

江西高安中学 2023-2024 学年高考仿真卷数学试卷

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

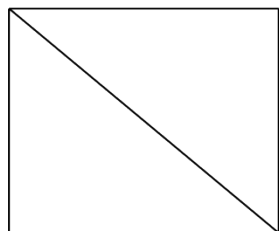
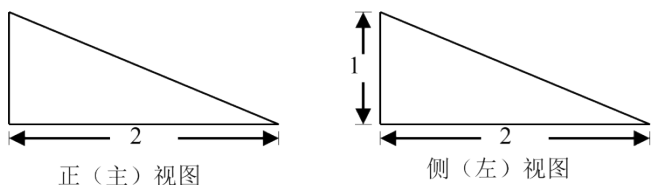
1. 已知三棱锥 $P-ABC$ 中， O 为 AB 的中点， $PO \perp$ 平面 ABC ， $\angle APB = 90^\circ$ ， $PA = PB = 2$ ，则有下列四个结论：①若 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，则 $PC = 2$ ；② $\triangle ABC$ 若为等边三角形，则 $AP \perp BC$ ；③当 $\angle ACB = 90^\circ$ 时， PC

与平面 PAB 所成的角的范围为 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ ；④当 $PC = 4$ 时， M 为平面 PBC 内一动点，若 $OM \parallel$ 平面 PAC ，则 M 在

$\triangle PBC$ 内轨迹的长度为 1. 其中正确的个数是 ().

- A. 1 B. 1 C. 3 D. 4

2. 某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的体积为 ()



俯视图

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 2 D. 4

3. 已知 x, y 满足 $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \leq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$ ，则 $\frac{y-3}{x-2}$ 的取值范围为 ()

- A. $\left[\frac{3}{2}, 4\right]$ B. $(1, 2]$ C. $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ D. $(-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$

4. 复数 $z = \frac{2+i}{1-i}$ ， i 是虚数单位，则下列结论正确的是

- A. $|z| = \sqrt{5}$ B. z 的共轭复数为 $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$
- C. z 的实部与虚部之和为 1 D. z 在复平面内的对应点位于第一象限

5. 设非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 满足 $|\vec{b}|=2, |\vec{a}|=1$, 且 \vec{b} 与 \vec{a} 的夹角为 θ , 则“ $|\vec{b}-\vec{a}|=\sqrt{3}$ ”是“ $\theta=\frac{\pi}{3}$ ”的 ().

- A. 充分非必要条件
- B. 必要非充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

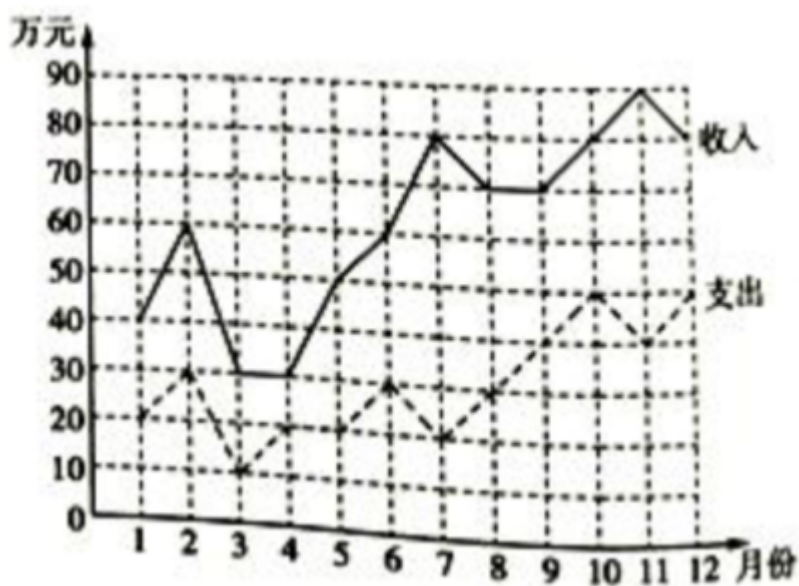
6. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 满足 $f(x+2)=2f(x)$, 且当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x)=-x(x-2)$. 若对任意 $x \in (-\infty, m]$, 都有 $f(x) \leq \frac{40}{9}$, 则 m 的取值范围是 ().

