第二节 常数项级数的审敛法

（Interrogate of constant term series）

一、正项级数及其审敛法

二、交错级数及其审敛法

三、绝对收敛与条件收敛

四、小结与思考练习

一、正项级数及其审敛法

(Interrogate of positive term series)

若 $u_n \geq 0$, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数.

定理 1 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 部分和序列 $\{s_n\}$ 有界.

证: “$\Longrightarrow$” 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\{S_n\}$ 收敛, 故有界.

“$\Longleftarrow$” □ $u_n \geq 0$, ∴部分和数列 $\{S_n\}$ 单调递增,

又已知 $\{S_n\}$ 有界, 故 $\{S_n\}$ 收敛, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

定理2 (比较审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数,

且存在 $N \in Z^+$, 对一切 $n > N$, 有 $u_n \le k v_n$ (常数 $k > 0$),

则有

(1) 若强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证: 因在级数前加、减有限项不改变其敛散性, 故不妨设对一切 $n \in Z^+$, 都有 $u_n \le k v_n$, 令 S_n 和 σ_n 分别表示弱级数和强级数的部分和, 则有 $S_n \le k \sigma_n$

(1) 若强级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则有 $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$

因此对一切 $n \in Z^+$, 有 $S_n \le k\sigma$

由定理 1 可知, 弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛 .

(2) 若弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散, 则有 $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$,

因此 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$, 这说明强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散 .

定理3 (比较审敛法的极限形式)

设两正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, 则有

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时, 两个级数同时收敛或发散 ;

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛 ;

(3) 当 $l = +\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散 .

证: 据极限定义, 对 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in Z^+$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon \qquad (l \neq \infty)$$

$$(l-\varepsilon)v_n \le u_n \le (l+\varepsilon)v_n \qquad (n>N)$$

(1) 当 $0<l<\infty$ 时，取 $\varepsilon<l$, 由定理 2 可知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 同时收敛或同时发散；

(2) 当 $l=0$ 时，利用 $u_n<(l+\varepsilon)v_n\ (n>N)$, 由定理2 知

若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；

(3) 当 $l=\infty$ 时，存在 $N\in Z^+$, 当 $n>N$ 时，$\dfrac{u_n}{v_n}>1$, 即

$$u_n>v_n$$

由定理2可知，若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

例 1 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+1}$ 是收敛的.

解： $\frac{1}{3^n+1}\le\frac{1}{3^n}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 收敛 $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+1}$ 是收敛的.

例 2 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}\quad(a>0)$ 的收敛性.

解：（1）当 $0<a<1$ 时.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=\frac{1}{1+0}=1\neq 0$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 发散.

（2）当 $a=1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=\frac{1}{2}\neq 0$$

所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 发散.

（3）当 $a>1$ 时，

$$\frac{1}{1+a^n}<\left(\frac{1}{a}\right)^n$$

由于级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n$ 收敛，所以级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 收敛.

综上所述，当 $0<a\le 1$ 时，原级数发散，当 $a>1$ 时，原级数收敛.

例3 讨论 p 级数 $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$ (常数 $p>0$) 的敛散性.

解: 1) 若 $p\le 1$, 因为对一切 $n\in Z^+$,

$$\frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 由比较审敛法可知 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散.

2) 若 $p>1$, 因为当 $n-1 \le x \le n$ 时, $\dfrac{1}{n^p} \le \dfrac{1}{x^p}$, 故

$$\frac{1}{n^p} = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^p}\,\mathrm{d}x$$

$$\le \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}\right]$$

$$\boxed{\left[1-\frac{1}{2^{p-1}}\right]+\left[\frac{1}{2^{p-1}}-\frac{1}{3^{p-1}}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{n^{p-1}}-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right]}$$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k^{p-1}} - \frac{1}{(k+1)^{p-1}}\right] = 1 - \frac{1}{(n+1)^{p-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

故强级数收敛, 由比较审敛法知 p 级数收敛 .

例 4 判别下列级数的敛散性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+3}{2n^3-n}$ (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\mathrm{e}^{-n}$

解：（1）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n+3}{2n^3-n}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2}{2n^3-n}=\dfrac{1}{2}$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+3}{2n^3-n}$ 收敛.

（2）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$ 又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ 发散.

（3）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 收敛.

（4）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\mathrm{e}^{-n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4}{\mathrm{e}^n}=0$ 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\mathrm{e}^{-n}$ 收敛.

例 5 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$ 的敛散性.（$p>0$，且为常数）

解:（1）因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)}{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)^{n^p}=\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)^{n^p}\right]=1$$

而 $p-$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，所以当 $p>1$ 时原级数收敛；

当 $p\le 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散，故当 $p\le 1$ 原级数发散.

注：判别级数的敛散性，若已知一些收敛级数和发散级数，则可以它们为基准进行比较.

常用于比较的基准级数有 $p-$ 级数、等比级数.

另一方面，由比较审敛法的定理我们知道，它是通过与某个敛散性已知的级数的比较来判断给定级数的敛散性，但有时作为比较对象的级数不易找到，那么能否从给定的级数自身直接判别级数的敛散性？

将正项级数与等比级数比较，可得使用上很方便的比值审敛法和根值审敛法.

定理4 比值审敛法 (D' Alembert 判别法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则

(1) 当 $\rho < 1$ 时, 级数收敛 ;

(2) 当 $\rho > 1$ 或 $\rho = \infty$ 时, 级数发散 .

证: (1) 当 $\rho < 1$ 时, 取 ε 使 $\rho + \varepsilon < 1$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

知存在 $N \in Z^+$, 当 $n > N$ 时, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon < 1$

$$\therefore\ u_{n+1} < (\rho + \varepsilon) u_n < (\rho + \varepsilon)^2 u_{n-1} < \cdots$$

$$< (\rho + \varepsilon)^{n-N} u_{N+1}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} (\rho + \varepsilon)^k$ 收敛, 由比较审敛法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

(2) 当$\rho>1$或$\rho=\infty$时,必存在$N\in Z_+$, $u_N\neq 0$, 当$n\geq N$时$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$, 从而

$$u_{n+1}>u_n>u_{n-1}>\square>u_N$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\geq u_N\neq 0$, 所以级数发散.

注：当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$ 时, 级数可能收敛也可能发散.

例如, $p-$级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}=1$

但 $\begin{cases} p>1, \text{级数收敛}; \\ p\leq 1, \text{级数发散}. \end{cases}$

例 6 判别级数 $\frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\cdots+\frac{n^2}{2^n}+\cdots$

解：（1）令 $u_n=\frac{n^2}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}<1$$

根据比值审敛法知，原级数是收敛的.

例 7 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2 2^n}$

提示：解法与例 6 类似。