第三章　　　　信号分析

§3.1 引言

信号具有时域特性和频域特性，本章讨论信号的频域特性，其目的一是掌握信号频域特性的分析，二是为系统的频域分析方法作准备。

分析方法的建立经历了一段漫长的历史，涉及到许多人的工作和许多物理现象的研究。

热的传播和扩散现象是导致研究的实际物理背景。在当时，这一问题本身就是十分有意义的。他在研究中已经涉及到象理性力学和天体力学这些当时在数学物理学方面最前沿的课题了。

到1807年，已完成了关于热传理论实质部分的研究，并于1807年12月21日向法兰西研究院提交了他的研究成果。在他的研究过程中，发现在表示一个物体的温度分布时，成谐波关系的正弦函数是非常有用的，另外，他还断言“任何”周期信号都可以用这样的级数来表示！虽然在这一问题上，他的论述是很有意义的，但是隐藏在这一问题后面的其它很多基本概念已经被其他科学家们所发现；同时的数学证明也不是很完善的，后来1829年P.L.狄里赫利(P.L.Dirichlet)给出了若干精确的条件，在这些条件下一个周期信号才可以用一个级数来表示，因此，并没有对级数的数学理论作出贡献，然而，他确实洞

察出这个级数表示法的潜在威力，并且在很大程度上正是由于他的工作和断言，才大大激励和推动着傅立叶级数问题的深入研究。另外，傅立叶在这一问题上的研究成果比他的任何前驱者都大大前进了一步，这指的是他还得出了关于非周期信号的表示——不是成谐波关系的正弦信号的加权和，而是不全成谐波关系的正弦信号的加权和。和傅立叶级数一样，傅立叶积分(或变换)仍然是分析LTI系统的最强有力的工具之一。

当时指定了四位著名的科学家和数学家来评审1807年傅立叶的论文，其中三位即S.F.拉克劳

就已经提出过的关于拒绝接受三角级数的论点。由于拉格朗日的强烈反对，傅立叶的论文从未公开露过面，为了使他的研究成果能让法兰西研究院接受并发表，在经过了几次其他的尝试后，傅立叶才把他的成果以另一种方式出现在“热的分析理论”这本书中。这本书出版于1822年，也即比他首次在法兰西研究院宣读他的成果时晚15年。

直到傅立叶的晚年，他才得到了某种应有的承认，但是对他来说，最有意义的称赞是他的工作已经在数学、科学和工程等如此众多的领域内产生的巨大影响。傅立叶级数和积分的分析在很多数学问题中都留下了他的足迹。很象最初在振

动问题和热传问题的研究中一样，在科学和工程领域中有大量的问题，正弦信号(从而傅立叶级数和变换)在其中起着很重要的作用。傅立叶级数的理论基础奠定之后，泊松(Poisson)、高斯(Gauss)等人把这一成果应用到电学中去。虽然在电力工程中，伴随着电机制造、交流电的产生和传输等实际问题的需要，三角函数、指数函数以及傅立叶分析等数学工具早已得到了广泛的应用，但是在通信系统中，普遍应用这些数学工具还经历了一段过程。因为当时要找到简便而实用的方法来产生、传输、分离和变换各种频率的正弦信号还有一定的难度.直到19世纪末人们才制

造出用于工程实际的电容器。进入20世纪以后，谐振电路、滤波器、正弦振荡器等系列具体问题的解决，为正弦函数与傅立叶分析的进一步应用开辟了广阔的前景。从此，人们逐渐认识到，在无线电技术的理论研究和实际应用中，采用频域分析法较之经典的时域法 有许多突出的优点。当今傅立叶分析法已成为信号分析与系统设计不可缺少的重要工具。

虽然傅立叶和他的同伴们原先的工作关注的仅是连续时间的现象，但是傅立叶分析的基本思想仍然可以推广到离散时间的情况，并且也为离散时间LTI系统的分析提供了极为有力的工具。

