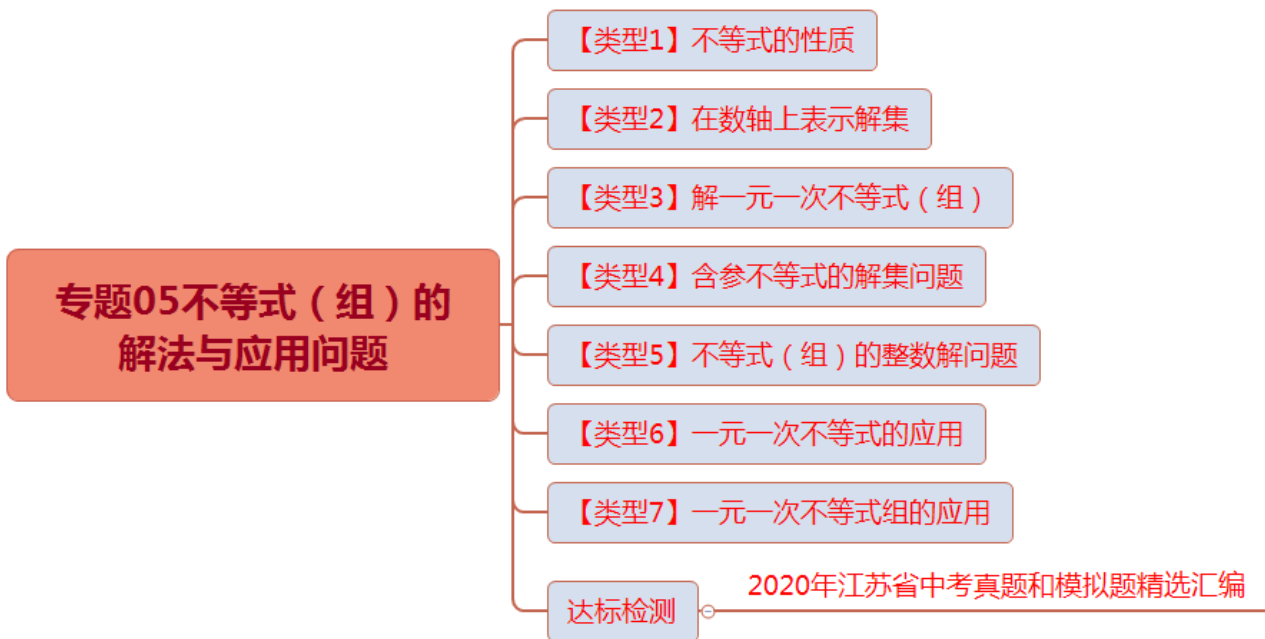


专题 05 不等式（组）的解法与应用问题



【方法指导】

1. 不等式性质：

不等式的变形：①两边都加、减同一个数，具体体现为“移项”，此时不等号方向不变，但移项要变号；

②两边都乘、除同一个数，要注意只有乘、除负数时，不等号方向才改变。

2. 用数轴表示不等式的解集时，要注意“两定”：

一是定界点，一般在数轴上只标出原点和界点即可。定边界点时要注意，点是实心还是空心，若边界点含于解集为实心点，不含于解集即为空心点；

二是定方向，定方向的原则是：“小于向左，大于向右”。

3. 解一元一次不等式的步骤：

①去分母；②去括号；③移项；④合并同类项；⑤化系数为 1。

以上步骤中，只有①去分母和⑤化系数为 1 可能用到性质 3，即可能变不等号方向，其他都不会改变不等号方向。

4. 一元一次不等式组的解法：解一元一次不等式组时，一般先求出其中各不等式的解集，再求出这些解集的公共部分，利用数轴可以直观地表示不等式组的解集。

方法与步骤：①求不等式组中每个不等式的解集；②利用数轴求公共部分。

5. 不等式（组）的整数解

(1) 利用数轴确定不等式组的解（整数解）.

解决此类问题的关键在于正确解得不等式组或不等式的解集，然后再根据题目中对于解集的限制得到下一步所需要的条件，再根据得到的条件进而求得不等式组的整数解.

