险利率的一阶偏导数，可以表示为：

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$$

其中r是无风险利率。假设一个看涨期权的Rho是 0.3，这意味着如果无风险利率上升 1%，看涨期权的价格将上升约 0.3 元。对于看涨和看跌期权，Rho的取值范围均为正数。当无风险利率上升时，Rho值较高的期权价格变化更为剧烈，从而带来更高的交易风险。在高利率环境下，Rho值较高的期权可能更具吸引力。不过市场的无风险利率一般变化不大，所以Rho不是期权风险的主要考虑对象。

将这五个希腊字母的计算方式和含义总结在表 1 中，如下所示：

表 1 希腊字母计算方式及含义

希腊字母	计算方式	含义
Delta(Δ)	$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$	资产价格变动对期权价格的影响
Gamma(γ)	$\gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$	资产价格变动对Delta的影响
Theta(θ)	$\theta = \frac{\partial V}{\partial t}$	时间变化对期权价格的影响
Vega(υ)	$\upsilon = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$	波动率变化对期权价格的影响
Rho(ρ)	$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$	无风险利率对期权价格的影响

这些希腊字母风险因子可以帮助更好地了解和管理期权的风险，也为量化交易和套利提供了重要的工具和方法。将在后文SVI模型的目标函数加权和套利策略的设计中起重要作用。

2.3 隐含波动率

期权的重要性质之一隐含波动率也是由Black-Scholes模型反推出来的。

2.3.1 隐含波动率的含义

Black-Scholes模型中，期权价格与波动率、标的资产价格、行权价格、无风险利率和期权到期时间等参数有关。因此，当我们已知市场中期权的实际价格、标的资产价格、行权价格、无风险利率和期权剩余期限时，可以通过Black-Scholes模型求解出对应的波动率，称为期权的隐含波动率。隐含波动率使得期权的理论价格与实际价格相同。

在实际应用中，隐含波动率是一个非常重要的参数。它可以用来衡量市场对未来波动率的预期，举例而言，如果隐含波动率较高，则期权价格可能会更大，因为市场预期期权的标的股票将会有更大的波动。相反，如果隐含波动率较低，则期权价格可能较低，因为市场预期期权所涉及的标的股票将会有较小的波动。隐含波动率还可以用来对期权价格进行定价。在金融市场

中，期权交易员、投资经理等需要经常计算隐含波动率来进行交易和风险管理。

根据Black-Scholes模型，波动率跟标的股票相关，而跟期权本身无关，对于同种标的股票的不同行权价的期权，如果到期期限相同，应有相同的隐含波动率，但事实并非如此。实际中，期权的隐含波动率呈现出“微笑”、倾斜、期限结构等特征。

2.3.2 隐含波动率的“微笑”、倾斜、期限结构

隐含波动率的微笑结构指的是期权隐含波动率随着行权价格的变化而变化的特征，因其图像形似一张微笑的嘴而得名。在期权标的、到期期限相同的情况下，随着行权价偏离标的股票价格越远，隐含波动率越大，也即实值期权和虚值期权的波动率大，平值期权的波动率小，形成两端大，中间小的“微笑”形状。