§3.2　周期信号的傅立叶分解

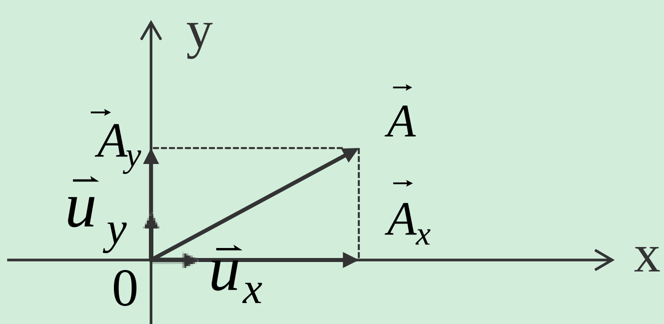
一、正交函数集

函数正交可以从矢量正交引申得来，因此首先来看矢量正交的概念。

两矢量 $\vec{A}_1, \vec{\;}$ 若满足

$$\vec{A}_1 \bullet \vec{A}_2 = 0$$

则称这两个矢量彼此正交。由这两个正交矢量构成的集合叫正交矢量集，由它们所张成的空间叫正交矢量空间。这样二维空间中的任一矢量就可以分解成两个彼此正交的分矢量的和。



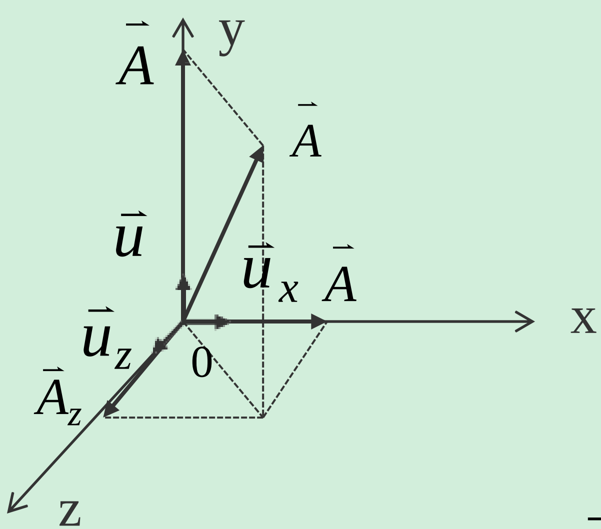
$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

$$= A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y$$

其中 $\vec{u}_x,\vec{u}$ 满足

$$\begin{cases} \vec{u}_x \bullet \vec{u}_y = 0 \\ \vec{u}_x \bullet \vec{u}_x = \vec{u}_y \bullet \vec{u}_y = 1 \end{cases}$$

称 $\vec{u}_x,\vec{u}$ 为<u>单位正交矢量</u>。前面的正交矢量空间为二维正交矢量空间。同理三个彼此正交的矢量构成的空间叫<u>三维正交矢量空间</u> 。



$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

$$= A_x\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y + A_z\vec{u}_z$$

$$\begin{cases} \vec{u}_x \bullet \vec{u}_y = \vec{u}_y \bullet \vec{u}_z = \vec{u}_z \bullet \vec{u}_x = 0 \\ \vec{u}_x \bullet \vec{u}_x = \vec{u}_y \bullet \vec{u}_y = \vec{u}_z \bullet \vec{u}_z = 1 \end{cases}$$

$\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z$ 为单位正交矢量。

以上二维、三维正交矢量空间的定义可以推广到n维正交矢量空间，这样，n维空间中的任一矢量就可以分解成 n个彼此正交的分矢量和的形式。

将矢量正交的概念推广到函数的正交，可以得到正交函数集合的概念。

定义：假设有n个函数 $g_1(t), g_2(t), \cdots, g_n(t)$ 构成一函数集合，这些函数在区间（t_1，t_2）内满足以下的正交特性：

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) \cdot g_j(t) dt = \begin{cases} k_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

则称此函数集为正交函数集。

在区间(t_1, t_2)上的任意能量有限信号f(t)可以象矢量分解那样在正交函数集合中近似分解，即用正交函数集合中的函数的线性组合来近似表示，即：

$$f(t) \approx C_1 g_1(t) + C \quad g$$

信号的这种分解叫信号的正交分解。上面的近似表示所带来的误差函数记为$e_\Delta(t)$，则

$$e_\Delta(t) = f(t) - [C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t) + \cdots + C_n g_n(t)]$$

利用最小均方误差准则(即误差函数的方均值为最小的准则)确定待定系数。

均方误差：$$\overline{e_\Delta^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [e_\Delta(t)]^2 \, dt$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{i=1}^{n} C_i g_i(t)]^2 \, dt$$

