摘　要

Schauder 估计在偏微分方程的理论研究中起到了至关重要的作用，是研究解的存在性、唯一性和正则性的基础. 到目前为止，已经有不少学者对椭圆型与抛物型微分方程解的 Schauder 估计进行了广泛研究，并得出了许多经典的结论. 在本文中，我认真学习研读了 *Lamm*2001 年发表的论文的第二章，对其文章中一些引理的叙述和证明过程进行了修改，比如引理 2.3.6 和引理 2.3.19. 在此基础上，用自己的思路将主部分为强椭圆的 $2m$ 阶抛物型微分方程在不同边界值条件下的 Schauder 估计进行了归纳整理.

本文主要分五章来介绍.

第一章是预备知识，主要介绍研究 Schauder 估计时所需要的一些基本理论和常见概念.

第二章着重介绍了 *Garding* 不等式，并利用它对 $2m$ 阶椭圆型微分方程的 L^2 内估计、边界估计以及全局估计进行了研究.

第三章引入了包含时间的空间，在这类空间中主要运用能量估计的方法研究了 $2m$ 阶抛物型微分方程的 L^2 正则性以及更高的正则性.

第四章是本文的核心内容，首先在插值估计，吸收引理等的帮助下，证明了带有 Cauchy 和 Dirichlet 问题的 $2m$ 阶线性常系数抛物型微分方程的 *Hölder* 内估计和全局估计，在此基础上利用凝固系数法证明了一般系数的 $2m$ 阶抛物型微分方程在各种边界值情况下的 Schauder 估计，最后将所获得的结果从一般的有界正则区域转移到了光滑、紧致、带边的黎曼流形上.

第五章是关于 Schauder 估计的一个应用，主要利用前面几章已经获得的估计证明了最简单算子 $(-\Delta)^m$ 解的存在性，然后通过连续性方法，得到了关于主部分为强椭圆的 $2m$ 阶线性抛物型微分方程解的存在性.

关键词：L^2 估计　插值估计　吸收引理　*Hölder* 估计　Schauder 估计

目　录

第1章 绪 论

1.1 Schauder估计的研究背景

关于二阶线性椭圆型微分方程古典解的先验估计，最早是由Schauder[1-2]得到的，后来研究学者们发现这些估计在研究椭圆和抛物型微分方程中非常有用.特别地，Schauder估计在二阶线性椭圆型与抛物型偏微分方程的理论研究中起到了至关重要的作用，是研究解的存在性、唯一性和正则性的基础.

到目前为止，关于抛物型微分方程Schauder估计的证明方法有很多.下面简单介绍其中的几种方法：第一种是Campanto[3]通过引入Campanto空间获得了所需的估计，后来伍卓群[4]和陈亚浙[5]在此基础上也给出了二阶线性抛物型微分方程解的Schauder内估计和全局估计的证明；第二种是Safonov[6-7]运用Hanack不等式研究了抛物型微分方程解的Schauder估计；第三种是Trudinger[8-9]所采用的磨光函数的方法；第四种是Simon[10]在吸收引理和插值估计等的帮助下，利用伸缩技术证明了高阶抛物型微分方程解的Schauder估计；第五种方法来自汪徐家[11]，他避开了Newton位势理论，利用调和函数的基本性质和椭圆型方程的极值原理证明了Possion方程经典解的Schauder估计.

本文中，我认真研读了*Lamm*[12]文章的第二章，他所研究Schauder估计的方法来自Simon.在学习*Lamm*文章的过程中，我发现一些引理的叙述和证明过程不太恰当，比如引理2.3.6和引理2.3.19.在对其完善的基础上，用自己的思路将主部分为强椭圆的$2m$阶抛物型微分方程在不同边界值条件下的Schauder估计进行了归纳整理.我将正文分为以下四个章节：

