摘 要

随机切换系统在电路系统、工业制造和电子通讯等领域有着诸多应用. 半马尔可夫过程因突破了传统的马尔可夫过程在逗留时间分布上的限制, 受到了学者的广泛关注. 本文主要研究由 Lévy 过程驱动的半马尔可夫线性和非线性随机切换系统的稳定性问题.

本文首先讨论了带有泊松跳的半马尔可夫线性随机切换系统的稳定性, 基于线性系统的显式解, 将 Zong et al.(2014) 中马尔可夫线性跳跃扩散系统的结果推广到半马尔可夫切换的情形, 利用嵌入马尔可夫链的遍历性得到了该系统几乎处处指数稳定和 p 阶矩指数稳定的判别条件. 其次, 本文根据半马尔可夫过程的随机积分表示和广义 Itô 公式, 利用多重 Lyapunov 函数方法将 Zong et al.(2014) 中马尔可夫非线性跳跃扩散系统的结果推广到半马尔可夫切换的情形, 建立了该系统几乎处处指数稳定的充分条件, 并举例说明其有效性.

对于 BM 驱动的半马尔可夫切换系统, 本文引入 ψ 型函数, 利用多重 Lyapunov 函数方法, 得到了该系统仅依赖于切换信号渐近性质的一般收敛速率稳定性的判别条件. 另外, 利用概率分析的方法, 将 Wu et al.(2017) 中没有噪声干扰的半马尔可夫切换系统的稳定性结果推广到带有布朗运动的情形, 得到了该系统几乎处处全局渐近稳定的充分条件, 并举例说明其有效性.

关键词: 半马尔可夫切换, Lévy 过程, 几乎处处指数稳定, 多重 Lyapunov 函数, 几乎处处全局渐近稳定

目 录

第一章　绪论

§1.1　研究背景

近年来, 科学技术的飞速进步推动了社会经济蓬勃发展, 但同时也为控制理论研究和实践带来了更多挑战. 在实际的运行系统中, 经常会出现许多不确定的因素, 例如外部环境的变化、子系统之间关联性改变以及部件的故障等. 这些干扰因素很可能会给系统的稳定性带来显著的影响, 因此在建模的过程中加入随机因素是很有必要的. 随机混合系统是一类涉及连续演化、瞬时变化和随机效应的动力系统. 在过去的几十年里, 随机切换系统作为随机混合系统的重要类型之一, 受到越来越多的关注. 随机切换系统通常被描述为在有限个动态系统中表现出随机切换的一系列动态系统, 根据随机切换的规则, 不同的子系统将沿着系统的轨迹在特定的时刻被激活. 随机切换系统可以建模一类具有多模态性质的动态系统, 同时也可以建模多控制器切换的智能控制系统, 已经被广泛应用于电路系统[31]、制造系统[3,4] 和通信网络[1]等多个领域. 马尔可夫切换系统作为一类重要的随机切换系统, 引发了研究学者的广泛讨论. 目前已经有许多关于马尔可夫切换系统稳定性的文献专著, 如 Mao & Yuan(2006)[25], Yin & Zhu(2010)[37].

由于马尔可夫过程具有无记忆性, 其逗留时间的分布总是存在一定的限制. 在离散时间的情况下, 马尔可夫链的逗留时间的分布服从几何分布, 连续时间的情况下, 马尔可夫过程的逗留时间服从指数分布, 这极大地限制了马尔可夫切换系统的应用. 实际上, 生活中存在许多不适合被建模为马尔可夫切换系统的系统, 比如目标跟踪系统[38]、生物系统[27]和容错控制系统[19]. 因此, 研究学者引入了半马尔可夫过程的概念以描述更一般的切换信号, 在此切换之下, 系统的逗留时间允许服从任意连续时间分布, 且依赖于当前状态和下一状态, 例如 Phase-type 分布、均匀分布、Weibull 分布等. 这导致了半马尔可夫过程的转移速率是时变的, 而马尔可夫过程的状态转移速率是固定常数.