选择系数C_i，使均方误差为最小。即令

$$\frac{\partial \overline{e_{\Delta}^{2}(t)}}{\partial C_j} = \frac{-2}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[f(t) - \sum_{i=1}^{n} C_i g_i(t)\right]\cdot g_j(t)dt = 0$$

$$j = 1, 2, \cdots, n$$

解得

$$C_j = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\cdot g_j(t)dt}{\int^{t_2} g \quad (} \qquad 1$$

$$j = 1, 2, \cdots, n$$

由此产生的均方误差为

$$\overline{e_{\Delta}^{2}(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[f(t) - \sum_{i=1}^{n} C_i g_i(t)\right]^2 dt$$

$$= \frac{1}{t_1 - t_2}\int_{t_1}^{t_2}[f^2(t) - 2f(t)\cdot\sum_{i=1}^{n}C_i g_i(t) + \sum_{i=1}^{n}C_i g_i(t)\cdot\sum_{j=1}^{n}C_j g_j(t)]dt$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1}[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt + \sum_{i=1}^{n}C_i^2\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t)dt - 2\sum_{i=1}^{n}C_i\int_{t_1}^{t_2} f(t)\cdot g_i(t)dt]$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1}[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt + \sum_{i=1}^{n}C_i^2 k_i - 2\sum_{i=1}^{n}C_i^2 k_i]$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1}[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - \sum_{i=1}^{n}C_i^2 k_i]$$

其中

$$k_i = \int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t)dt$$

$$C_i = \frac{1}{k_i}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\cdot g_i(t)dt$$

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2} f(t)\cdot g_i(t)dt = C_i k_i$$

由均方误差函数的结果可以看出，随着n的增加，均方误差将逐渐减小。

若当 $n \to \infty$， $\overline{e_{\Delta}^{2}(t)} \to 0$

则说明这时信号的正交分解是精确的分解，此时正交函数集合中含有无穷多个函数，称这样的函数集为完备的正交函数集。

完备正交函数集的两种定义方法：

1. 若用正交函数集{g_i(t)}在区间(t_1，t_2)近似表示函数f(t)，

$$f(t) \approx \sum_{i=1}^{n} C_i g_i(t)$$

均方误差：$\overline{e_{\Delta}^{2}(t)} = \dfrac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{i=1}^{n} C_i g_i(t)]^2 dt$

当 $n \to \infty$, $\overline{e_{\Delta}^{2}(t)} \to 0$

则称此函数集合为完备正交函数集。

2. $g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 上构成个正交函数集，若在区间 (t_1, t_2) 内再也找不到个非零函数与这n个函数中的任一函数正交，则称此函数集为完备的正交函数集。

复正交函数集的定义：

假设有n个复函数 $g_1(t), g_2(t), \cdots, g_n(t)$ 构成一函数集合，这些函数在区间 (t_1, t_2) 内满足以下的正交特性：

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) \cdot g_j^*(t)\,dt = \begin{cases} k_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

则称此函数集为复正交函数集。

这里$g_j^*(t)$是$g_j(t)$的复共轭。$f(t)$是区间$(t_1，t_2)$上的任一能量有限信号，则

$$f(t) \approx C_1 g_1(t) + C \quad g$$

误差函数：$e_\Delta(t) = f(t) - \sum_{i=1}^{n} C_i g_i(t)$

均方误差：

$$\overline{e_\Delta^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} e_\Delta(t) \cdot e_\Delta^*(t)dt$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{i=1}^{n} C_i g_i(t)][f(t) - \sum_{i=1}^{n} C_i g_i(t)]^* dt$$

利用最小均方误差准则 $\frac{\partial \overline{e_\Delta^2(t)}}{\partial C_j} = 0$ 可得系数为

$$j = 1, 2, \cdots, n$$

由此得均方误差为：

$$\overline{e_\Delta^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - \sum_{i=1}^{n} C_i^2 k_i\right]$$

关于完备正交函数集的定义同前。

例：三角函数集合 $\{1, \cos\Omega t, \cos 2\Omega t, \cdots, \cos n\Omega t, \cdots,$

$\sin\Omega t, \sin 2\Omega t, \cdots, \sin n\Omega t, \cdots\}$

在区间(t_1, t_1+T)上构成一完备正交函数集。其中$T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$

$$\because \int_{t_1}^{t_1+T} \cos n\Omega t \cdot \cos m\Omega t dt = \begin{cases} T & n = m = 0 \\ \dfrac{T}{2} & n = m \neq 0 \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{t_1}^{t_1+T} \sin n\Omega t \cdot \sin m\Omega t dt = \begin{cases} \dfrac{T}{2} & n = m \neq 0 \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{t_1}^{t_1+T} \cos n\Omega t \cdot \sin m\Omega t dt = 0 \qquad n = 0,1,2,\cdots, m = 1,2.\cdots$$

$\therefore$该函数集合是一完备正交函数集。