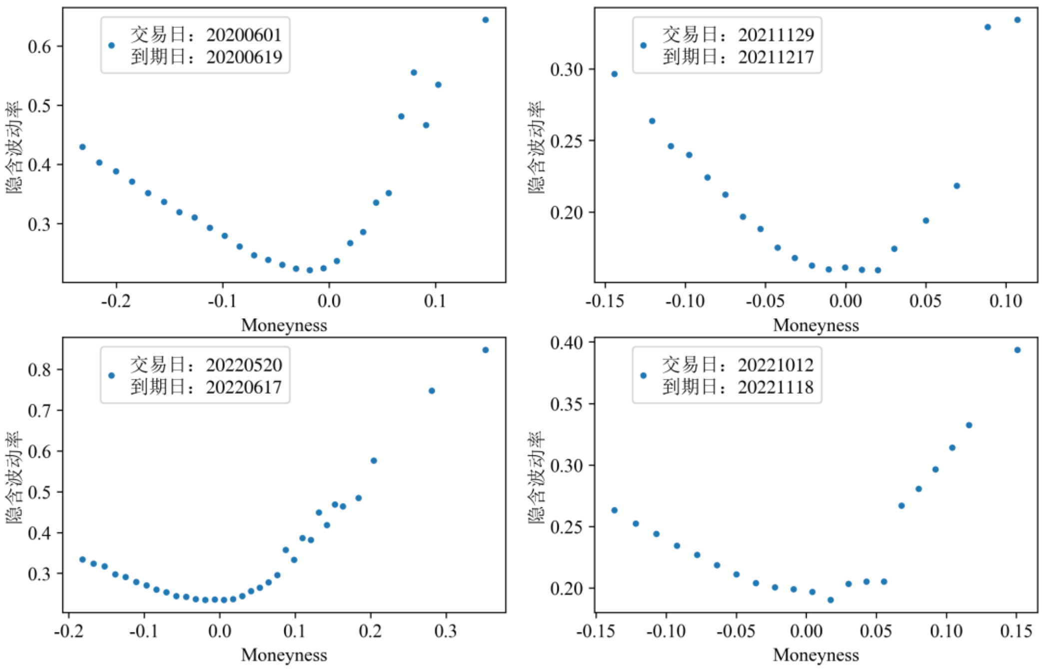

图 2 隐含波动率的微笑

期权的价值状态（Moneyness）的数学表达式是$\log(K/S)$，其中K是行权价，S是标的资产的价格。价值状态这一数字可以很好地区分实值、平值、

虚值期权，反映行权价与标的价格的关系，在标的资产相同时，比较行权价的大小可以转化为比较价值状态的大小。其中平值期权的价值状态为 0，代表其行权价与标的资产价格相等，实值认购期权和虚值认沽期权的价值状态小于 0，虚值认购期权和实值认沽期权的价值状态大于 0。以沪深 300 股指期权看跌期权的数据为例，以价值状态（Moneyness）为横轴，期权合约的隐含波动率为纵轴，绘制散点图，如上图 2 所示。观察到当行权价与股票价格相等，即价值状态为 0 时，隐含波动率最小，两端的实值或虚值期权的隐含波动率较高，呈现出波动率“微笑”的现象。

隐含波动性的偏斜指的是波动性曲线不对称的现象。在国外的成熟市场中，通常会出现的情况是，行权价越低，也就是价值状态越低，期权的隐含波动率越高，从而造成波动率曲线左侧高于右侧，也就是所谓的负向偏斜。这种负向偏斜的产生，是由于在指数跌落过程中，投资者的心理恐慌所致。如下图 3 所示，左边表示负向偏斜，右边显示沪深 300 指数期权不但存在着负向偏斜，而且也出现过正向偏斜，也就是在行权价越高的时候，波动率越大，而行权价越低的时候，波动率越小。