综合以上可以看出, 半马尔可夫切换系统是马尔可夫切换系统的一个自然推广. 因此, 对半马尔可夫切换系统的研究具有更深远的实际意义和更重要的应用价值. 另一方面, 当前现有的应用于马尔可夫切换系统的研究技术与研究方法, 对半马尔可夫切换系统的研究也具有十分重要的借鉴意义.

§1.2 研究现状

对于随机切换系统, 稳定性的分析与研究是最基础的也是最重要的. 随机因素的引入使得系统的稳定性越来越多样化, 主要包含依概率稳定性也称为随机稳定性、p 阶矩稳定性、几乎处处稳定性以及依分布稳定性等. 在 Friedman(1975)[11]、Khasminskii(2012)[21]和 Mao(2007)[26]等学者的研究中, 对随机系统的稳定性问题进行了较为全面的阐述.

关于马尔可夫随机切换系统稳定性分析的研究成果已经相当丰富. Deng et al.(2012)[9]利用 Lyapunov 函数方法研究了具有马尔可夫切换的随机反馈控制系统的几乎处处指数稳定性. Zong et al.(2014)[39]研究了由 Lévy 过程驱动的马尔可夫随机切换系统, 利用显式解给出了线性随机切换系统几乎处处指数稳定和 p 阶矩指数稳定的充要条件, 并利用指数鞅不等式和 Borel-Cantelli 引理建立了非线性随机切换系统几乎处处指数稳定的充分条件. Kao et al.(2015)[20]基于 Lyapunov 函数和 Razumikin 方法建立了具有马尔可夫切换的脉冲随机泛函微分方程几乎处处指数稳定和 p 阶矩指数稳定的一些判别条件. Chao et al.(2017)[6]利用 Lyapunov 函数方法推导出具有 Lévy 噪声的一般非线性随机切换系统几乎处处指数稳定和 p 阶矩指数稳定的充分条件. Li & Deng(2017)[23] 引入 ψ 函数, 研究了具有 Lévy 噪声的中立型随机时滞混合系统在一般收敛速率下的几乎处处稳定性, 包括指数稳定性和多项式稳定性, 利用 Lyapunov 函数和非负半鞅收敛定理, 给出了该系统几乎处处稳定的充分条件.

半马尔可夫过程因突破了传统的马尔可夫过程固有的限制, 在实际应用中有着强大的建模能力. 在 Hou et al.(2005,2006,2009)[14–16]的文章中利用 Phase-type 分布来描述各个子系统的逗留时间, 研究了半马尔可夫随机切换系统的随机稳定性, 推广了马尔可夫随机切换系统的结果. 在 Huang & Shi(2011,2013)[17,18]中将各个子系统的逗留时间描述为 Weibull 分布, 研究了具有有界转移速率的半马尔可夫线性随机切换系统的随机稳定性, 利用线性矩阵不等式给出了该系统随机稳定的充分条件. Kundu & Chatterjee(2014)[22]中研究了连续时间切换系统在受限切换条件下的稳定性问题, 利用切换信号的渐近性质给出了该系统几乎处处全局渐近稳定的判别条件. Wu et al.(2017)[35]中放松了对逗留时间的分布限制, 在假设逗留时间服从的分布状态相关的情况下, 利用概率分析的方法研究了半马尔可夫随机切换系统的几乎处处全局渐近稳定性和几乎处处指数稳定性.

在考虑随机切换时, Chatterjee & Liberzon (2007)[7]首次引入多重 Lyapunov 函数方法用于分析非线性系统的渐近稳定性, 随后将其用于有约束的切换信号下随机切换系统的

稳定性分析, 该方法能有效地表示各个子系统之间的差异, 已经广泛应用于马尔可夫和半马尔可夫随机切换系统的稳定性研究. 例如, Chatterjee & Liberzon (2011)[8]中研究了在不同切换信号下非线性随机切换系统的渐近稳定性, 其中切换信号独立于系统状态的随机跳跃, 在允许子系统不稳定的情况下, 建立了切换系统几乎处处意义下、平均意义下以及依概率意义下随机稳定的充分条件. Schioler et al.(2014)[30]在转移速率未必有界的情况下讨论了半马尔可夫随机切换动力系统的广义矩稳定性, 提出了该系统广义矩稳定的充分判别条件.

