专题 2.5　勾股定理与线段长

典例精析

【典例 1】如图，在△ABC 中，$AB=AC$，$AD\perp BC$ 于点 D，$\angle CBE=45°$，BE 分别交 AC，AD 于点 E、F.

（1）如图 1，若 $AB=13$，$BC=10$，求 AF 的长度；

（2）如图 2，若 $AF=BC$，求证：$BF^2+EF^2=AE^2$.

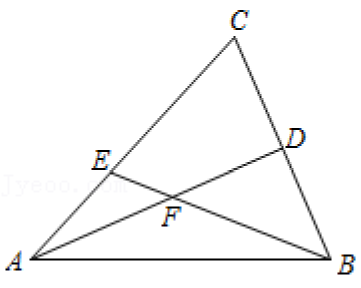


图1

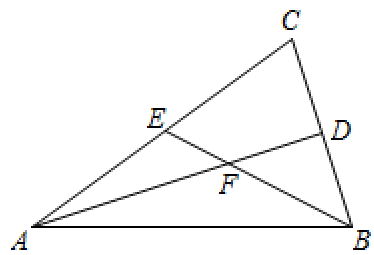


图2

【思路点拨】

（1）先根据等腰三角形三线合一的性质得 $BD=5$，由勾股定理计算可得 AD 的长，由等腰直角三角形性质得 $DF=5$，最后由线段的差可得结论；

（2）如图 2，作辅助线，构建全等三角形，证明△CHB≌△AEF（SAS），得 $AE=CH$，$\angle AEF=\angle BHC$，由等腰三角形三线合一的性质得 $EF=FH$，最后由勾股定理和等量代换可得结论.

【解题过程】

解：（1）如图 1，∵$AB=AC$，$AD\perp BC$，

∴$BD=CD$，

∵$BC=10$，

∴$BD=5$，

Rt△ABD 中，∵$AB=13$，

∴$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$，

Rt△BDF 中，∵$\angle CBE=45°$，

∴△BDF 是等腰直角三角形，

∴$DF=BD=5$，

∴$AF=AD-DF=12-5=7$；

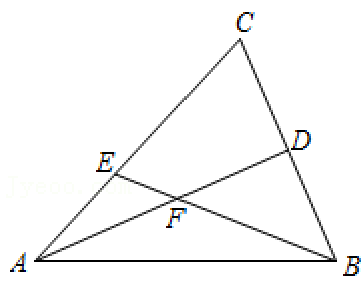


图1

（2）证明：如图 2，在 BF 上取一点 H，使 $BH=EF$，连接 CF、CH，

在△CHB 和△AEF 中，

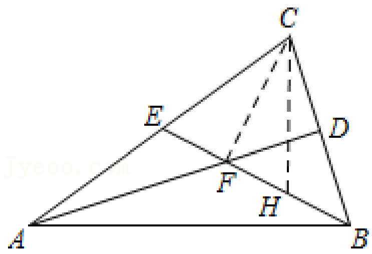


图2

$\because\begin{cases}BH=EF\\ \angle CBH=\angle AFE=45°,\\ BC=AF\end{cases}$

∴△CHB≌△AEF（SAS），

∴$AE=CH$，$\angle AEF=\angle BHC$，

∴$\angle CEF=\angle CHE$，

∴$CE=CH$，

∵$BD=CD$，$FD\perp BC$，

∴$CF=BF$，

∴$\angle CFD=\angle BFD=45°$，

∴$\angle CFB=90°$，

∴$EF=FH$，

Rt△CFH 中，由勾股定理得：$CF^2+FH^2=CH^2$，

∴$BF^2+EF^2=AE^2$.

学霸必刷

1．（2021 秋•泗阳县期末）已知直角三角形的两条边长分别是 3 和 4，那么这个三角形的第三条边的长为（　　）

A．5　　　　B．25　　　　C．$\sqrt{7}$　　　　D．5 或$\sqrt{7}$

【思路点拨】

分两种情况：当 3 和 4 都是直角边时；当 4 是斜边长时；分别利用勾股定理计算出第三边长即可.

