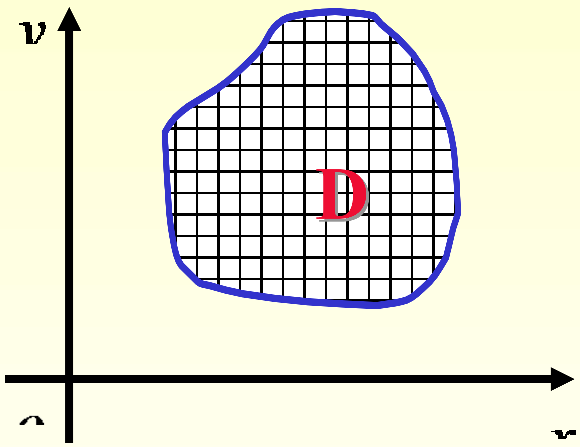
第二节 二重积分的计算法

计算二重积分的措施:

二重积分——→累次积分(即两次定积分).

一、利用直角坐标系计算二重积分

在直角坐标系下用平行于坐标轴的直线网来划分区域D，



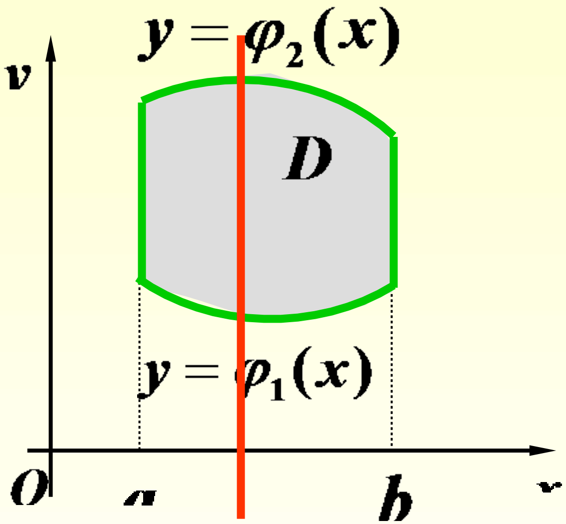
则面积元素为 $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

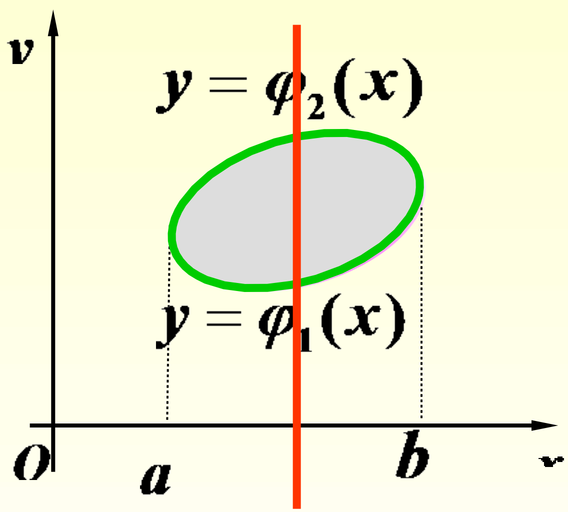
故二重积分可写为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(2)假如积分区域为：$a \le x \le b$、$\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$.

［X—型］

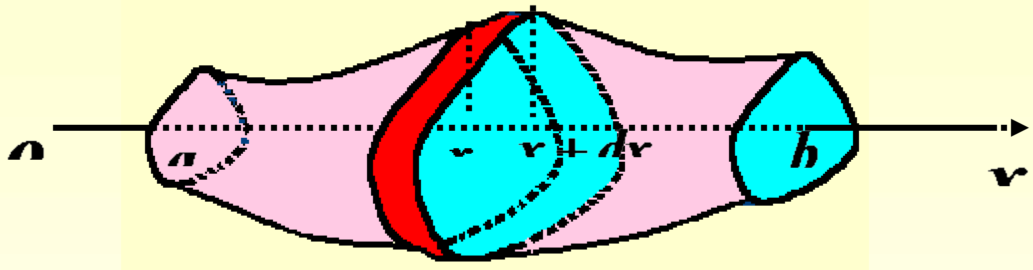




其中函数$\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$在区间 $[a,b]$上连续.