由于系统内部和外部环境的干扰, 真实的系统不可避免的会受到随机因素的影响, 但是这些随机因素并不总是对系统起破坏作用, 反而在一定条件下可以增强系统的稳定性. Schioler et al.(2015)[29]在假设所有子系统的逗留时间有界的情况下, 考虑了高斯噪声对半马尔可夫随机切换系统稳定性的影响, 推广了 Schioler et al.(2014)[30]的结果. Wang & Zhu(2018)[33]基于多重 Lyapunov 函数方法和半马尔可夫过程的结构, 研究了由布朗运动 (BM) 驱动的半马尔可夫随机切换系统的渐近稳定性, 给出了不受有界转移速率约束的半马尔可夫随机切换系统在大范围内随机渐近稳定的充分条件. Mu & Hu(2021)[28]研究了具有随机脉冲跳跃的半马尔可夫随机切换系统的几乎处处指数稳定性, 利用半马尔可夫过程嵌入链的遍历性和多重 Lyapunov 函数方法, 得到了该系统几乎处处指数稳定的充分条件. Wu et al.(2021)[34]中研究了具有半马尔可夫切换的随机非线性系统的稳定性问题, 针对该系统的几乎处处指数稳定性, 在状态相关且线性可比的假设下, 提出了一种新的随机分析方法, 并建立了充分条件.

Ghosh et al.(1997)[12]中指出马尔可夫过程可以表示为关于泊松随机测度的随机积分, 而在 Ghosh & Goswami(2009)[13]中也建立了半马尔可夫过程的随机积分表示. Wang & Zhu(2019)[32]利用多重 Lyapunov 函数方法以及半马尔可夫过程的积分表示形式, 建立了 BM 驱动的半马尔可夫随机切换系统依分布渐近稳定的充分条件.

以上半马尔可夫过程的研究工作都是基于 BM 驱动的随机切换系统, 但是高斯噪声只是理想的噪声, 现实世界中存在大量的非高斯噪声. 随机连续模型并不适用于对诸如地震、洪涝灾害等突发状况的描述与模拟, 因此需要在随机模型中引入一个 Lévy 噪声. 在 Applebaum(2009)[2]中介绍了 Lévy 过程的定义以及 Lévy 型随机积分的 Itô 公式. Deshpande(2012)[10]中研究了半马尔可夫切换跳跃扩散过程的稳定性问题, 利用半马尔可夫过程的积分表示形式和广义 Itô 公式, 得到了该系统几乎处处指数稳定和 p 矩指数稳定的充分条件. Luo et al.(2020)[24] 和 Yang et al.(2020)[36]研究了具有半马尔可夫切换和 Lévy

噪声的随机泛函微分方程, 基于泛函 Itô 公式、多重 Lyapunov 泛函和非负半鞅收敛定理, 建立了该系统一般收敛速率稳定的判别条件.

受 Zong et al.(2014)[39]和 Mu & Hu(2021)[28]的启发, 本文首先将根据线性系统的显式解, 利用半马尔可夫过程嵌入链的遍历性, 研究带泊松跳的半马尔可夫线性跳跃扩散系统的几乎处处指数稳定性和 p 阶矩指数稳定性. 对于具有一般 Lévy 跳的非线性系统, 在有限爆炸时间下, 将结合 Ghosh & Goswami(2009)[13]中给出的半马尔可夫过程的随机积分表示形式, 建立该系统几乎处处指数稳定的判别条件. 其次, 对于带布朗运动的半马尔可夫随机切换系统, 本文受 Kundu & Chatterjee(2014)[22]的启发, 将利用切换信号的渐近性质研究该系统在一般收敛速率下的稳定性, 并利用 Wu et al.(2017)[35]中概率分析的方法研究该系统的几乎处处全局渐近稳定性.