(2) 已知解集（整数解）求字母的取值.

一般思路为：先把题目中除未知数外的字母当做常数看待解不等式组或方程组等，然后再根据题目中对结果的限制的条件得到有关字母的代数式，最后解代数式即可得到答案.

6.一元一次不等式组的应用主要是列一元一次不等式组解应用题，其一般步骤：

(1) 分析题意，找出不等关系；

(2) 设未知数，列出不等式组；

(3) 解不等式组；

(4) 从不等式组解集中找出符合题意的答案；

(5) 作答.

【题型剖析】

【类型 1】不等式的性质

【例 1】（2020 春·江阴市期末）若 $a < b$ ，则下列不等式一定成立的是（ ）

A. $a+2c < b+2c$ B. $2c - a < 2c - b$ C. $a+2c > b+2c$ D. $2ac < 2bc$

【分析】根据不等式的性质分别进行判断即可.

【解答】解：A、 $\because a < b$ ， $\therefore a+2c < b+2c$ ，原变形一定成立，故此选项符合题意；

B、 $\because a < b$ ， $\therefore 2c - a > 2c - b$ ，原变形不成立，故此选项不符合题意；

C、 $\because a < b$ ， $\therefore a+2c < b+2c$ ，原变形不成立，故此选项不符合题意；

D、 $\because a < b$ ， $\therefore 2ac < 2bc$ ($c > 0$) 或 $2ac = 2bc$ ($c = 0$) 或 $2ac > 2bc$ ($c < 0$)，原变形不一定成立，故此选项不符合题意；

故选：A.

【变式 1.1】（2020 春·丹阳市校级期末）若 $a < b$ ，则下列不等式中不一定成立的是（ ）

A. $a+2 < b+1$ B. $\frac{a}{3} < \frac{b}{3}$ C. $a - 2 < b - 2$ D. $-2a > -2b$

【分析】根据不等式的性质逐个判断即可.

【解答】解：A. $\because a < b$ ，

$\therefore a+1 < b+1$ ，不能推出 $a+2 < b+1$ ，故本选项符合题意；

B. $\because a < b,$

$\therefore \frac{a}{3} < \frac{b}{3},$ 故本选项不符合题意;

C. $\because a < b,$

$\therefore a - 2 < b - 2,$ 故本选项不符合题意;

D. $\because a < b,$

$\therefore -2a > -2b,$ 故本选项不符合题意;

故选: A.

【变式 1.2】(2020 春·宝应县期末) 若 $a > b.$ 则依据不等式的基本性质下列变形不正确的是 ()

A. $3 - 2a > 3 - 2b$

B. $4 + a > 4 + b$

C. $ac^2 > bc^2 (c \neq 0)$

D. $-a < -b$

【分析】利用不等式的性质对各选项进行判断.

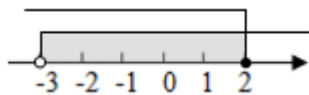
【解答】解: $\because a > b,$

$\therefore 3 - 2a < 3 - 2b, 4 + a > 4 + b, ac^2 > bc^2 (c \neq 0), -a < -b.$

故选: A.

【类型 2】在数轴上表示解集

【例 2】(2020·赣榆区三模) 解集在数轴上表示为如图所示的不等式组是 ()



A. $\begin{cases} x > -3 \\ x \geq 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x > -3 \\ x \leq 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x < -3 \\ x \geq 2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x < -3 \\ x \leq 2 \end{cases}$

【分析】根据解集在数轴上的表示: 实心点向左是小于等于, 空心圈向右是大于即可判断.

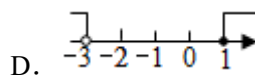
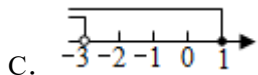
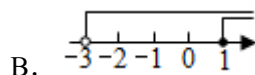
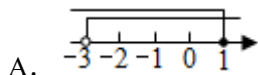
【解答】解: 观察数轴可知:

解集在数轴上表示为如图所示的不等式组是:

$$\begin{cases} x > -3 \\ x \leq 2 \end{cases}.$$

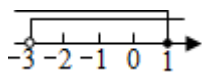
故选: B.