第二章着重介绍了Garding不等式，并利用它对$2m$阶椭圆型微分方程的L^2内估计、边界估计以及全局估计进行了研究；第三章引入了包含时间的空间，主要运用能量估计的方法研究了$2m$阶抛物型微分方程的L^2正则性以及更高的正则性；第四章是本文的核心内容，主要运用插值估计，吸收引理等证明了带有Cauchy和Dirichlet问题的$2m$阶线性常系数抛物型微分方程的$H\ddot{o}lder$内估计和全局估计，紧接着运用凝固系数法证明了一般系数的$2m$阶线性抛物型微分方程在不同边界值条件下的Schauder估计，最后将所获得的结果从一般的有界正则区域转移到了光滑、紧致、带边的黎曼流形上；第五章是关于Schauder估计的一个应用，主要利用前面几章已经获得的估计证明了最简单算子$(-\Delta)^m$解的存在性，然后通过连续性方法，得到了$2m$阶线性抛物型微分方程解的存在性.

考虑到文章中的定理和引理比较多，为了加深理解以及更直观的显示文章的脉络，我绘制了下面的思维导图：

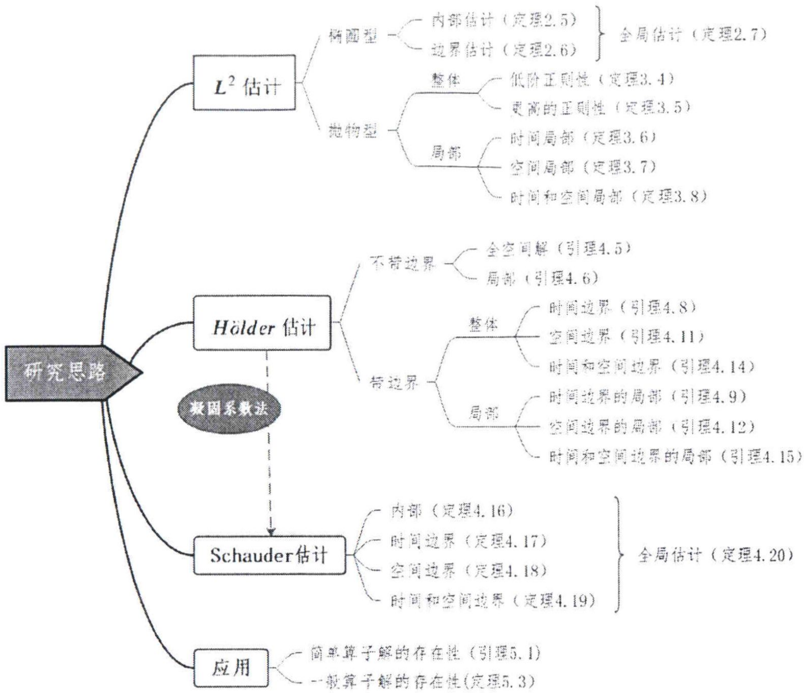

图 1.1　思维导图

1.2　符号标识

$\mathbb{R}^n$ 表示 n 维实的欧氏空间.

$\mathbb{R}^N$ 表示曲率张量.

∇ 表示 $Hamilton$ 算子，用来表示梯度和散度.

$V \subset\subset U$ 表示存在紧集 $\bar{V}$ 使得 $V \subset \bar{V} \subset U$，此时我们称 V 紧包含在 U 中.

∂G 表示 G 的边界，$\bar{G}$ 表示 G 的闭包，即 $\bar{G} = G \cup \partial G$.

α_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积.

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

B_ρ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为中心，以 ρ 为半径的球.

$⨍_{B_\rho} u(y)dy := \frac{1}{\alpha_n \rho^n} \int_{B_\rho} u(y)dy$，表示 u 在球 B_ρ 上的平均值.

1.3　基本理论

定义 1.1　假设 $u, v \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$，$\alpha$ 是多重指标，如果

$$\int_U uD^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v\phi dx \qquad \forall \phi \in C_c^\infty(U),$$

则称 v 是 u 的第 α 阶弱导数，记作

$$v = D^\alpha u.$$

定义 1.2 索伯列夫空间

$$W^{k,p}(U)$$

是满足对任意的 $|\alpha| \leqslant k$，$D^\alpha u$ 在弱导数的意义下存在，并且 $D^\alpha u \in L^p(U)$ 的全体局部可积函数组成的集合.

