

4.4.1 方程的根与函数的零点

复习回顾

问题1: 方程 $x^2 + 2x - 3 = 0$ 的根是多少?

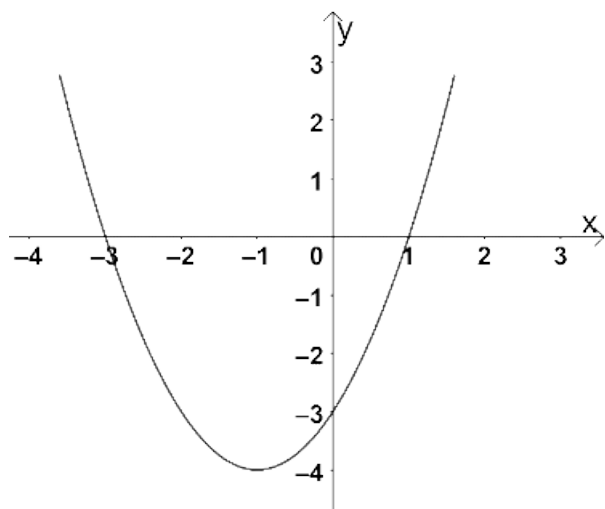
解: 因式分解可得 $(x + 3)(x - 1) = 0$, 则原方程的根为 $x_1 = -3, x_2 = 1$.

追问：方程 $x^2 + 2x - 3 = 0$ 的根与函数 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ 的图象有什么关系呢？

解：函数 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ 的图象如图所示：

根据图象，可以发现函数与 x 轴的交点分别为 $(-3, 0)$ 与 $(1, 0)$ 。

而这两个点的横坐标的值就是原方程的根，将其称之为二次函数 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ 的**零点**。



知识点一

函数的零点

对于一般函数 $y = f(x)$, 我们把使 $f(x) = 0$ 的实数 x 叫做函数 $y = f(x)$ 的零点.

注意：零点不是点！

新知探究

问题2： 类比一元二次方程的根与对应二次函数图象的关系，可以得出方程 $f(x) = 0$ 的根与函数 $y = f(x)$ 图象之间的关系吗？

问题2: 类比一元二次方程的根与对应二次函数图象的关系, 可以得出方程 $f(x) = 0$ 的根与函数 $y = f(x)$ 图象之间的关系吗?

方程 $f(x) = 0$ 有实数根

\iff 函数 $y = f(x)$ 有零点

\iff 函数 $y = f(x)$ 的图象与 x 轴有交点

代数运算



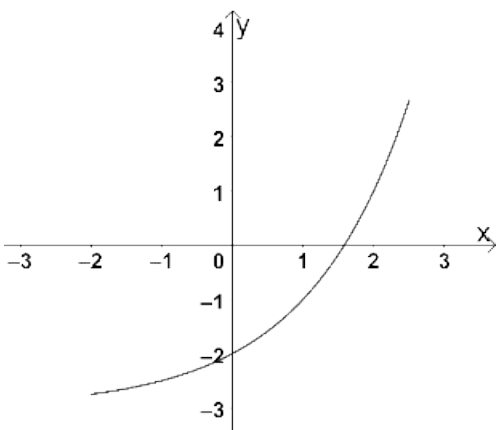
零点



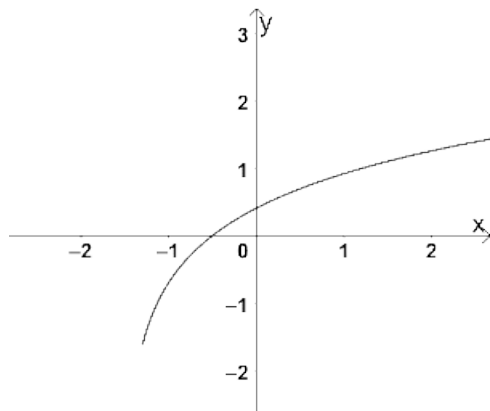
图象特征

知识巩固

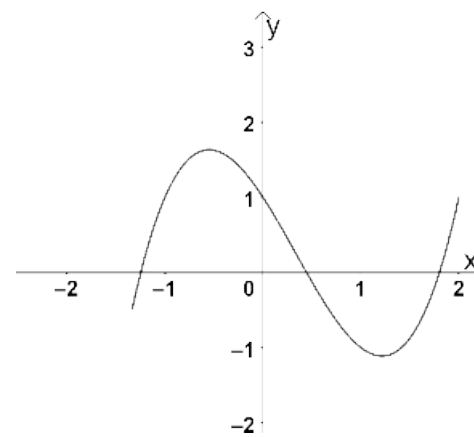
例1: 观察下列函数图象, 找出对应方程的根的个数.



