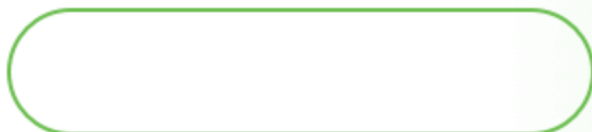




线性代数第二章

方阵的行列式b



目录

- 方阵与行列式基本概念
- 方阵行列式计算方法
- 方阵行列式性质与定理
- 方阵可逆条件与逆矩阵求法
- 克拉默法则在解线性方程组中应用
- 总结与拓展





01

方阵与行列式基本概念





方阵定义及性质

方阵定义：行数与列数相等的矩阵称为方阵。



方阵性质

方阵的转置仍是方阵。

方阵与标量相乘，结果仍是方阵。



行列式定义及性质

01

行列式定义：由 n 阶方阵的元素所构成的代数和，称为该方阵的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det(A)$ 。

02

行列式性质

03

行列式与它的转置行列式相等。

04

互换行列式的两行（列），行列式变号。

05

行列式的某一行（列）的所有的元素都乘以同一数 k ，等于用数 k 乘此行列式。

06

行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于零。





特殊方阵与行列式关系

对角矩阵

除主对角线外的元素全为零的方阵。
其行列式等于主对角线上元素的乘积。

正交矩阵

满足 $AA^T=A^TA=I$ 的方阵。其行列式的值为 ± 1 。

上(下)三角矩阵

主对角线以下(以上)的元素全为零的方阵。其行列式也等于主对角线上元素的乘积。

伴随矩阵

由n阶方阵A的行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的n阶矩阵称为A的伴随矩阵，记作 A^* 。有公式 $AA^*=A^*A=|A|I$ 。