定义 1.3 如果 $u \in W^{k,p}(U)$，我们定义它的范数为

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \begin{cases} (\sum_{|\alpha|\leqslant k} \int_U |D^\alpha u|^p dx)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \sum_{|\alpha|\leqslant k} \operatorname{ess\,sup}_U |D^\alpha u|, & p = \infty. \end{cases}$$

注 $W^{k,p}(U)$ 中的函数表示与它几乎处处相等的函数构成的等价类.

定义 1.4 我们定义 $W_0^{k,p}(U)$ 为 $C_c^\infty(U)$ 在）$W^{k,p}(U)$ 中的闭包.

引理 1.1 (*Hölder* 不等式) 设 $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，如果 $u \in L^p(U)$，$v \in L^q(U)$，则有

$$\int_U |uv| dx \leqslant \|u\|_{L^p(U)} \|v\|_{L^q(U)}.$$

引理 1.2 (*Cauchy* 不等式)

$$ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

注 不难发现，我们很容易将 *Cauchy* 不等式推广为下述更一般的形式

$$ab \leqslant \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon} \quad (a, b > 0, \epsilon > 0).$$

第 2 章　椭圆 L^2 估计

2.1　主要引理及证明

设 $G \subset \mathbb{R}^n$ 是有界且正则的区域，考虑 G 上的线性微分算子

$$L = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a^\alpha D_\alpha, \tag{2.1}$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，$D_\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n}$，以及 $a^\alpha(x) = (a_{jk}^\alpha(x))_{1 \leqslant j,k \leqslant N}$，$a_{jk}^\alpha(x) \in \mathbb{R}^n \quad \forall 1 \leqslant j,k \leqslant N$.

注　由于考虑到这些结果稍后将只用于常数系数的情况，因此这里我们可以规定 $a^\alpha \in C^\infty(\bar{G}, \mathbb{R}^{N^2})$ 以及 $\sup_{x \in \bar{G}} |D_\beta a^\alpha(x)| \leqslant M \quad \forall |\alpha| \leqslant 2m$，$\forall |\beta| \geqslant 0$.

定义 2.1 (强椭圆微分算子)　$2m$ 阶椭圆微分算子 L 称为强椭圆，当且仅当存在 $\lambda > 0$，使得

$$\sum_{|\alpha| = 2m} a_{jk}^\alpha(x) \xi_\alpha \eta^j \eta^k \geqslant \lambda |\xi|^{2m} |\eta|^2 \quad \forall x \in G, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall \eta \in \mathbb{R}^N. \tag{2.2}$$

注　通过令 σ 为

$$\sigma(L, x, \xi) := \sum_{|\alpha| = 2m} a^\alpha(x) \xi_\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \quad \forall x \in G, \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$x \in \mathbb{R}^n$ 中的强椭圆微分算子现在还可以通过以下方式来定义

$$\frac{1}{2}(\sigma(L, x, \xi) + \sigma^T(L, x, \xi))\text{是正定的} \quad \forall \xi \neq 0,$$

其中 σ^T 表示矩阵 σ 的转置. 此外椭圆微分算子可以在 $x \in \mathbb{R}^n$ 中被定义为

$$\det(\sigma(L, x, \xi)) \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

于是有：L 强椭圆，则 L 一定是椭圆的. 此外，当 $N = 1$ 时，强椭圆和椭圆是等价的.

例 2.1　$2m$ 阶微分算子

$$L = (-\Delta)^m$$

是强椭圆的，因为通过分部积分很容易看出该算子的所有特征值都是严格正的.

以下定义和引理可以在参考文献 [13] 中找到，但仅适用于标量方程的情况.

设 $u \in C^\infty(G, \mathbb{R}^N)$，由于假设 L 的所有系数都是光滑的，因此 L 可以写成散度形式

$$Lu(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a^\alpha(x) D_\alpha u(x) = \sum_{|\beta|, |\gamma| \leqslant m} (-1)^{|\beta|} D_\beta (b^{\beta\gamma}(x) D_\gamma u(x)). \tag{2.3}$$

对于算子 L，存在一个散度形式的伴随算子 L^*

$$L^*u(x)=\sum_{|\beta|,|\gamma|\leqslant m}(-1)^{|\gamma|}D_\gamma((b^{\beta\gamma}(x))^T D_\beta u(x)). \tag{2.4}$$