回忆：平行截面面积为已知的立体的体积

$A(x)$表示过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积，



$A(x)$为x的已知连续函数

$dV = A(x)dx$ 立体体积 $V = \int_a^b A(x)dx$

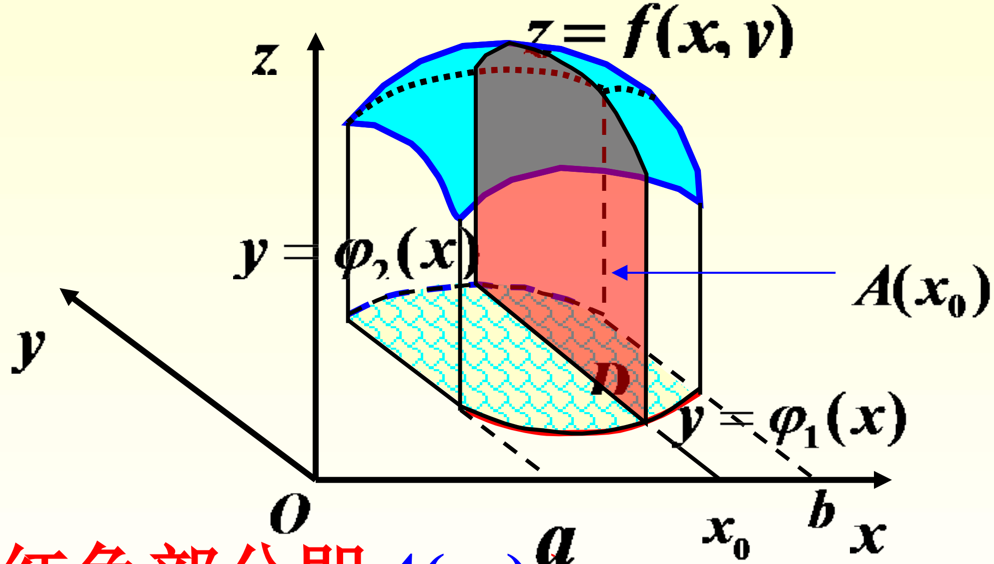
此措施关键是求 $A(x)$

用二重积分的几何意义阐明其计算法:

$\because \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\,(f(x,y)\geq 0)$ 的值等于以D为底,

以曲面$z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积.

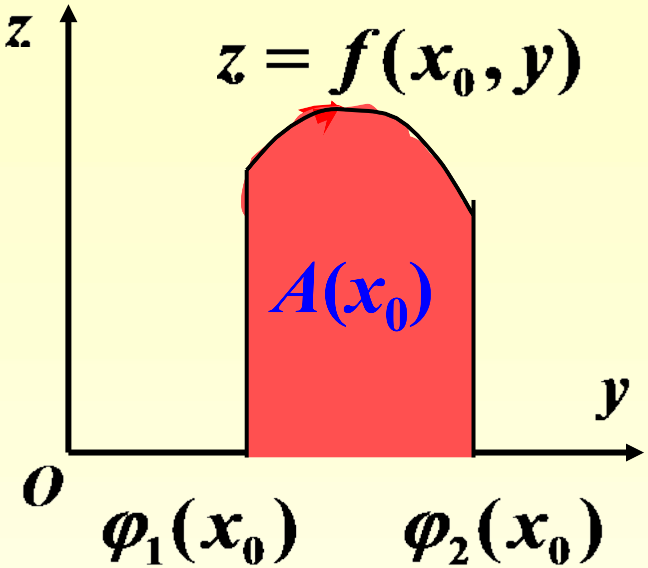
应用计算"平行截面面积为已知的立体求体积"的措施.