- A. $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$
- B. $\left(-\infty, \frac{19}{3}\right]$
- C. $(-\infty, 7]$
- D. $\left(-\infty, \frac{23}{3}\right]$

7. 已知实数 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq -1 \\ x - 2y + 2 \geq 0 \\ 2x - y - 2 \leq 0 \end{cases}$$
, 则 $2x - 3y$ 的最小值是

- A. -2
- B. $-\frac{7}{2}$
- C. 1
- D. 4

8. 已知某超市 2018 年 12 个月的收入与支出数据的折线图如图所示:



根据该折线图可知, 下列说法错误的是 ().

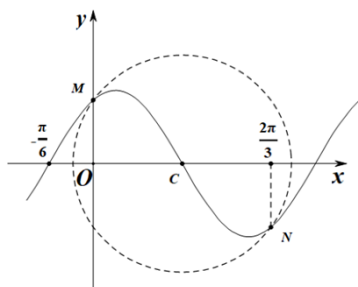
- A. 该超市 2018 年的 12 个月中的 7 月份的收益最高
- B. 该超市 2018 年的 12 个月中的 4 月份的收益最低
- C. 该超市 2018 年 1-6 月份的总收益低于 2018 年 7-12 月份的总收益
- D. 该超市 2018 年 7-12 月份的总收益比 2018 年 1-6 月份的总收益增长了 90 万元

9. 过双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 左焦点 F 的直线 l 交 C 的左支于 A, B 两点, 直线 AO (O 是坐标原点) 交 C

的右支于点 D ，若 $DF \perp AB$ ，且 $|BF| = |DF|$ ，则 C 的离心率是 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

10. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图中实线所示，图中圆 C 与 $f(x)$ 的图象交于 M, N 两点，且 M 在 y 轴上，则下列说法中正确的是

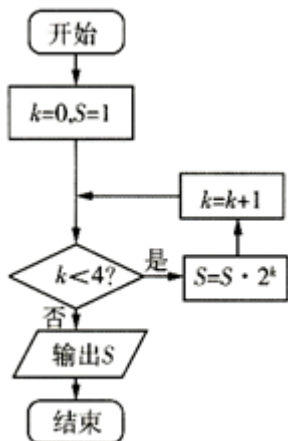


- A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 2π
- B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{4}{3}\pi, 0)$ 成中心对称
- C. 函数 $f(x)$ 在 $(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6})$ 单调递增
- D. 函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{5\pi}{12}$ 后关于原点成中心对称

11. 设复数 z 满足 $|z - 2i| = |z + 1|$ ， z 在复平面内对应的点为 (x, y) ，则 ()

- A. $2x - 4y - 3 = 0$ B. $2x + 4y - 3 = 0$ C. $4x + 2y - 3 = 0$ D. $2x - 4y + 3 = 0$

12. 执行如图所示的程序框图，则输出的 S 的值是 ()



- A. 8 B. 32 C. 64 D. 128

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB = BC = AC$ ，侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 ABC ，且三棱柱的侧面积为 $3\sqrt{3}$

若该三棱柱的顶点都在同一个球 O 的表面上，则球 O 的表面积的最小值为_____.

14. 某校共有师生 1600 人，其中教师有 1000 人，现用分层抽样的方法，从所有师生中抽取一个容量为 80 的样本，则抽取学生的人数为_____.

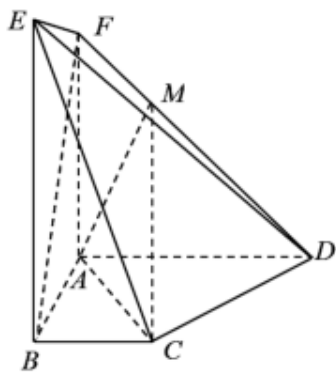
15. 已知关于 x 的方程 $a|\sin x| + \frac{1}{2} = \sin x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上恰有两个解，则实数 a 的取值范围是_____.