【变式 2.1】(2020·滨海县一模) 满足 $-3 < x \leq 1$ 的数在数轴上表示为 ()



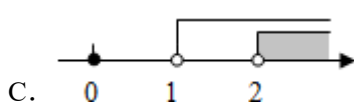
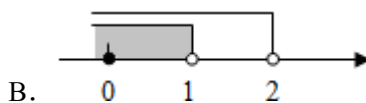
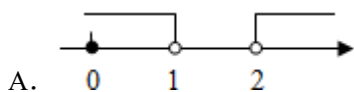
【分析】表示解集表示在数轴上即可.

【解答】解：满足 $-3 < x \leq 1$ 的数在数轴上表示为



故选：A.

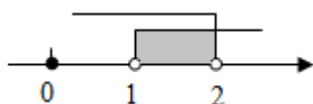
【变式 2.2】(2020 春·高邮市期末) 如图，天平左盘中物体 A 的质量为 mg ，天平右盘中每个砝码的质量都是 $1g$ ，则 m 的取值范围在数轴上可表示为 ()



【分析】根据天平列出不等式组，确定出解集即可.

【解答】解：根据题意得： $\begin{cases} m > 1 \\ m < 2 \end{cases}$

解得： $1 < m < 2$,



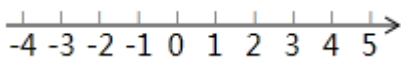
故选：D.

【类型 3】解一元一次不等式（组）

【例 3】(2020 春·张家港市校级期中) 已知不等式组 $\begin{cases} 3x + 3 > 5(x - 1) & \text{①} \\ \frac{2x - 2}{3} - 1 \leq \frac{3x}{2} & \text{②} \end{cases}$.

(1) 求它的解集并把它的解集在数轴上表示出来.

(2) 在 (1) 的条件下化简 $|x + 2| - 2|4 - x|$.



【分析】(1) 首先解每个不等式，两个不等式的解集的公共部分就是不等式组的解集；

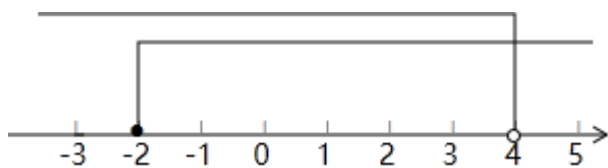
(2) 根据绝对值的意义化简即可.

【解答】解：(1) 解不等式①，得： $x < 4$,

解不等式②，得： $x \geq -2$,

则不等式组的解集为 $-2 \leq x < 4$,

将不等式组的解集表示在数轴上如下：



(2) 由 (1) 知 $-2 \leq x < 4$,

则 $|x+2| - 2|4-x|$

$$= x+2 - 2(4-x)$$

$$= x+2 - 8+2x$$

$$= 3x - 6.$$

【变式 3.1】(2020·亭湖区校级三模) 解不等式组: $\begin{cases} 1-2x < 5 \\ x-1 \leq \frac{x+1}{2} \end{cases}$.

【分析】分别求出每一个不等式的解集, 根据口诀: 同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无解了确定不等式组的解集.

【解答】解: 解不等式 $1-2x < 5$, 得 $x > -2$

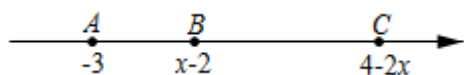
解不等式 $x-1 \leq \frac{x+1}{2}$ 得, $x < 3$,

\therefore 原不等式组解集 $-2 < x \leq 3$.

【变式 3.2】(2020·射阳县二模) 如图, 在数轴上点 A 、 B 、 C 分别表示 -3 、 $x-2$ 、 $4-2x$, 且点 A 在点 B 的左侧, 点 C 在点 B 的右侧.

(1) 求 x 的取值范围;

(2) 当 $2AB=BC$ 时, x 的值为 $\frac{4}{5}$.



【分析】(1) 根据右边点表示的数总比左边点表示的数大列出关于 x 的不等式组, 解之可得;

(2) 根据两点之间的距离公式列出方程, 解之可得.