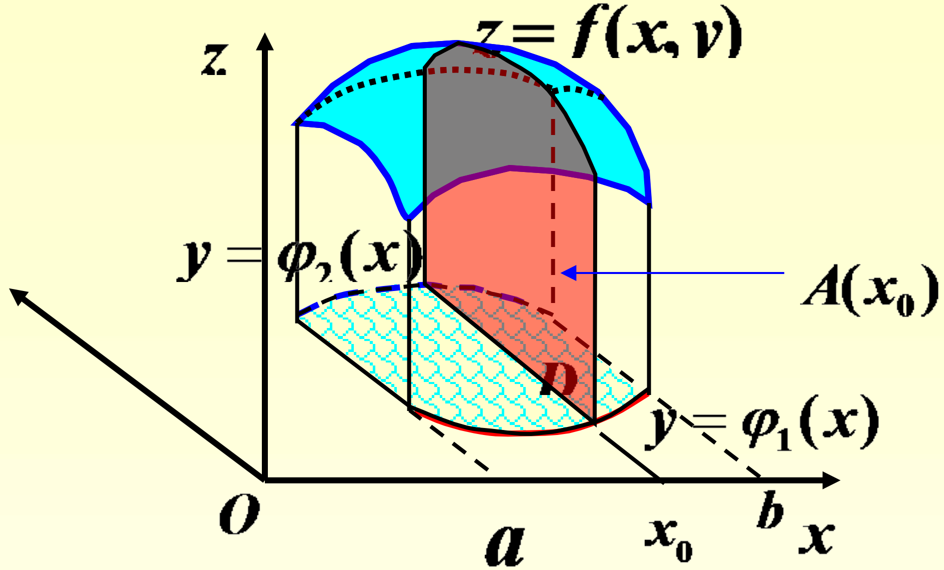


* 计算截面面积 (红色部分即$A(x_0)$)

是区间$[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0)]$为底, 曲线$z=f(x_0,y)$

为曲边的曲边梯形.





$$A(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y)\mathrm{d}y \qquad A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y$$

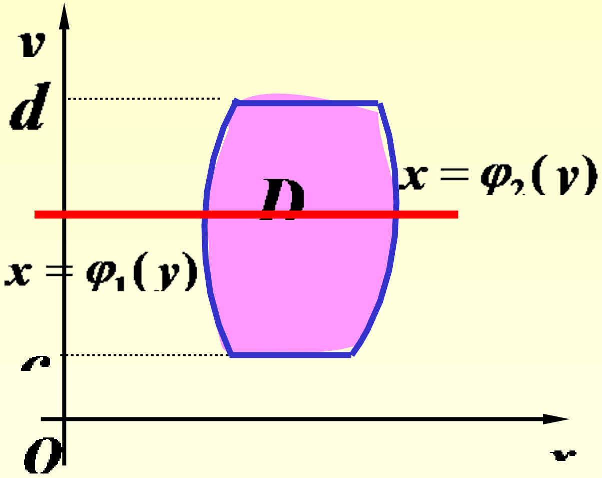
$$V = \boxed{\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma} = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x$$

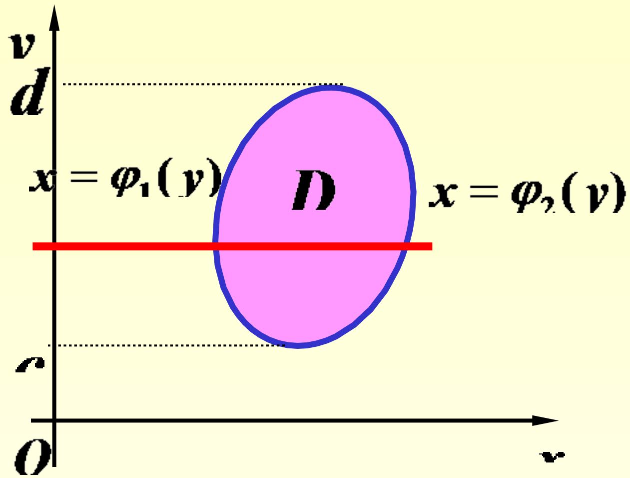
$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y$$

先对y后对x的二次积分(累次积分)

(2) 积分区域为： $c \le y \le d$，$\varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)$

[Y—型]





其中函数 $\varphi_1(y)$、$\varphi_2(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上连续.