$$f(x) = 2^x - 2$$



$$g(x) = \ln(x + 3)$$

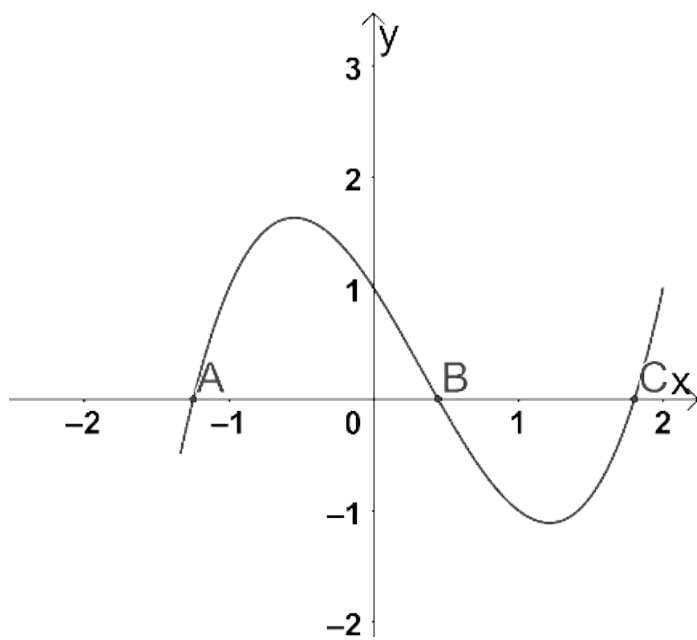


$$h(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$$

解: 可知方程 $f(x) = 0$ 与 $g(x) = 0$ 均有一个实数根; 方程 $h(x) = 0$ 有三个实数根.

变式：观察函数 $y = h(x)$ 的图象，在其零点左右的函数值有什么特征呢？

解：观察图象可以发现，函数 $y = h(x)$ 与 x 轴有三个交点. 分别是 A, B, C 三点，对应就有**三个零点**，虽然在这三个零点左右的函数值大小不一，但是可以发现**函数值正负相反**.

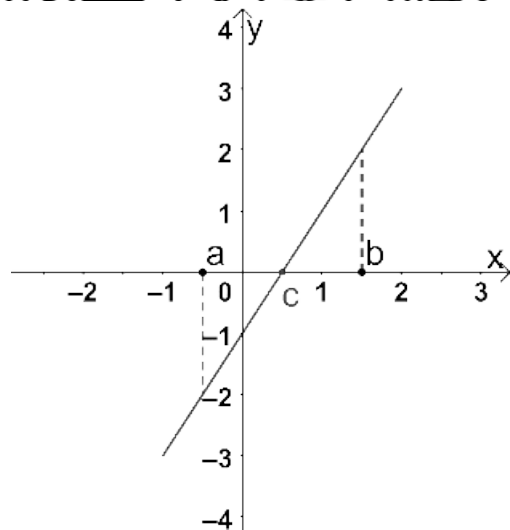


$$h(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$$

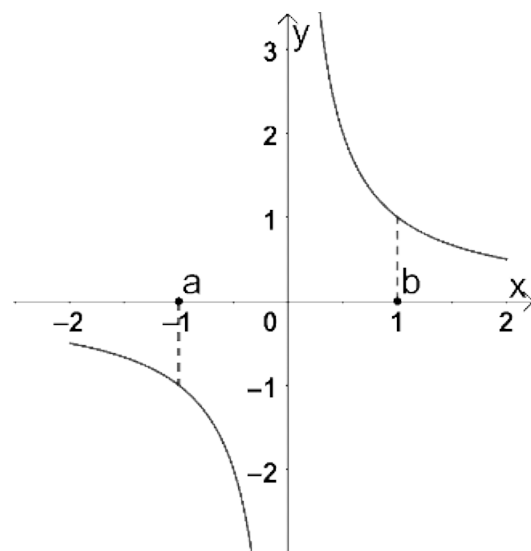
新知探究

问题3: 对于函数 $y = f(x)$, 如果在区间 $[a, b]$ 上满足 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在

区间 (a, b) 中一定有零点吗?