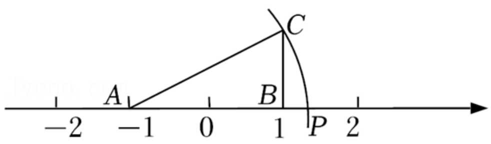
【解题过程】

解：当 3 和 4 都是直角边时，第三边长为：$\sqrt{3^2+4^2}=5$；

当 4 是斜边长时，第三边长为：$\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$.

故选：D.

2．（2021 秋•苏州期末）如图，数轴上点 A 表示的数是 - 1，点 B 表示的数是 1，$BC=1$，$\angle ABC=90°$，以点 A 为圆心，AC 长为半径画弧，与数轴交于原点右侧的点 P，则点 P 表示的数是（　　）



A. $\sqrt{5}-1$　　B. $\sqrt{5}-2$　　C. $\sqrt{3}-1$　　D. $2-\sqrt{3}$

【思路点拨】

首先根据勾股定理求出 AC 长，再根据圆的半径相等可知 $AP=AC$，即可得出答案．

【解题过程】

解：$\because BC\perp AB$，

$\therefore\angle ABC=90°$，

$\therefore AC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

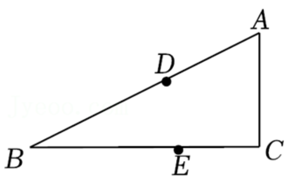
$\because$以 A 为圆心，AC 为半径作弧交数轴于点 P，

$\therefore AP=AC=\sqrt{5}$，

$\therefore$点 P 表示的数是 $-1+\sqrt{5}$；

故选：A．

3．（2021 秋•莲池区期末）如图，作 Rt△ABC，$\angle C=90°$，$BC=2AC$；以 A 为圆心，AC 长为半径画弧，交斜边 AB 于点 D；以 B 为圆心，以 BD 长为半径画弧，交 BC 于点 E．若 $BC=6$，则 $CE=$（　　）



A. $9-3\sqrt{5}$　　B. $3\sqrt{5}-6$　　C. $3\sqrt{5}-3$　　D. $3\sqrt{5}-1$

【思路点拨】

根据题意勾股定理求出 AB 的长，由 $AD=AC$ 得出 BD，再根据 $BE=BD$，即可求出 CE 的长．

【解题过程】

解：$\because BC=2AC$，$BC=6$，

$\therefore AC=3$，

由勾股定理得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$，

$\because AC=AD$，

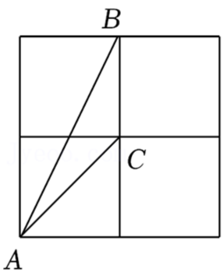
$\therefore BD=AB-AD=3\sqrt{5}-3$，

$\because BE=BD$，

∴$CE=BC-BE=6-(3\sqrt{5}-3)=9-3\sqrt{5}$，

故选：A．

4．（2021 秋•盐田区校级期末）如图，在 2×2 的网格中，有一个格点△ABC，若每个小正方形的边长为 1，则△ABC 的边 AB 上的高为（　　）



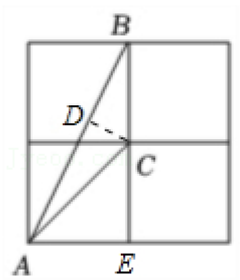
A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{10}$　　D．1

【思路点拨】

如图，过点 C 作 $CD\perp AB$ 于 D，首先利用勾股定理求得 AB 的长度，然后利用等面积法求得 CD 的长度．

【解题过程】

解：如图，过点 C 作 $CD\perp AB$ 于 D，



在直角△ABE 中，∠AEB＝90°，AE＝1，BE＝2，则由勾股定理知，$AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$．