【解答】解: (1) 根据题意, 得: $\begin{cases} x-2 > -3 & \textcircled{1} \\ 4-2x > x-2 & \textcircled{2} \end{cases}$,

解不等式①, 得: $x > -1$,

解不等式②, 得: $x < 2$,

则 $-1 < x < 2$;

(2) $\because 2AB=BC$,

$$\therefore 2(x-2+3) = 4 - 2x - (x-2),$$

$$\text{解得 } x = \frac{4}{5},$$

$$\text{故答案为: } \frac{4}{5}.$$

【类型 4】含参不等式的解集问题

【例 4】(2020 春·盱眙县期末) 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x \leq 2 \\ x > a \end{cases}$ 有解, 则 a 的取值不可能是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. -2

【分析】根据关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x \leq 2 \\ x > a \end{cases}$ 有解, 可得: $a < 2$, 再根据有理数大小比较的方法, 判断出 a 的取值不可能是多少即可.

【解答】解: \because 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x \leq 2 \\ x > a \end{cases}$ 有解,

$$\therefore a < 2,$$

$$\because 0 < 2, 1 < 2, -2 < 2,$$

$\therefore a$ 的取值可能是 0、1 或 -2, 不可能是 2.

故选: C.

【变式 4.1】(2020 春·玄武区期末) 若不等式组 $\begin{cases} x > 1 \\ x < a \end{cases}$ 无解, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $a > 1$ B. $a \geq 1$ C. $a < 1$ D. $a \leq 1$

【分析】根据不等式组 $\begin{cases} x > 1 \\ x < a \end{cases}$ 无解, 即两个不等式的解集无公共部分, 进而得到 a 的取值范围是 $a \leq 1$,

【解答】解: \because 不等式组 $\begin{cases} x > 1 \\ x < a \end{cases}$ 无解,

$\therefore a$ 的取值范围是 $a \leq 1$,

故选: D.

【变式 4.2】(2020·唐山二模) 已知关于 x 的不等式 $\frac{4x+a}{3} > 1$ 的解都是不等式 $\frac{2x+1}{3} > 0$ 的解, 则 a 的范围是 ()

- A. $a = 5$ B. $a \geq 5$ C. $a \leq 5$ D. $a < 5$

【分析】先把 a 看作常数求出两个不等式的解集, 再根据同大取大列出不等式求解即可.

【解答】解: 由 $\frac{4x+a}{3} > 1$ 得, $x > \frac{3-a}{4}$,

由 $\frac{2x+1}{3} > 0$ 得, $x > -\frac{1}{2}$,

∵关于 x 的不等式 $\frac{4x+a}{3} > 1$ 的解都是不等式 $\frac{2x+1}{3} > 0$ 的解，

$$\therefore \frac{3-a}{4} \geq -\frac{1}{2},$$

解得 $a \leq 5$.

即 a 的取值范围是： $a \leq 5$.

故选：C.

【类型 5】不等式（组）的整数解问题

【例 5】（2020 春·邳州市期末）已知不等式组 $\begin{cases} x > 2 \\ x \leq m \end{cases}$ 的解集中含有 3 个整数解，则 m 的取值范围是_____.

【分析】先解不等式组，再根据解集中只含有 3 个整数，列出不等式，从而可确定 m 的取值范围.

【解答】解：由 $\begin{cases} x > 2 \\ x \leq m \end{cases}$ 得：不等式组的解集为： $2 < x \leq m$,

∵解集中含有 3 个整数，

$$\therefore 5 \leq m < 6,$$

故答案为： $5 \leq m < 6$.

【变式 5.1】（2020 春·句容市期末）已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x - a \geq 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases}$ 的整数解共有 3 个，则 a 的取值范围是_____.

【分析】表示出不等式组的解集，由不等式组整数解有 3 个，确定出 a 的范围即可.

【解答】解：不等式组整理得： $\begin{cases} x \geq a \\ x < 1 \end{cases}$ ，即 $a \leq x < 1$ ，

由不等式组整数解有 3 个，得到 $-3 < a \leq -2$ ，

故答案为 $-3 < a \leq -2$.