由式（2.3），（2.4）以及分部积分很容易得到

$$\langle Lu,\varphi\rangle_0=\langle u,L^*\varphi\rangle_0 \quad \forall\varphi\in C_c^\infty(G,\mathbb{R}^N), \tag{2.5}$$

其中 $\langle u,v\rangle_0:=\langle u,v\rangle_{L^2}=\int_G uvdx$. 现在定义与算子 L 相关的双线性形式 B

$$B(u,v):=\langle Lu,v\rangle_0:=\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}\int_G b^{\alpha\beta}D_\alpha uD_\beta vdx. \tag{2.6}$$

注 设 $\varphi\in C^\infty(G,\mathbb{R}^N)$，$\psi\in C_c^\infty(G,\mathbb{R}^N)$，结合式（2.5）以及（2.6）我们有

$$B(\varphi,\psi)=\langle L\varphi,\psi\rangle_0=\langle\varphi,L^*\psi\rangle_0. \tag{2.7}$$

由以上的这些概念，我们可以重新定义椭圆微分方程 *Dirichlet* 问题的弱版本. 在此之前，考虑到微分方程 *Dirichlet* 问题在高阶方程中不太常见，因此下面我们先给出关于它的一个经典版本：

定义 2.2 (*Dirichlet* 问题的经典版本) 设 u，f，$g\in C^\infty(G,\mathbb{R}^N)$，如果

$$\begin{cases} Lu=f \quad in \quad G, \\ D_\alpha u=D_\alpha g \quad \text{on} \quad \partial G, \quad \forall|\alpha|\leqslant m-1, \end{cases} \tag{2.8}$$

则称 u 是给定边界值 g 的 *Dirichlet* 问题的解.

定义 2.3 (*Dirichlet* 问题的弱版本) 设 $f\in L^2(G,\mathbb{R}^N)$，$g\in H^{2m,2}(G,\mathbb{R}^N)$，如果

$$\begin{cases} B(u,\varphi)=\langle f,\varphi\rangle_0, \quad \forall\varphi\in H_0^{m,2}(G,\mathbb{R}^N), \\ u-g\in H_0^{m,2}(G,\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{2.9}$$

则称 u 是给定边界值 g 的 *Dirichlet* 问题的弱解.

接下来介绍一个重要的不等式并给出它的详细证明，感兴趣的读者可以在参考文献 [14] 中找到这部分的内容.

引理 2.1 (*Garding* 不等式) 设 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界区域，（2.1）所定义的 $2m$ 阶微分算子 L 是强椭圆的，即存在 $\lambda>0$，使得对任意的 $x\in G$，$\xi\in\mathbb{R}^n$，$\eta\in\mathbb{R}^N$ 成立

$$\sum_{j,k=1}^N\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}b_{jk}^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta\eta^j\eta^k\geqslant\lambda|\xi|^{2m}|\eta|^2,$$

并且 $B(u,v)=\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}\langle b^{\alpha\beta}D_\alpha u, D_\beta v\rangle_0$ 是 $H^{m,2}(G,\mathbb{R}^N)$ 上的双线性形式，那么存在常数 c_1，$c_2>0$，使得对于任意的 $u\in H_0^{m,2}(G,\mathbb{R}^N)$ 成立

$$B(u,u)\geqslant c_1\|u\|_m^2-c_2\|u\|_0^2, \tag{2.10}$$

其中 $\|u\|_m:=\|u\|_{H^{m,2}}$.

证明　分四步:

（1）设 $B(u,u)=B(u)=A(u)+R(u)$，其中

$$A(u)=\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}\langle b^{\alpha\beta}D_\alpha u, D_\beta u\rangle_0,$$

$$R(u)=\sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|<2m\\|\alpha|,|\beta|\leqslant m}}\langle b^{\alpha\beta}D_\alpha u, D_\beta u\rangle_0,$$