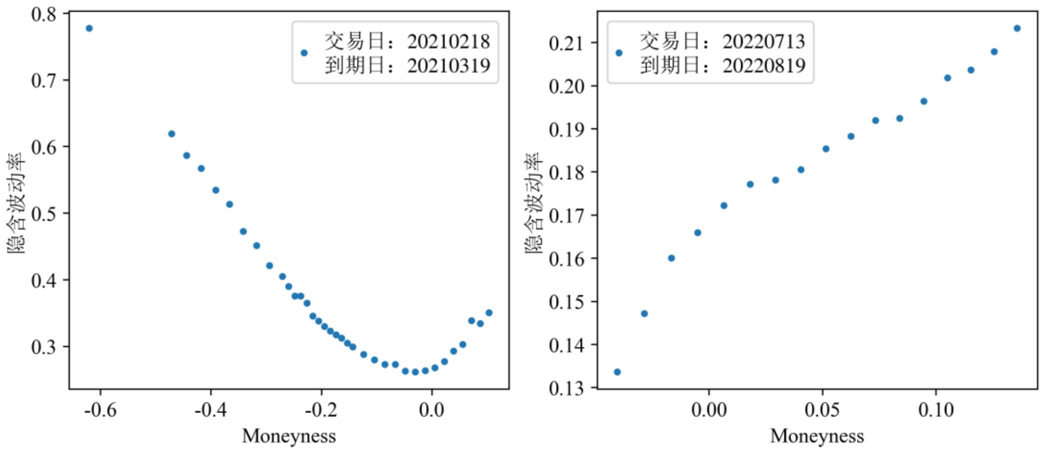

图 3 隐含波动率的倾斜

隐含波动率的期限结构指的是期权的隐含波动率跟随到期日的临近而变化的特征。在一般情况下，当行权价相同的时候，期权隐含波动率随着期权的期限越短，也即到期日的临近而逐渐增加。波动率“微笑”和倾斜特征也会随着期权到期期限的变化而变化，长期期权的这些特征不像短期期权表现那

么明显，所以，波动率曲面在到期期限较长的部分会变平坦。

期权的隐含波动率之所以会出现上文提到的“微笑”、倾斜和期限结构，而非Black-Scholes模型中固定不变的常数，其原因还是Black-Scholes的模型假设不符合实际。首先是关于标的资产价格的假设，假设条件标的资产价格变化呈几何布朗运动和收益服从对数正态分布有时不成立，资产价格并不一定是连续变动，而且有时会遵循跳跃进程，收益也可能是非对数正态的分布，例如会出现尖峰厚尾的情况。其次，Black-Scholes模型的前提条件是资产价格包含了所有信息（历史数据和现在公开的市场信息），但实际市场中一些行业信息、企业内部信息并不被所有投资者所知晓，会对市场产生一定的干扰，影响资产的价格。

2.3.3 隐含波动率曲面

隐含波动率曲面是指同一标的资产的不同到期期限和不同行权价格下，对应的期权隐含波动率构成的曲面。隐含波动率曲面可以更好地刻画期权的隐含波动率的微笑、倾斜和期限结构的特征。通常需要使用三维图形来表示，用横轴表示期权行权价或者价值状态，纵轴表示期权剩余期限，而第三个维度则表示对应的隐含波动率。

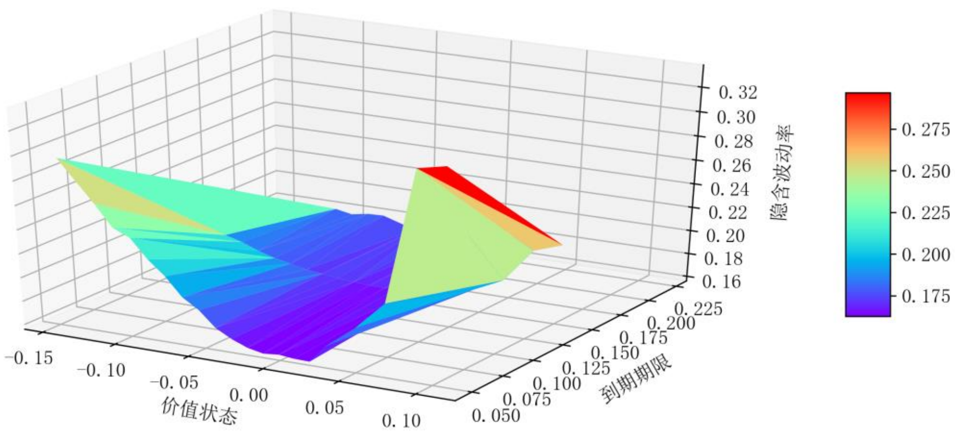

图 4 隐含波动率曲面

以 2021 年 11 月 29 日交易的沪深 300 股指期权为例，其隐含波动率曲面如上图 4 所示，可以看出在价值状态的维度上，隐含波动率表现出两边大，

中间小的特征，在到期期限的维度上，到期期限最小的期权隐含波动率最大。进行隐含波动率曲面建模可以帮助分析和理解市场的波动性，并为交易和风险管理提供重要的参考和工具。