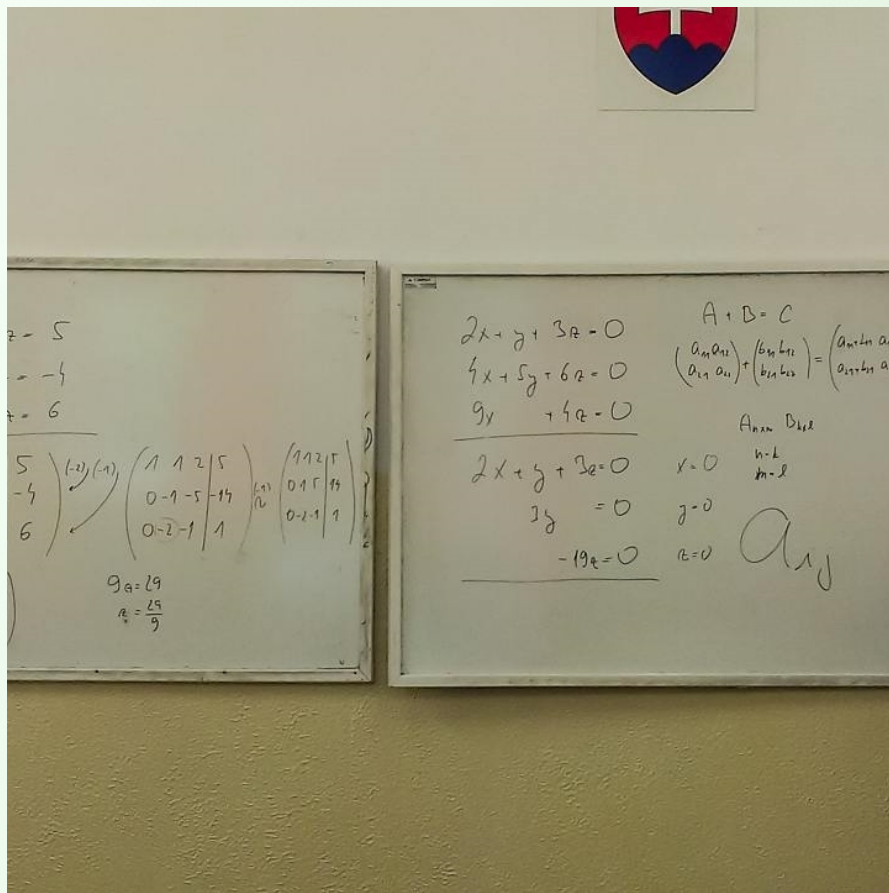
02

方阵行列式计算方法





直接法求方阵行列式



定义法

根据n阶行列式的定义，直接计算元素乘积的代数和。适用于低阶行列式。

对角线法则

对于2阶和3阶行列式，可以直接使用对角线法则进行计算。

展开法

利用行列式的性质，将高阶行列式降为低阶行列式进行计算。适用于任意阶数的行列式。



间接法求方阵行列式

01

利用性质化简

利用行列式的性质，如交换两行（列）、提公因子、拆项等，将原行列式化简为易计算的形式。

02

递推法

根据已知低阶行列式的值，通过递推关系式求得高阶行列式的值。

03

数学归纳法

对于具有某种规律性的行列式，可以使用数学归纳法进行证明和计算。



克拉默法则应用举例

01

求解线性方程组

利用克拉默法则，可以求解具有唯一解的n元线性方程组。具体步骤包括构造系数矩阵和增广矩阵、计算各阶主子式和克拉默法则中的分母与分子、求解未知量。

02

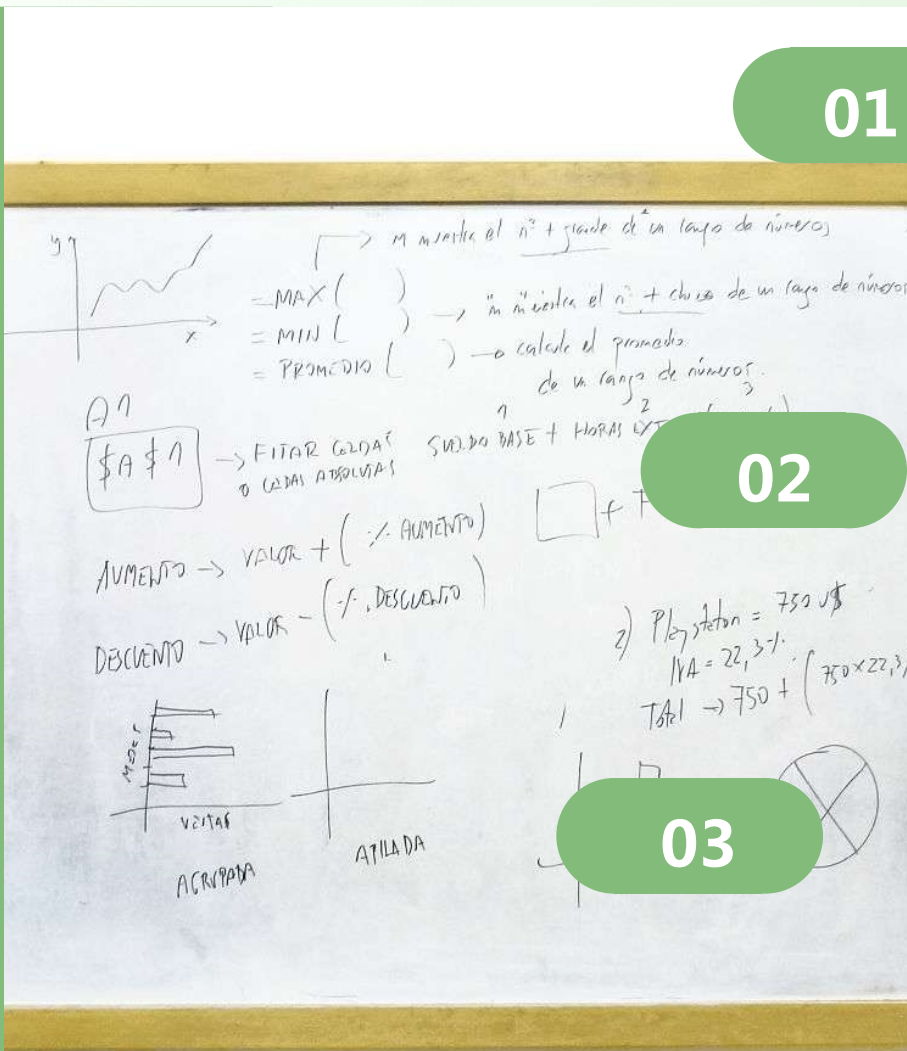
判断线性方程组的解的情况

通过比较系数矩阵和增广矩阵的秩，以及计算克拉默法则中的分母，可以判断线性方程组的解的情况，包括有唯一解、无解或无穷多解。

03

求解矩阵的逆

当矩阵A的行列式 $|A| \neq 0$ 时，可以利用克拉默法则求解矩阵A的逆矩阵 A^{-1} 。具体步骤包括构造增广矩阵、计算各阶主子式和克拉默法则中的分母与分子、求解逆矩阵的元素。





03

方阵行列式性质与定理





行列式基本性质



01

行列式与它的转置行列式相等。

02

互换行列式的两行（列），行列式变号。

03

如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零。



行列式基本性质

The image shows a handwritten mathematical derivation. It features a large determinant symbol with a sum in one of its columns. The expression is:
$$\begin{vmatrix} \frac{10}{1 + (\frac{\beta}{\alpha})^2} & \frac{10}{1 + (\frac{\alpha}{\beta})^2} \\ \frac{10}{1 + 2(\frac{\beta}{\alpha})^2} & \frac{10}{0,5 + 0,25(\frac{\alpha}{\beta})^2} \\ \dots & \dots \end{vmatrix}$$
 The text below the determinant indicates that this is equal to the sum of two determinants:
$$\begin{vmatrix} \frac{10}{1 + (\frac{\beta}{\alpha})^2} & \frac{10}{1 + (\frac{\alpha}{\beta})^2} \\ \frac{10}{1 + 2(\frac{\beta}{\alpha})^2} & \frac{10}{0,5 + 0,25(\frac{\alpha}{\beta})^2} \\ \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{10}{1 + (\frac{\beta}{\alpha})^2} & \frac{10}{1 + (\frac{\alpha}{\beta})^2} \\ \frac{10}{1 + 2(\frac{\beta}{\alpha})^2} & \frac{10}{0,5 + 0,25(\frac{\alpha}{\beta})^2} \\ \dots & \dots \end{vmatrix}$$