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

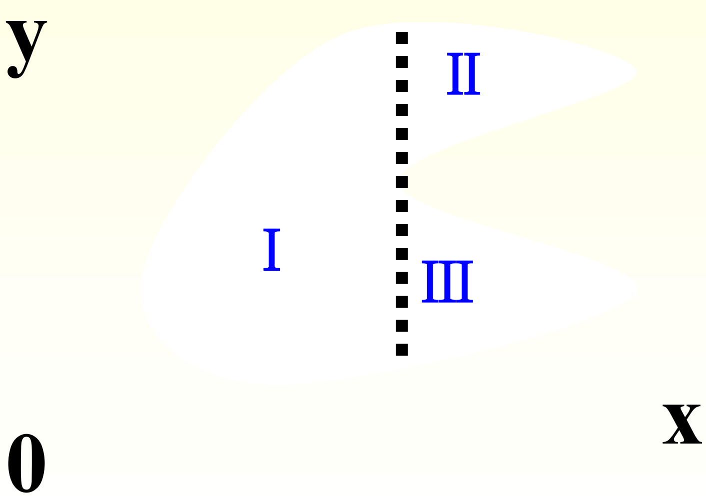
先对x后对y的二次积分

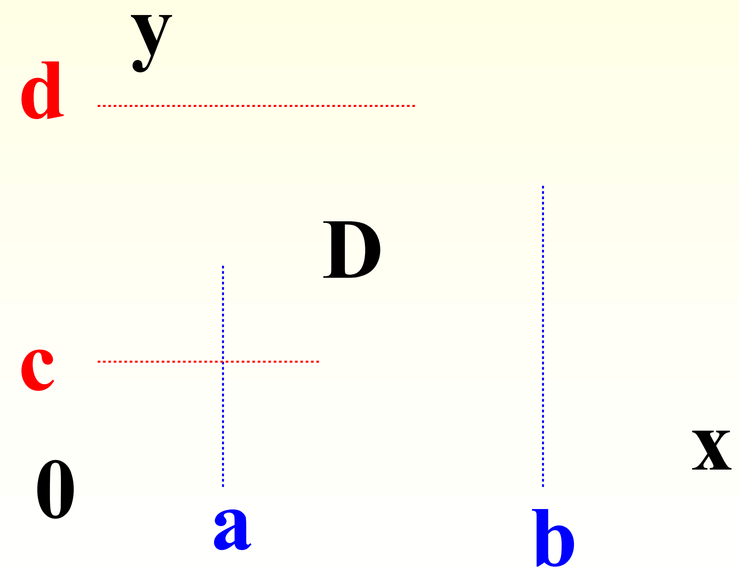
也即 $$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

注意：

1.当D既不是X-型区域也不是Y-型区域时，将D提成几部分，使每部分是X-型区域或是Y-型区域.

2.当D既是X-型区域也是Y-型区域时,能够用两个公式进行计算.





特殊地 D为矩形域: $a\le x\le b, c\le y\le d$

则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$

$$= \int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

若$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$

则 $\iint\limits_D f_1(x)f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b\left(\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

$$= \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y$$

即等于两个定积分的乘积.

二重积分是化为两次定积分来计算的，关键是拟定积分限.

定限要注意的问题：

1.上限>下限.

2.内层积分的上，下限应为外层积分变量的函数.

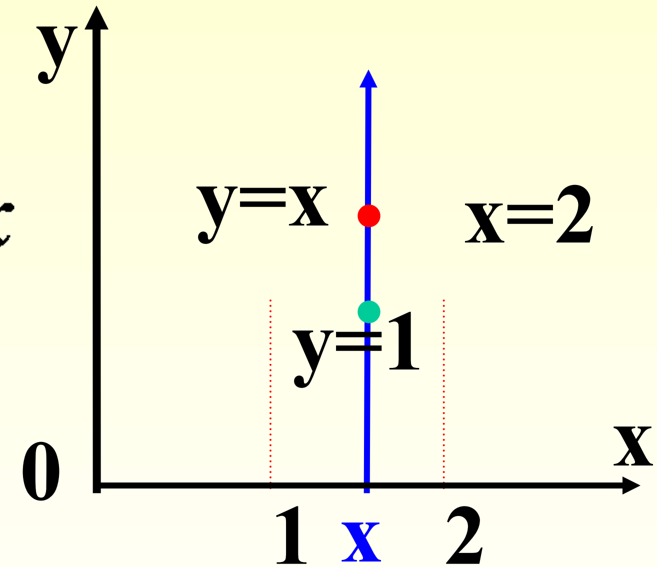
3.外层积分上，下限应为常数(后积先定限).