§1.3 研究内容及创新点

本文主要研究内容分为两个部分, 第一部分为带跳的半马尔可夫随机切换系统的稳定性, 首先研究了带有泊松跳的半马尔可夫线性随机切换系统的几乎处处指数稳定性和 p 阶矩指数稳定性, 其次考虑当跳为一般的 Lévy 过程时, 半马尔可夫非线性随机切换系统几乎处处指数稳定性. 第二部分为 BM 驱动的半马尔可夫随机切换系统在一般收敛速率下的几乎处处稳定性和几乎处处全局渐近稳定性. 本文的主要工作体现在以下两点:

一、对于带跳的半马尔可夫线性随机切换系统的稳定性问题, 本文从系统的显式解着手, 根据各个子系统的活跃时间、子系统之间的切换次数、嵌入马尔科夫链的平稳分布之间的关系, 以及局部鞅的强大数定律, 研究该系统的几乎处处指数稳定性和 p 阶矩指数稳定性. 对于带一般 Lévy 跳的半马尔可夫非线性随机切换系统, 本文利用广义 Itô 公式和指数鞅不等式, 结合多重 Lyapunov 函数方法和 Borel-Cantelli 引理, 讨论该系统的几乎处处指数稳定性. 这部分工作将 Zong et al.(2014)[39]中关于马尔可夫切换的结论推广到半马尔可夫切换.

二、对于 BM 驱动的半马尔可夫随机切换系统的稳定性问题, 本文引入半马尔可夫切换信号的渐近性质和 ψ 型函数来研究该系统在一般收敛速率下的几乎处处稳定性, 另外利用概率分析的方法和多重 Lyapunov 函数方法研究该系统的几乎处处全局渐近稳定性. 对于 $a, b > 0$, 当 $\psi(t)$ 取 e^{at} 时系统是几乎处处指数稳定的, $\psi(t)$ 取 $(1+t)^b$ 时系统是几乎处处多项式稳定的, 因此本文的结果更加一般化.

§1.4 文章结构

本文的具体内容安排如下:

第一章, 介绍了课题的研究背景和研究意义, 以及关于马尔可夫随机切换系统和半马尔可夫随机切换系统的国内外研究现状.

第二章, 介绍了半马尔可夫过程的基本概念、半马尔可夫过程随机积分的表示形式以及证明中需要用到的引理和假设. 在本章给出了在有限状态空间中带泊松跳的半马尔可夫线性随机切换系统几乎处处指数稳定和 p 阶矩指数稳定的充要条件, 其次给出了带有一般 Lévy 跳的半马尔可夫非线性随机切换系统的几乎处处指数稳定的充分条件.

第三章, 讨论了 BM 驱动的半马尔可夫随机切换系统的稳定性问题, 给出了当状态空间有限时, 该系统具有一般收敛速率稳定性和几乎处处全局渐近稳定性的充分条件.

第四章, 对本文研究的问题进行总结与展望, 指出本文的不足之处以及进一步可以展开研究的问题.

第二章　具有半马尔可夫切换的跳跃扩散系统的稳定性

本章主要研究由 Lévy 过程驱动的半马尔可夫随机切换系统的稳定性. 本章结构安排如下: 第一部分是预备知识, 将介绍一些符号和定义. 第二部分将研究带有泊松跳的半马尔可夫线性随机切换系统的几乎处处指数稳定性和 p 阶矩指数稳定性. 第三部分将利用多重 Lyapunov 函数方法研究半马尔可夫非线性跳跃扩散系统的几乎处处指数稳定性. 第四部分是本章小结.

§2.1　预备知识

在本文中, 除非另有说明, 我们使用下列符号. 令 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的欧氏范数. 记 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, $\mathbb{R}^+=[0,\infty)$. 若 A 是一个向量或矩阵, 它的转置为 A^T. 若 A 是一个矩阵, 则它的迹范数为 $||A||=\sqrt{trace(A^TA)}$.