常用的隐含波动率曲面建模方法有以下几类。第一类是基于随机波动率模型的隐含波动率曲面。该方法将波动率视为随机变量，对波动率建立数学模型，例如Heston、SABR等模型，来更好地描述市场波动性的特征。这种方法能够更准确地捕捉市场中的波动性。第二类是基于插值方法的隐含波动率曲面。插值法是一种将数据点之间的未知数值通过已知数据点的数值来近似估算的方法。在构建隐含波动率曲面时，常用的插值方法包括线性插值、二次插值、三次样条插值、Kriging插值等。插值法的优点在于可以利用已有数据快速生成曲面，但缺点是无法很好地解释曲面形状，并且对于过拟合的情况处理不当会导致模型不稳定。另外，参数化模型是目前应用较广泛的一种方法，其核心思想是用一组简单的数学公式来描述隐含波动率曲面，例如常见的SVI模型等。这些模型在拟合隐含波动率曲面时具有较高的精度和良好的解释性，而且可以通过调整模型参数来适应不同市场环境下的波动率曲面，因此被广泛应用于衍生品定价和风险管理中。

2.4 SVI模型基本原理

参数化模型是使用特定的参数化公式直接对隐含波动率曲面进行拟合，由于简单易行，算法复杂度低的特点，在业界得到广泛运用。参数化模型主要包括以下几种：多项式模型，SVI及其扩展模型等。其中以 SVI 及其扩展模型在实际中应用最广。SVI模型被证明是Heston模型一致的，加之其参数估计方便快捷，因此价值比较大。接下来将对SVI模型及其参数估计进行深入讨论。

SVI（Stochastic Volatility Inspired）模型是一种用于描述期权隐含波动率的参数化模型，最早被提出于20世纪90年代初。SVI模型通过参数化隐含波动率的曲线形状来描述波动率变化的情况，对市场上观察到的期权的隐含波动率“微笑”现象，SVI模型能够很好地拟合，自提出以来，一直被广泛应用于金融市场的定价和风险管理中，是一种重要的工具。

具体而言，对于交易日和到期日相同的期权，SVI模型将期权的隐含方差表达为如下所示：

$$v(x) = \sigma_{BS}^2 = a + b\left(\rho(x-m) + \sqrt{(x-m)^2 + \sigma^2}\right) \tag{2-2}$$

其中$x = log(K/S)$，一般称为价值状态。K是行权价，S是标的价格。a, b, ρ, m, σ是模型参数。

上面提到的 5 个参数a, b, ρ, m, σ分别代表了方差水平、左右渐近线角度、曲线方向、曲线水平位置、曲线顶点平滑程度。通过调节五个参数的值，能够使得不同情况下波动率曲线的微笑、倾斜等特征得到很好的刻画。

下面的图片给出了这 5 个参数是如何影响SVI图像的结构的。一组初始参数：$a = 0.04$，$b = 0.4$，$\rho = -0.4$，$m = 0$，$\sigma = 0.1$ 的SVI曲线在不同参数发生变化时的情况。

在其他参数不变的情况下，a变换可以使曲线整体上下平移，b变化可以让曲线左右的张角进行调整，ρ变化能调节对曲线的对称性，m变化能使波动率曲线左移或者右移，σ则控制了曲线端点处的平滑度，σ越大端点处越平滑。如下图 5 所示。