【变式 5.2】（2020 春·溧水区期末）若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x \leq -0.5 \\ x > m \end{cases}$ 的整数解只有 2 个，则 m 的取值范围为_____.

【分析】表示出不等式组的解集，由解集只有 2 个，确定出 m 的范围即可.

【解答】解：不等式组 $\begin{cases} x \leq -0.5 \\ x > m \end{cases}$ 解得： $m < x \leq -0.5$ ，

由不等式组的整数解只有 2 个，得到整数解为 -2 ， -1 ，

则 m 的范围为 $-3 \leq m < -2$.

故答案为： $-3 \leq m < -2$.

【类型 6】一元一次不等式的应用

【例 6】(2020 春·海陵区校级期中) 实验中学要为学校科技活动小组提供实验器材, 计划购买 A 型、B 型两种型号的放大镜. 若购买 100 个 A 型放大镜和 150 个 B 型放大镜需用 1500 元; 若购买 120 个 A 型放大镜和 160 个 B 型放大镜需用 1720 元.

(1) 求每个 A 型放大镜和每个 B 型放大镜各多少元;

(2) 学校决定购买 A 型放大镜和 B 型放大镜共 75 个, 总费用不超过 570 元, 那么最多可以购买多少个 A 型放大镜?

【分析】(1) 设每个 A 型放大镜和每个 B 型放大镜分别为 x 元, y 元, 列出方程组即可解决问题;

(2) 由题意列出不等式求出即可解决问题.

【解答】解: (1) 设每个 A 型放大镜和每个 B 型放大镜分别为 x 元, y 元,

$$\text{可得} \begin{cases} 100x + 150y = 1500 \\ 120x + 160y = 1720 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 9 \\ y = 4 \end{cases}$$

答: 每个 A 型放大镜和每个 B 型放大镜分别为 9 元, 4 元;

(2) 设购买 A 型放大镜 a 个,

根据题意可得: $9a + 4 \times (75 - a) \leq 570$,

解得: $a \leq 54$.

答: 最多可以买 54 个 A 型放大镜.

【变式 6.1】(2020 春·盐城期末) 某班级社团活动, 需购买甲、乙两种卡片. 若购买 1 张甲卡片和 1 张乙卡片, 则共需 6 元; 若购买 2 张甲卡片和 1 张乙卡片, 则共需 8 元.

(1) 求甲、乙两种卡片的单价;

(2) 若需购买甲、乙两种卡片共 6 张, 且花费不超过 20 元, 问甲卡片最少有几张?

【分析】(1) 设甲种卡片的单价为 x 元, 乙种卡片的单价为 y 元, 根据题意列出方程组求解即可;

(2) 设甲卡片购买 m 张, 则乙卡片购买 $(6 - m)$ 张, 由题意列出不等式, 解不等式即可得出答案.

【解答】解: (1) 设甲种卡片的单价为 x 元, 乙种卡片的单价为 y 元, 由题意得,

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

答: 甲种卡片的单价为 2 元, 乙种卡片的单价为 4 元.

(2) 设甲卡片购买 m 张, 则乙卡片购买 $(6 - m)$ 张, 由题意得,

$$2m+4(6-m) \leq 20,$$

解得 $m \geq 2$,

\therefore 甲卡片最少有 2 张.

答: 甲卡片最少有 2 张.

【变式 6.2】(2020 春·江阴市期末) 某公司有甲、乙两个口罩生产车间, 甲车间每天生产普通口罩 6 万个, N95 口罩 2.2 万个. 乙车间每天生产普通口罩和 N95 口罩共 10 万个, 且每天生产的普通口罩比 N95 口罩多 6 万个.

(1) 求乙车间每天生产普通口罩和 N95 口罩各多少万个?

(2) 现接到市防疫指挥部要求: 需要该公司提供至少 156 万个普通口罩和尽可能多的 N95 口罩. 因受原料和生产设备的影响, 两个车间不能同时生产, 且当天只能确保一个车间的生产. 已知该公司恰好用 20 天完成防疫指挥部下达的任务.

问: ①该公司至少安排乙车间生产多少天?

②该公司最多能提供多少个 N95 口罩?