- 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k ，等于用数 k 乘此行列式。
- 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于零。
- 若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和，例如第 i 列的元素都是两数之和： $D = | a_{11} + b_{11}, a_{21} + b_{21}, \dots, a_{n1} + b_{n1}, a_{12}, \dots, a_{n2}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{nn} |$ 则 D 等于下列两个行列式之和： $D = | a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}, a_{12}, \dots, a_{n2}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{nn} | + | b_{11}, b_{21}, \dots, b_{n1}, a_{12}, \dots, a_{n2}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{nn} |$

行列式按行（列）展开定理



01

余子式

在 n 阶行列式中，把 (i,j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij} 。

02

代数余子式

记作 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ ，其中 M_{ij} 是元素 a_{ij} 的余子式。

03

行列式按行（列）展开法则

行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即 $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$ 或 $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$ 。



拉普拉斯定理及应用

k 阶子式

在 n 阶行列式中，任取 k 行与 k 列（其中 $k \leq n$ ），位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在原行列式中的相对位置所构成的 k 阶行列式，称为原行列式的一个 k 阶子式。

拉普拉斯定理

在 n 阶行列式中，任意取定 k 行（列），由这 k 行（列）元素所构成的一切 k 阶子式的代数和等于行列式的值。

应用

拉普拉斯定理可以用来简化行列式的计算，特别是当行列式中包含许多零元素时。通过选择合适的子式和代数余子式，可以大大减少计算量。



04

方阵可逆条件与逆矩阵求法





方阵可逆条件及判定方法

方阵可逆的充分必要条件是行列式不等于零。

对于n阶方阵A，若存在n阶方阵B，使得 $AB=BA=E$ （E为单位矩阵），则称A是可逆的，B是A的逆矩阵。

判定方法：计算方阵的行列式，若行列式不等于零，则方阵可逆；若行列式等于零，则方阵不可逆。



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/185042023032011131>