4. 二重积分的成果应为常数.

例 计算$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$

其中D是由直线$y=1, x=2$及$y=x$所围成的闭区域.

解法1： **先y后x**



$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma = \int_1^2 \left[\int_1^x xy\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^2 \left[x\cdot\frac{y^2}{2}\right]_1^x \mathrm{d}x$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{x^3}{2}-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{8}-\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \frac{9}{8}$$

$1 \le x \le 2$

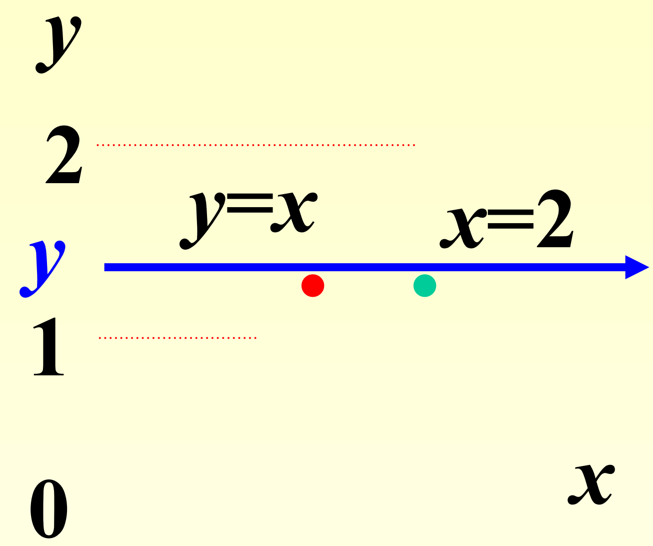
$1 \le y \le x$

解法2： 先x后y

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma = \int_1^2 [\int_y^2 xy\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$$

$$= \int_1^2 \left[y\cdot\frac{x^2}{2}\right]_y^2 \mathrm{d}y$$

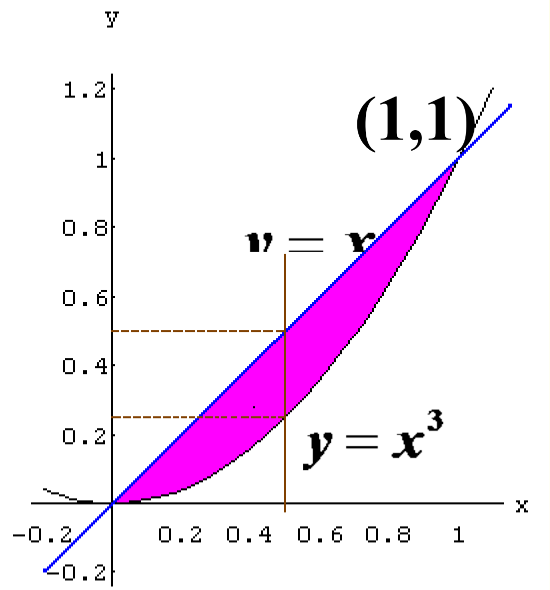
$$= \int_1^2 \left(2y-\frac{y^3}{2}\right)\mathrm{d}y = \left[y^2-\frac{y^4}{8}\right]_1^2 = \frac{9}{8}$$



$1 \le y \le 2$

$y \le x \le 2$

例 计算$\iint\limits_D e^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$是第一象限中由直线$y=x$和$y=x^3$围成区域



解 $\begin{cases} y=x \\ y=x^3 \end{cases} \Rightarrow (0,0)\ ,(1,1),$

$$D_X: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^3 \le y \le x \end{cases}$$

$$\iint\limits_D e^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^3}^{x} e^{x^2}\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 y e^{x^2}\Big|_{x^3}^{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 (xe^{x^2} - x^3 e^{x^2})\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e - 1.$$

选用积分顺序，不但要看区域的特点，

而且要看被积函数的特点.

凡遇如下形式积分:

$$\int \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x,\ \int \sin x^2 \mathrm{d}x,\ \int \cos x^2 \mathrm{d}x,\ \int e^{-x^2} \mathrm{d}x,$$

$\int e^{x^2} \mathrm{d}x,\ \int e^{\frac{y}{x}} \mathrm{d}x,\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$, 等等, 一定要放在

背面积分.