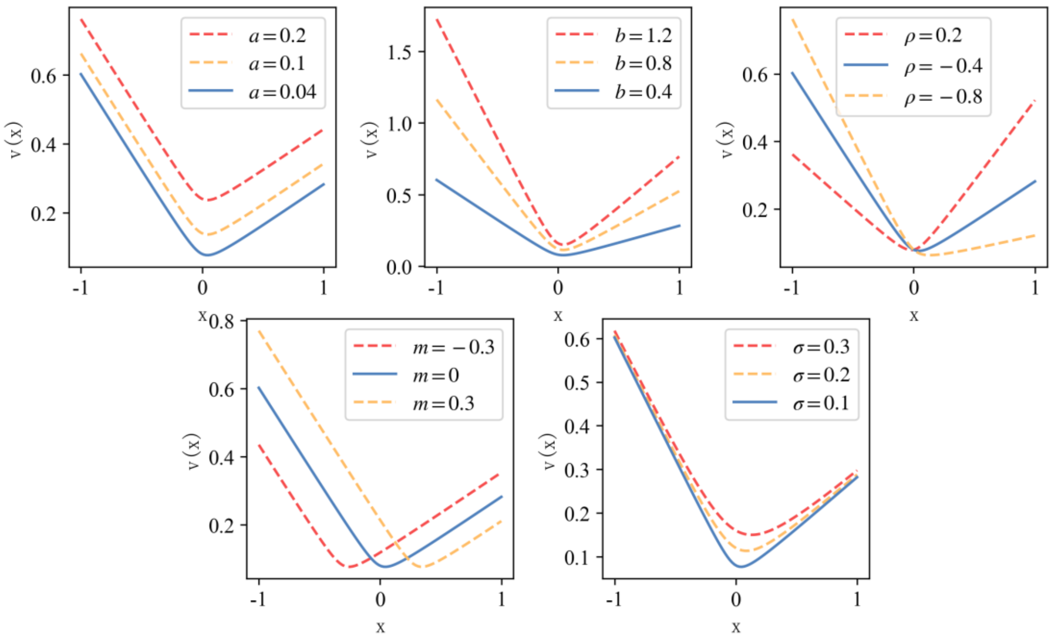

图 5 SVI模型中各参数变化情况

通过这 5 个参数的调整，SVI模型能够拟合各种情况下的波动率曲线。

SVI函数的左右渐近线的表达式分别为：

$$v_L(x) = \mathrm{a} - \mathrm{b}(1-\rho)(x-m),$$
$$v_R(x) = \mathrm{a} + \mathrm{b}(1+\rho)(x+m)$$

从上面的表达式可以看出，曲线两侧的隐含方差与价值状态近似是线性关系，该模型满足Lee[34]提出的动量公式，即认为方差在极端情况下会表现出接近线性的变换。此外，在到期日趋向于无穷大的时候，SVI模型与Heston模型的表达符合。这证明 SVI 对波动率曲线的拟合是近似于随机波动率模型的，但与此同时， SVI 模型求解时的算法复杂度比随机波动率模型要小得多。

2.5 SVI模型的参数估计方法

用SVI模型拟合市场数据的波动率曲线的核心问题是对模型包含的 5 个参数进行参数估计，其中最经典的方法是最小二乘法，最小二乘法虽然能得到良好的参数效果，但是由于参数众多，其运算效率不高，且对初值比较敏感。Zeliade提出了一种基于参数空间降维的Quasi-Explicit方法，具有对初始值不敏感的优点，并且参数也是稳健的，还能提高运算效率，下文将对这两种方法的步骤进行详细介绍。在此之前，先确定SVI模型中各参数的取值范围。

2.5.1 参数范围

（1）b, ρ的范围。

对于(2-2)所展示的SVI模型，首先假设参数b, σ, ρ满足：

$$b \geq 0，\sigma \geq 0, \rho \in [-1,1]$$

Rogers指出，消除动态套利需要对总的隐含方差$Tv(x)$的最大斜率加以约束，该条件如下：

$$\forall x, \forall T, |T\partial_x v(x)| \leq 4$$

在SVI模型中，可以转化为与b和ρ相关的不等式：

$$b \leq \frac{4}{(1+|\rho|)T}$$

（2）m的范围。

在$\rho^2 = 1$，$\sigma \to 1$的情况下，会得到方差的分段仿射函数。当$x < m$和$x > m$时，波动率分别为：

$$v(x) = a + b(\rho \mp 1)(x - m)$$

这种情况下，波动率曲线被拟合成仿射函数$v(x) = px + q$的形式，这在实际情况中是不太会出现的，尤其是对于距到期日较远的期权，与微笑特征相差甚远。如果$m > max\{x_i\}$，对上述函数的斜率p和截距q可以表达为：