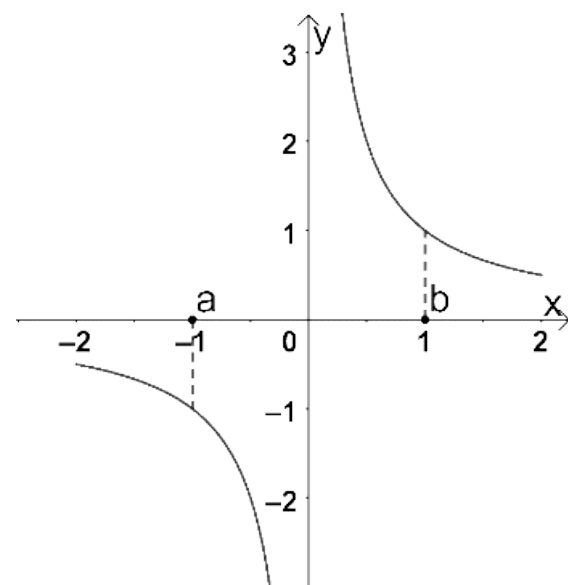
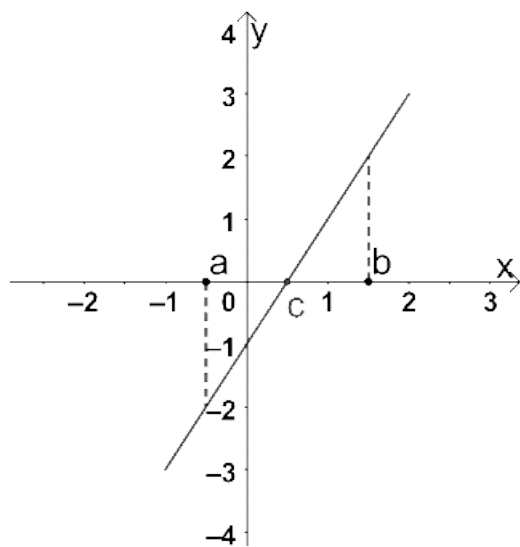
$$f(x) = 2x - 1$$



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

问题4：你能加一个条件，使得“对于函数 $y = f(x)$ ，如果在区间 $[a, b]$ 上满足

$f(a) \cdot f(b) < 0$ ，那么函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 中一定有零点”这个推论成立吗？



函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是**连续不断**的.

知识点二

函数零点存在定理

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是一条连续不断的曲线, 且有 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内至少有一个零点, 即存在点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) = 0$.

知识点二

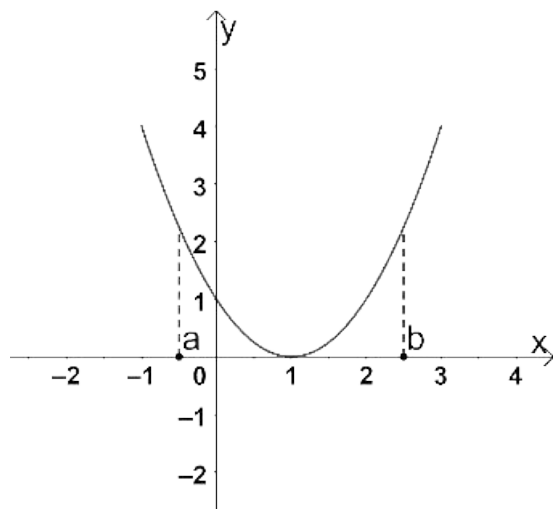
函数零点存在定理

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是一条**连续不断**的曲线，且有 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，那么函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内**至少有一个零点**，即存在点 $x_0 \in (a, b)$ ，使得 **$f(x_0) = 0$** 。

在高中阶段，**除分段函数外，定义域连续的函数图象连续**。

思维探索

问题5: 函数零点存在定理中的结论可以推出条件吗? 即函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且在区间 (a, b) 内存在零点, 可以推出 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 吗?



函数零点存在定理**不能逆用!**

知识巩固

例2: 函数 $f(x) = 2x^3 - 5$ 在区间 $(1,2)$ 内存在零点吗?

解: 函数 $f(x) = 2x^3 - 5$ 的图象在区间 $[1,2]$ 上**连续**, 且 $f(1) = -3 < 0$, $f(2) = 11 > 0$, 根据函数零点存在定理可知, 函数 $f(x) = 2x^3 - 5$ 在区间 $(1,2)$ 内**存在零点**.

变式：函数 $f(x) = 2x^3 - 5$ 在区间 $(1,2)$ 内存在几个零点呢？

解：由幂函数性质可知，函数 $f(x) = 2x^3 - 5$ 在定义域内**单调递增**，又由例2知函数 $f(x) = 2x^3 - 5$ 在区间 $(1,2)$ 内**存在零点**。则函数 $f(x) = 2x^3 - 5$ 在区间 $(1,2)$ 内**只有一个零点**。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/178045054033007006>