16. 在直角三角形 ABC 中， $\angle C$ 为直角， $\angle BAC > 45^\circ$ ，点 D 在线段 BC 上，且 $CD = \frac{1}{3}CB$ ，若 $\tan \angle DAB = \frac{1}{2}$ ，则 $\angle BAC$ 的正切值为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知六面体 $ABCDEF$ 如图所示， $BE \perp$ 平面 $ABCD$ ， $BE \parallel AF$ ， $AD \parallel BC$ ， $BC = 1$ ， $CD = \sqrt{5}$ ，

$AB = AF = AD = 2$ ， M 是棱 FD 上的点，且满足 $\frac{FM}{MD} = \frac{1}{2}$ 。



(1) 求证：直线 $BF \parallel$ 平面 MAC ；

(2) 求二面角 $A-MC-D$ 的正弦值。

18. (12 分) 已知 O 为坐标原点，单位圆与角 x 终边的交点为 P ，过 P 作平行于 y 轴的直线 l ，设 l 与 $\frac{\pi}{3}$ 终边所在直线的交点为 Q ， $f(x) = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 。

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上的值域。

19. (12 分) 某超市在节日期间进行有奖促销，规定凡在该超市购物满 400 元的顾客，均可获得一次摸奖机会。摸奖规则如下：奖盒中放有除颜色不同外其余完全相同的 4 个球（红、黄、黑、白）。顾客不放回的每次摸出 1 个球，若摸到黑球则摸奖停止，否则就继续摸球。按规定摸到红球奖励 20 元，摸到白球或黄球奖励 10 元，摸到黑球不奖励。

(1) 求 1 名顾客摸球 2 次摸奖停止的概率；

(2) 记 X 为 1 名顾客摸奖获得的奖金数额，求随机变量 X 的分布列和数学期望。

20. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足： $a_1 = 2, b_1 = -1, a_n = 2a_{n-1} - b_{n-1}, b_n = 2b_{n-1} - a_{n-1}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ 。

(1) 求证:数列 $\{a_n - b_n\}$ 为等比数列;

(2) 求数列 $\left\{\frac{3^n}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 S_n .

21. (12分) 某景点上山共有 999 级台阶, 寓意长长久久. 甲上台阶时, 可以一步走一个台阶, 也可以一步走两个台阶, 若甲每步上一个台阶的概率为 $\frac{1}{3}$, 每步上两个台阶的概率为 $\frac{2}{3}$. 为了简便描述问题, 我们约定, 甲从 0 级台阶开始向上走, 一步走一个台阶记 1 分, 一步走两个台阶记 2 分, 记甲登上第 n 个台阶的概率为 P_n , 其中 $n \in N^*$, 且 $n \leq 998$.

(1) 若甲走 3 步时所得分数为 X , 求 X 的分布列和数学期望;

(2) 证明: 数列 $\{P_{n+1} - P_n\}$ 是等比数列;

(3) 求甲在登山过程中, 恰好登上第 99 级台阶的概率.

22. (10分) 已知 AB 是圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 的直径, 动圆 M 过 A, B 两点, 且与直线 $y + 2 = 0$ 相切.

(1) 若直线 AB 的方程为 $x - y = 0$, 求 $e M$ 的方程;

(2) 在 y 轴上是否存在一个定点 P , 使得以 MP 为直径的圆恰好与 x 轴相切? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

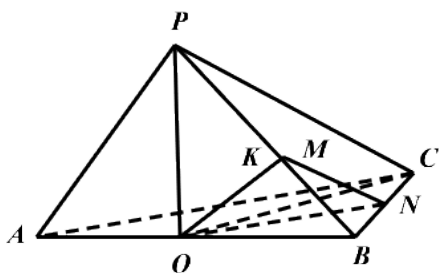
1、C

【解析】

由线面垂直的性质, 结合勾股定理可判断①正确; 反证法由线面垂直的判断和性质可判断②错误; 由线面角的定义和转化为三棱锥的体积, 求得 C 到平面 PAB 的距离的范围, 可判断③正确; 由面面平行的性质定理可得线面平行, 可得④正确.

【详解】

画出图形:



若 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 则 $OA = OB = OC = \sqrt{2}$,

$PO \perp$ 平面 ABC , 可得 $PO \perp OC$, 即 $PC = \sqrt{PO^2 + OC^2} = 2$, ①正确;

$\triangle ABC$ 若为等边三角形, $AP \perp BC$, 又 $AP \perp PB$

可得 $AP \perp$ 平面 PBC , 即 $AP \perp PC$, 由 $PO \perp OC$ 可得

$PC = \sqrt{PO^2 + OC^2} = \sqrt{2+6} = 2\sqrt{2} = AC$, 矛盾, ②错误;

若 $\angle ACB = 90^\circ$, 设 PC 与平面 PAB 所成角为 θ

可得 $OC = OA = OB = \sqrt{2}$, $PC = 2$,

设 C 到平面 PAB 的距离为 d

由 $V_{C-PAB} = V_{P-ABC}$ 可得

$$\frac{1}{3}d \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BC$$

即有 $AC \cdot BC = 2\sqrt{2}d$, $\frac{AC^2 + BC^2}{2} = 4$, 当且仅当 $AC = BC = 2$ 取等号.