$$b(\rho - 1) = p$$

$$a - bm(\rho - 1) = q$$

对于未知参数a, b, ρ,该方程组有无穷多解。而$m < min\{k_i\}$时，参数解也不是唯一的。

因此参数m需要满足条件$\min\{x_i\} < m < max\{x_i\}$.

（3）a，σ的范围。

对于a，理论上它是可以为负的，SVI模型拟合的波动率要为正，只需要a满足：

$$a \ \geq \ -b\sigma\sqrt{1-\rho^2}$$

但是假设$a < 0$且$\sigma \gg 1$，有：

$$v(x) = a + b\left(\rho(x-m) + \sqrt{\sigma^2 + (x-m)^2}\right)$$

$$= -|a| + b\rho(x-m) + b\sigma\sqrt{1 + \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}$$

$$\sim -|a| + b\rho(x-m) + b\sigma\left(1 + \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\sim_{|a|=b\sigma} b\rho(x-m) + b\,\frac{(x-m)^2}{2\sigma}$$

于是有：

$$\lim_{\sigma\to\infty, a\to-\infty, |a|=b\sigma} v(x) = b\rho(x-m).$$

对于x的任何值，这再次对应于仿射函数，其斜率和截距分别对应$b\rho$和参数m，参数b, ρ, m的解不是唯一的。所以a不能为负。

为了防止SVI模型在边界问题上不稳定，增强SVI模型拟合的稳定性，有如下约束条件：

$$0 < \sigma_{min} < \sigma$$
$$0 \le a \le \max\{v_i\}$$

给定σ一个最小值σ_{min}，且$\sigma_{min} > 0$，同时，使$a \ge 0$以避免$\sigma \to \infty, a \to -\infty$的极限情况。当然，很明显$a$不能大于市场数据观测到期权的最大方差$\max\{v_i\}$。

通过以上分析，得到参数的取值范围如下所示：

$$D = \left\{ (a,b,\rho,m,\sigma): \begin{cases} 0 \le a \le \max\limits_i\{v_i\} \\ 0 \le b \le \dfrac{4}{(1+|\rho|)T} \\ -1 \le \rho \le 1 \\ \min\{x_i\} \le m \le \max\{x_i\} \\ 0 < \sigma_{min} \le \sigma \end{cases} \right\} \tag{2-3}$$

后文对SVI模型进行参数估计时需满足该条件。

2.5.2 最小二乘法

最小二乘法是一种常用的参数估计方法，可以用来估计SVI模型的参数。该方法的基本思路是最小化实际观测值与模型预测值之间的差异，以得到最优的参数估计结果。在SVI模型中，最小二乘法可以用来拟合模型的曲线，从而得到模型的参数。

具体地，最小二乘法的步骤如下：

（1）定义损失函数：在SVI模型中，我们希望最小化实际观测值和模型预测值之间的平方误差，即：

$$min \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma_i^2 - v(x_i) \right)^2$$

其中，n是观测值的数量，σ_i第i个观测到的市场隐含波动率，$v(x_i)$是在给定参数a, b, ρ, m, σ下，根据SVI模型得到的在x_i处的拟合的隐含方差值。

（2）求解最小二乘估计量：最小二乘估计量是使损失函数最小化的参数值，即：

$$\hat{a},\hat{b},\hat{\rho},\hat{m},\hat{\sigma}=\arg\min_{a,b,\rho,m,\sigma}\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_i^2-v(x_i)\right)^2 \tag{2-4}$$