对于 $u\in H_0^{m,2}(G,\mathbb{R}^N)$，利用 *Hölder* 不等式有

$$|R(u)|\leqslant c\|u\|_m\|u\|_{m-1}. \tag{2.11}$$

通过插值可以得到

$$\|u\|_k^2\leqslant\varepsilon\|\nabla^m u\|_0^2+c(\epsilon)\|u\|_0^2\quad\forall u\in H_0^{m,2}(G,\mathbb{R}^N),\forall 0<k<m. \tag{2.12}$$

对（2.11）使用 *Cauchy* 不等式并结合估计（2.12）有

$$|R(u)|\leqslant\varepsilon\|\nabla^m u\|_0^2+c(\epsilon)\|u\|_0^2.$$

因此这里可以忽略对 $R(u)$ 的估计，即只需证明不等式在下述情况

$$b_{jk}^{\alpha\beta}=0\quad\forall\ |\alpha|+|\beta|<2m,|\alpha|\leqslant m,|\beta|\leqslant m,$$

成立即可.

（2）只需证明存在一个数 $\delta>0$，使得（2.10）对于所有的 $u\in H_0^{m,2}(G\cap B_\delta(x_0))$ 成立，其中 $x_0\in G$ 是任意的且 c_1，c_2 独立于 x_0.
由于 G 是有界的，我们可以挑选球 $B_l:=B_\delta(x_l)$，$l=1,2,\cdots r$ 来覆盖 $\bar{G}$，其中中心 $x_l\in G$. 此外可以找到单位分解 $\{\eta_l\}\in C_c^\infty(B_l)$ 满足

$$\sum_{l=1}^r\eta_l^2=1, \tag{2.13}$$

$$0\leqslant\eta_l\leqslant 1\quad\text{on}\quad\bar{G}. \tag{2.14}$$

现在令

$$u_l:=\eta_l u\quad(l=1,2,\cdots,r), \tag{2.15}$$

由（1）下面只需估计

$$
\begin{aligned}
B(u) = A(u) &= \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \langle b^{\alpha\beta} D_\alpha u, D_\beta u\rangle_0 \\
&= \sum_{l=1}^{r} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \langle b^{\alpha\beta} \eta_l D_\alpha u, \eta_l D_\beta u\rangle_0 \\
&\geqslant \sum_{l=1}^{r} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \langle b^{\alpha\beta} D_\alpha u_l, D_\beta u_l\rangle_0 - c\|u\|_m \|u\|_{m-1} \qquad (2.16)\\
&\geqslant \sum_{l=1}^{r} (c_1 \|u_l\|_m^2 - c_2\|u_l\|_0^2) - \epsilon\|u\|_m^2 - c(\epsilon)\|u\|_0^2 \\
&\geqslant \frac{c_1}{2}\|u\|_m^2 - \tilde{c}_2\|u\|_0^2.
\end{aligned}
$$

（3）在第二步中数字 $\delta > 0$ 存在的前提下，只需证明 $b^{\alpha\beta}$= 常数时，对于任意的 $u \in H_0^{m,2}(G, \mathbb{R}^N)$ 成立

$$A(u) \geqslant \lambda \|\nabla^m u\|_0^2. \qquad (2.17)$$

由于 $b^{\alpha\beta}$ 的一致连续性，对于每个 $\rho > 0$，存在 $\delta = \delta(\rho) > 0$，使得当 $|x - x_0| < \delta$ 以及 $|\alpha| = |\beta| = m$ 时有

$$|b^{\alpha\beta}(x) - b^{\alpha\beta}(x_0)| < \rho. \qquad (2.18)$$

对于任意但固定的 $x_0 \in G$，定义

$$\tilde{b}^{\alpha\beta} := b^{\alpha\beta}(x_0), \qquad (2.19)$$

于是有

$$
\begin{aligned}
A(u) &= \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \langle b^{\alpha\beta} D_\alpha u, D_\beta u\rangle_0 \\
&= \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \langle \tilde{b}^{\alpha\beta} D_\alpha u, D_\beta u\rangle_0 + \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \langle (b^{\alpha\beta} - \tilde{b}^{\alpha\beta}) D_\alpha u, D_\beta u\rangle_0 \qquad (2.20)\\
&=: \tilde{A}(u) + \bar{A}(u).
\end{aligned}
$$