【分析】(1) 设乙车间每天生产普通口罩 x 万个, 乙车间每天生产 N95 口罩 y 万个, 根据题意列出方程组并解答:

(2) ①设安排乙车间生产 m 天, 则甲车间生产 $(20 - m)$ 天, 根据题意列出不等式并解答:

②利用①的计算结果和生活实际取值.

【解答】解: (1) 设乙车间每天生产普通口罩 x 万个, 乙车间每天生产 N95 口罩 y 万个,

依题意得:
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$$

答: 乙车间每天生产普通口罩 8 万个, 乙车间每天生产 N95 口罩 2 万个;

(2) ①设安排乙车间生产 m 天, 则甲车间生产 $(20 - m)$ 天,

依题意得: $8m+6(20-m) \geq 156$.

解得 $m \geq 18$.

答: 该公司至少安排乙车间生产 18 天.

②由题意得, 乙车间生产的天数可能是 18, 19 或 20 天. 即有三种生产方案:

方案一: 乙车间生产 18 天, 甲车间生产 2 天;

方案二: 乙车间生产 19 天, 甲车间生产 1 天;

方案三：乙车间生产 20 天，甲车间生产 0 天；

则生产的 N95 口罩 = $2 \times 2.2 = 4.4$ (万个)。

答：该公司最多能提供 4.4 万个 N95 口罩。

【类型 7】一元一次不等式组的应用

【例 7】(2020 春·邗江区期末) 新冠疫情期间，某医药器材经销商计划同时购进一批甲、乙两种型号的口罩，若购进 2 箱甲型口罩和 1 箱乙型口罩，共需要资金 2200 元；若购进 3 箱甲型口罩和 2 箱乙型口罩，共需要资金 3600 元。

(1) 求甲、乙型号口罩每箱的进价为多少元？

(2) 该医药器材经销商计划购进甲、乙两种型号的口罩用于销售，预计用不多于 13400 元且不少于 13000 元的资金购进这两种型号口罩共 20 箱，请问有几种进货方案？并写出具体的进货方案；

(3) 若销售一箱甲型口罩，利润率为 45%，乙型口罩的售价为每箱 1000 元。为了促销，公司决定每售出一箱乙型口罩，返还顾客现金 m 元，而甲型口罩售价不变，要使 (2) 中所有方案获利相同，求 m 的值。

【分析】(1) 设甲型口罩每箱的进价为 x 元，乙型口罩每箱的进价为 y 元，根据“若购进 2 箱甲型口罩和 1 箱乙型口罩，共需要资金 2200 元；若购进 3 箱甲型口罩和 2 箱乙型口罩，共需要资金 3600 元”，即可得出关于 x, y 的二元一次方程组，解之即可得出结论；

(2) 设购进 a 箱甲型口罩，则购进 $(20 - a)$ 箱乙型口罩，根据预计用不多于 13400 元且不少于 13000 元的资金购进这两种型号口罩共 20 箱，即可得出关于 a 的一元一次不等式组，解之即可得出 a 的取值范围，再结合 a 为正整数即可得出各进货方案；

(3) 设销售完 20 箱口罩后获得的利润为 w 元，根据总利润 = 每箱利润 \times 销售数量，即可得出 w 关于 a 的函数关系式，结合 (2) 中所有方案获利相同，即可得出 $m - 40 = 0$ ，解之即可得出 m 的值。

【解答】解：(1) 设甲型口罩每箱的进价为 x 元，乙型口罩每箱的进价为 y 元，

依题意，得：
$$\begin{cases} 2x + y = 2200 \\ 3x + 2y = 3600 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} x = 800 \\ y = 600 \end{cases}$$

答：甲型口罩每箱的进价为 800 元，乙型口罩每箱的进价为 600 元。

(2) 设购进 a 箱甲型口罩，则购进 $(20 - a)$ 箱乙型口罩，

依题意，得：
$$\begin{cases} 800a + 600(20 - a) \leq 13400 \\ 800a + 600(20 - a) \geq 13000 \end{cases}$$

解得： $5 \leq a \leq 7$ 。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/17521112220011343>