可以使用优化算法（例如梯度下降法、拟牛顿法等）来求解最小二乘估计量。

最小二乘法是一种简单易用的参数估计方法，不需要复杂的计算和推导。并且计算速度较快。但需要注意的是，最小二乘优化方法通常对参数的初始值有很强的依赖性。其次，找到一组最优参数也是困难的，因为一组完全不同的参数可能会拟合出相同的结果，都能将波动率的微笑拟合到位。因此，在做参数估计的时候，最大的问题是保证参数的稳健性，能够对不同的到期期限的期权隐含波动率都能拟合。

2.5.3 Quasi-Explicit Calibration

Zeliade提出了一种基于参数降维的Quasi-Explicit Calibration方法，具有对初始值不敏感的优点，并且参数也是稳健的。该方法将原问题中 5 个参数的求解分为两步，每一步分别求解 3 个参数和 2 个参数，进行降维处理，具有更高的求解效率，能改进最小二乘的缺点。

该方法有两个步骤，第一步是对(2-2)中的表达式进行参数变换：

$$y=\frac{x-m}{\sigma}$$

$$c=b\sigma$$

$$d=\rho b\sigma$$

得到如下式子：

$$v(y)=a+dy+c\sqrt{y^2+1} \tag{2-5}$$

上文(2-3)提到的参数范围 D 因此转化为：$D=\begin{cases}0\le c\le 4\sigma\\ |d|\le c\text{且}|d|\le 4\sigma-c.\\ 0\le a\le max\{v_i\}\end{cases}$

有了可行域之后，是进行参数估计的具体操作。

对于固定的m,σ，隐含方差取决于a,d,c三个参数，这样就成功地降维了。将实际的隐含方差和期权的价值状态代入上述公式，给定m,σ一组初始值，可拟合出参数a,d,c，具体方法为最小化如下所示的平方误差损失函数：

$$min \quad f(c,d,a) = \sum_{i=1}^{n} \left(a + dy_i + c\sqrt{y_i^2 + 1} - \sigma_i^2 \right)^2 \tag{2-6}$$

这是一个线性规划的凸优化问题，可行域 D 的所有约束都是线性的。这个问题有明确的解决方案，而且函数 f 是可微的凸函数，它的梯度仅在一个点为零，最优解有两种可能情况：

1）最优解在可行域 D 的内部，并且是全局最优解。

2）最优解在可行域 D 的边界上。

因此分为两步求解该优化问题：第一步，找到目标函数f的全局最小值，解线性方程$\nabla f = 0$，如果解在可行域 D 中，则已经找到最优解，停止。第二步，如果第一步找到的最优解不在可行域 D 中，那么寻找在可行域 D 中的使得f取得最小值的解，即求解$min_{\partial D} f$。第二步解决的约束优化问题可以通过对可行域 D 的每一边应用拉格朗日乘数法来解决，仅涉及3×3线性系统的解。一旦完成这两个步骤，就可以找到参数a, d, c的最优解，记为a^*, d^*, c^*。此时式(2-6)的优化问题成功解决，参数估计问题剩下如下所示的二维问题：

$$\min_{m,\sigma} \sum_{i=1}^{n} (v_{m,\sigma,a^*,b^*,\rho^*}(x_i) - \sigma_i^2)^2$$

这里可以采用$\mathrm{Nelder-Mead}$等优化方法找到最优m, σ。

对于 2.5.2 节中介绍的最小二乘法直接求解五个参数的方法，Quasi-Explicit Calibration首先是减少了初始值输入的数量，且对需要输入初始值的两个参数也降低了敏感，另外最终得到的参数结果更加稳健。

2.6 本章小结

本章首先从期权的基本概念出发，对期权这种金融衍生品进行了大致说明。接着介绍了Black-Scholes期权定价模型，将其假设条件、数学公式以及优势和局限性进行了详述，展示其在期权定价领域的突出贡献。基于Black-Scholes模型，衍生出了期权的风险因子，即五个希腊字母，本节阐明了五个希腊字母分别的计算方法和含义。还展示了隐含波动率的微笑、倾斜以及期限结构特征，并辅以实际数据的呈现。针对隐含波动率的特征，可以进行隐