带流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ 的 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是一个完备的概率空间. 令 $C^{2,1}(\mathbb{R}^n\times S\times\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^+)$ 表示 $\mathbb{R}^n\times S\times\mathbb{R}^+$ 上所有非负函数 $V(x,i,t)$ 的集合, 且该函数关于 x 二阶可导, 关于 t 连续可微. $r(t)$ 是取值于有限状态空间 $S=\{1,2,\cdots,N\}$ 的切换信号, $\{\tau_n,n\geq 0\}$ 表示信号的切换时刻. 为了方便, 给出以下关于随机切换信号 $r(t)$ 的记号说明. $\mathcal{T}_i(t)$ 表示在 $(0,t]$ 内系统停留在状态 i 的总时间, $\mathcal{N}(t)$ 表示在 $(0,t]$ 内系统发生切换的总次数, $\mathcal{N}_{ij}(t)$ 表示 $(0,t]$ 内从状态 i 切换到状态 j 的次数. 以下预备知识可参考 Mu & Hu(2021)[28]和 Wang & Zhu(2019)[32].

定义 2.1.1 *切换信号 $\{r(t),\ t\geq 0\}$ 被称为半马氏切换, 若令 $r(t)=r_n$, $\tau_n\leq t\leq\tau_{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$, 有以下两条成立:*

(i)离散时间的过程 $\{r_n,n\in\mathbb{N}\}$ 是一个马氏链, 转移概率矩阵为 $\mathbb{P}=[p_{ij}]_{N\times N}$, 其中

$$p_{ij}=\mathbb{P}\left\{r\left(\tau_{n+1}\right)=j|r\left(\tau_n\right)=i\right\},$$

表示 $\{r_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ 在 τ_{n+1} 时刻从 i 转移到 j 的概率.

(ii) 逗留时间 $s(n)=\tau_{n+1}-\tau_n$ 的分布函数定义为

$$F_{ij}(t)=\mathbb{P}\left\{s(n)\leq t|r_n=i,r_{n+1}=j\right\},\ i,\ j\in S,\ t\geq 0,$$

$F_{ij}(t)$ 具有连续可微的密度函数 $f_{ij}(t)$, 并且不依赖于 n.

令 $s_i(n)$ 表示第 n 次切换到状态 i 的逗留时间, $i \in S$, 则对于 $t \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ 它的分布函数为

$$\begin{aligned} F(t|i): &= \mathbb{P}\{s_i(n) \leq t\} \\ &= \mathbb{P}\{\tau_{n+1} - \tau_n \leq t | r_n = i\} \\ &= \sum_{j \in S} F_{ij}(t) p_{ij}, \end{aligned}$$

记 $F(t|i)$ 的密度函数为 $f(t|i)$.

设 $p_{ii} = 0$, 嵌入链 $\{r_n, n \in \mathbb{N}\}$ 是不可约的, 其平稳分布为 $\bar{\pi}$, 满足

$$\bar{\pi} P = \bar{\pi}, \ \sum_{i \in S} \bar{\pi}_i = 1.$$

设对 $\forall n \geq 0$, $\tau_{n+1} - \tau_n$ 和 $r(\tau_{n+1})$ 关于 $r(\tau_n)$ 条件独立, 即

$$\mathbb{P}\{r(\tau_{n+1}) = j, \tau_{n+1} - \tau_n \leq t | r(\tau_n) = i\} = p_{ij} F(t|i), \ \forall n \geq 0.$$

令 $h := h(t) = t - \sup\{\tau_n : \tau_n \leq t, n \geq 0\}$, 经简单计算可得

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{r(t) = i\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{r(t) = i, t \in [\tau_n, \tau_{n+1})\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{r(t) = i, r(\tau_n) = i, t \in [\tau_n, \tau_{n+1})\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{s_i(n) > t - \tau_n, t \in [\tau_n, \tau_{n+1})\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{s_i(n) > h, t \in [\tau_n, \tau_{n+1})\} \\ &= \mathbb{P}\{s_i(n) > h\} \\ &= 1 - F(h|i). \end{aligned}$$

类似地, 对于 $\forall i, \ j \in S$,

$$\mathbb{P}\{r(t) = i, r(t + \Delta t) = j\} = \begin{cases} [F(h + \Delta t|i) - F(h|i)] p_{ij}, & i \neq j, \\ 1 - F(h + \Delta t|i), & i = j. \end{cases}$$