由（2.18）以及 *Hölder* 不等式

$$|\bar{A}(u)| = |\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \langle (b^{\alpha\beta} - \tilde{b}^{\alpha\beta}) D_\alpha u, D_\beta u\rangle_0| \leqslant c\rho\|u\|_m^2 \quad \forall u \in H_0^{m,2}(G \cap B_\delta(x_0)), \qquad (2.21)$$

由（2.17）以及（2.19）

$$\tilde{A}(u) \geqslant \lambda \|\nabla^m u\|_0^2 \quad \forall u \in H_0^{m,2}(G, \mathbb{R}^N), \qquad (2.22)$$

结合（2.12)、(2.20)、(2.21) 与（2.22）可知对任意的 $u \in H_0^{m,2}(G \cap B_\delta(x_0))$，如果 $\rho c < \frac{\lambda}{2}$，则有

$$\begin{aligned} A(u) &\geqslant \lambda \|\nabla^m u\|_0^2 - c\rho \|u\|_m^2 \\ &\geqslant \frac{\lambda}{2} \|\nabla^m u\|_0^2 - c\|u\|_{m-1}^2 \\ &\geqslant \frac{\lambda}{4} \|\nabla^m u\|_0^2 - c\|u\|_0^2. \end{aligned} \tag{2.23}$$

（4）最后我们来证明对于所有的 $u \in H_0^{m,2}(G, \mathbb{R}^N)$，如果假设 $b^{\alpha\beta}$= 常数，则有

$$A(u) \geqslant \lambda \|\nabla^m u\|_0^2.$$

这里不妨假设 $b_{jk}^{\alpha\beta} = b_{kj}^{\beta\alpha}$，否则设 $c_{jk}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(b_{jk}^{\alpha\beta} + b_{kj}^{\beta\alpha})$，然后有

$$\langle b^{\alpha\beta} D_\alpha u, D_\beta u \rangle_0 = \langle c^{\alpha\beta} D_\alpha u, D_\beta u \rangle_0,$$

此外 $c^{\alpha\beta}$ 满足与 $b^{\alpha\beta}$ 相同的椭圆性条件. 注意到 $C_c^\infty(G, \mathbb{R}^N)$ 在 $H_0^{m,2}(G, \mathbb{R}^N)$ 中稠密，因此只需证明不等式对于 $u \in C_c^\infty(G, \mathbb{R}^N)$ 成立即可.

令 $\hat{u}$ 为 u 的傅里叶变换，则有

$$\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-ix\xi} u(x) dx, \tag{2.24}$$

$$\widehat{D_\alpha u^j} = i^{|\alpha|} \xi_\alpha \widehat{u^j}. \tag{2.25}$$

设

$$\widehat{u^j} = \phi^j + i\psi^j, \tag{2.26}$$

于是有

$$\widehat{u^j} \cdot \overline{\widehat{u^k}} = (\phi^j \phi^k + \psi^j \psi^k) + i(\phi^k \psi^j - \phi^j \psi^k). \tag{2.27}$$

根据 *Plancherel* 定理有

$$\begin{aligned} A(u) &= \sum_{j,k=1}^N \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} b_{jk}^{\alpha\beta} \langle D_\alpha u^j, D_\beta u^k \rangle_0 \\ &= \sum_{j,k=1}^N \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} b_{jk}^{\alpha\beta} \langle \xi_\alpha \widehat{u^j}, \xi_\beta \overline{\widehat{u^k}} \rangle_0 \\ &= \sum_{j,k=1}^N \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \int b_{jk}^{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta \left((\phi^j \phi^k + \psi^j \psi^k) + i(\phi^k \psi^j - \phi^j \psi^k) \right) d\xi \\ &\geqslant \int \lambda |\xi|^{2m} \delta_{jk} (\phi^j \phi^k + \psi^j \psi^k) d\xi \\ &\geqslant \lambda \int |\xi|^{2m} \widehat{u^j} \overline{\widehat{u^k}} d\xi \\ &\geqslant \lambda \int \sum_{|\alpha|=m} |D_\alpha u|^2 d\xi \qquad (|\xi|^{2m} \geqslant \sum_{|\alpha|=m} \xi^{2\alpha}), \end{aligned} \tag{2.28}$$