可得 d 的最大值为 $\sqrt{2}$, $\sin \theta = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

即 θ 的范围为 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$, ③正确;

取 BC 中点 N , PB 的中点 K , 连接 OK, ON, KN

由中位线定理可得平面 $OKN \parallel$ 平面 PAC

可得 M 在线段 KN 上, 而 $KN = \frac{1}{2}PC = 2$, 可得④正确;

所以正确的是: ①③④

故选: C

【点睛】

此题考查立体几何中与点、线、面位置关系有关的命题的真假判断, 处理这类问题, 可以用已知的定理或性质来证明, 也可以用反证法来说明命题的不成立. 属于一般性题目.

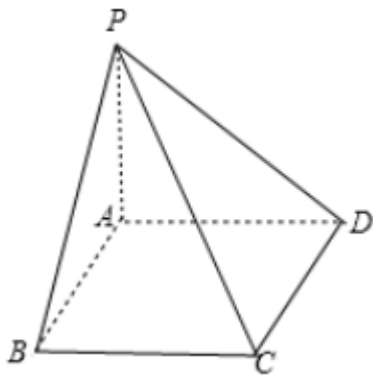
2、B

【解析】

由三视图知该四棱锥是底面为正方形，且一侧棱垂直于底面，由此求出四棱锥的体积.

【详解】

由三视图知该四棱锥是底面为正方形，且一侧棱垂直于底面，画出四棱锥的直观图，如图所示：



$$\text{则该四棱锥的体积为 } V = \frac{1}{3} S_{\text{正方形}ABCD} \cdot PA = \frac{1}{3} \times 2^2 \times 1 = \frac{4}{3}.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查了利用三视图求几何体体积的问题，是基础题.

3、C

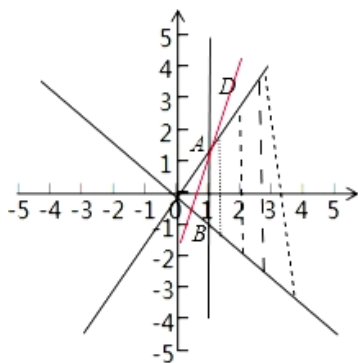
【解析】

设 $k = \frac{y-3}{x-2}$ ，则 k 的几何意义为点 (x, y) 到点 $(2, 3)$ 的斜率，利用数形结合即可得到结论.

【详解】

解：设 $k = \frac{y-3}{x-2}$ ，则 k 的几何意义为点 $P(x, y)$ 到点 $D(2, 3)$ 的斜率，

作出不等式组对应的平面区域如图：



由图可知当过点 D 的直线平行于 x 轴时, 此时 $k = \frac{y-3}{x-2} = 0$ 成立;

$k = \frac{y-3}{x-2}$ 取所有负值都成立;

当过点 A 时, $k = \frac{y-3}{x-2}$ 取正值中的最小值, $\begin{cases} x=1 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow A(1,1)$, 此时 $k = \frac{y-3}{x-2} = \frac{1-3}{1-2} = 2$;

故 $\frac{y-3}{x-2}$ 的取值范围为 $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$;

故选: C .

【点睛】

本题考查简单线性规划的非线性目标函数问题, 解题时作出可行域, 利用目标函数的几何意义求解是解题关键. 对于直线斜率要注意斜率不存在的直线是否存在.

4、 D

【解析】

利用复数的四则运算, 求得 $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$, 在根据复数的模, 复数与共轭复数的概念等即可得到结论.

【详解】

由题意 $z = \frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+3i}{1-i^2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$,

则 $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$, z 的共轭复数为 $\bar{z} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$,

复数 z 的实部与虚部之和为 2 , z 在复平面内对应点位于第一象限, 故选 D .

【点睛】

复数代数形式的加减乘除运算的法则是进行复数运算的理论依据, 加减运算类似于多项式的合并同类项, 乘法法则类似于多项式乘法法则, 除法运算则先将除式写成分式形式, 再将分母实数化, 其次要熟悉复数相关基本概念, 如复数

$a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 的实部为 a 、虚部为 b 、模为 $\sqrt{a^2+b^2}$ 、对应点为 (a, b) 、共轭为 $a-bi$.

5、 C

【解析】

利用数量积的定义可得 θ , 即可判断出结论.

【详解】

解: $|b - \vec{a}| = \sqrt{3}$, $\therefore b^2 + a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$, $\therefore 2^2 + 1 - 2 \times 2 \times 1 \times \cos \theta = 3$,

解得 $\cos \theta = \frac{1}{2}$, $\theta \in [0, \pi]$, 解得 $\theta = \frac{\pi}{3}$,

\therefore “ $|b - a| = \sqrt{3}$ ”是“ $\theta = \frac{\pi}{3}$ ”的充分必要条件.

故选: C.

【点睛】

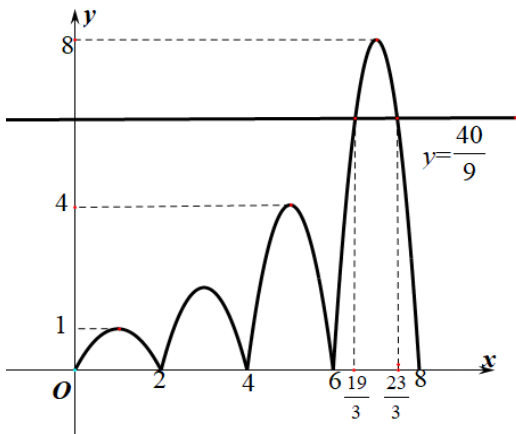
本题主要考查平面向量数量积的应用, 考查推理能力与计算能力, 属于基础题.

6、B

【解析】

求出 $f(x)$ 在 $x \in (2n, 2n+2]$ 的解析式, 作出函数图象, 数形结合即可得到答案.

【详解】



当 $x \in (2n, 2n+2]$ 时, $x - 2n \in (0, 2]$, $f(x) = 2^n f(x - 2n) = -2^n(x - 2n)(x - 2n - 2)$,

$f(x)_{\max} = 2^n$, 又 $4 < \frac{40}{9} < 8$, 所以 m 至少小于 7, 此时 $f(x) = -2^3(x - 6)(x - 8)$,

令 $f(x) = \frac{40}{9}$, 得 $-2^3(x - 6)(x - 8) = \frac{40}{9}$, 解得 $x = \frac{19}{3}$ 或 $x = \frac{23}{3}$, 结合图象, 故 $m \leq \frac{19}{3}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查不等式恒成立求参数的范围, 考查学生数形结合的思想, 是一道中档题.

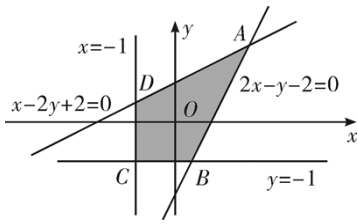
7、B

【解析】

作出该不等式组表示的平面区域, 如下图中阴影部分所示,

设 $z = 2x - 3y$, 则 $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}z$, 易知当直线 $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}z$ 经过点 D 时, z 取得最小值,

由 $\begin{cases} x = -1 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$, 所以 $D(-1, \frac{1}{2})$, 所以 $z_{\min} = 2 \times (-1) - 3 \times \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$, 故选 B.



8、D

【解析】

用收入减去支出，求得每月收益，然后对选项逐一分析，由此判断出说法错误的选项。

【详解】

用收入减去支出，求得每月收益（万元），如下表所示：

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
收益	20	30	20	10	30	30	60	40	30	30	50	30

所以7月收益最高，A选项说法正确 4月收益最低，B选项说法正确 1-6月总收益140万元，7-12月总收益240万元，所以前6个月收益低于后6个月收益，C选项说法正确，后6个月收益比前6个月收益增长 $240 - 140 = 100$ 万元，所以D选项说法错误.故选D.

【点睛】

本小题主要考查图表分析，考查收益的计算方法，属于基础题.

9、D

【解析】

如图，设双曲线的右焦点为 F_2 ，连接 DF_2 并延长交右支于 C ，连接 FC ，设 $DF_2 = x$ ，利用双曲线的几何性质可以得到 $DF = x + 2a$ ， $FC = x + 4a$ ，结合 $Rt\triangle FDC$ 、 $Rt\triangle FDF_2$ 可求离心率.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/178017037006007006>