由$\frac{1}{2}AE\bullet BC=\frac{1}{2}AB\bullet CD$ 知，$CD=\frac{AE\cdot BC}{AB}=\frac{1\times1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$．

故选：B．

5．（2021 秋•渝中区校级期末）在△ABC 中，AB＝10，AC＝17，BC 边上的高 AD＝8，则△ABC 的面积为（　　）

A．72　　B．84　　C．36 或 84　　D．72 或 84

【思路点拨】

由勾股定理分别求出 BD 和 CD，分 AD 在三角形的内部和 AD 在三角形的外部两种情况，由三角形面积公式计算即可．

【解题过程】

解：在 Rt△ABD 中，由勾股定理得：$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$，

在 Rt△ACD 中，由勾股定理得：$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{17^2-8^2}=15$，

分两种情况：

①如图 1，当 AD 在△ABC 的内部时，

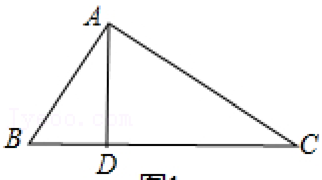


图1

BC＝15+6＝21，

则△ABC 的面积 $=\frac{1}{2}BC\times AD=\frac{1}{2}\times21\times8=84$；

②如图 2，当 AD 在△ABC 的外部时，

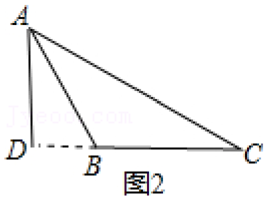


图2

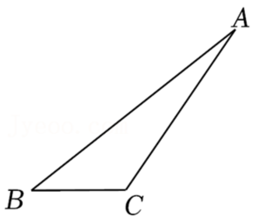
BC＝15﹣6＝9，

则△ABC 的面积 $=\frac{1}{2}BC\times AD=\frac{1}{2}\times9\times8=36$；

综上所述，△ABC 的面积为 36 或 84，

故选：C．

6．（2021 秋•南京期末）如图，在△ABC 中，AB＝20，AC＝15，BC＝7，则点 A 到 BC 的距离是 _____．

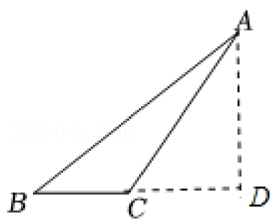


【思路点拨】

过 A 作 $AD\perp BC$ 交 BC 的延长线于 D，根据勾股定理即可得到结论．

【解题过程】

解：过 A 作 $AD\perp BC$ 交 BC 的延长线于 D，



$\therefore \angle D=90°$，

$\therefore AB^2-BD^2=AD^2=AC^2-CD^2$，

$\because AB=20$，$AC=15$，$BC=7$，

$\therefore 20^2-(7+CD)^2=15^2-CD^2$，

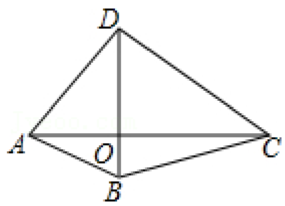
$\therefore CD=9$，

$\therefore AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{15^2-9^2}=12$，

∴点 A 到 BC 的距离是 12，

故答案为：12．

7．（2021 秋•乾县期末）如图，四边形 $ABCD$ 中，$AC\perp BD$ 于 O，$AB=6$，$BC=8$，$CD=10$，则 AD =______．



【思路点拨】

利用勾股定理得到: $AO^2+BO^2=6^2$，$CO^2+BO^2=8^2$，$DO^2+CO^2=10^2$，将三个等式相加，求得 AO^2+DO^2 的值即可．

【解题过程】

解：$\because AC\perp BD$，

∴由勾股定理得到：$AO^2+BO^2=6^2$①，

$CO^2+BO^2=8^2$②，

$DO^2+CO^2=10^2$③，

由①+②+③得：$AO^2+DO^2+2(CO^2+BO^2)=6^2+8^2+10^2$，

即 $AO^2+DO^2+2\times8^2=6^2+8^2+10^2$，

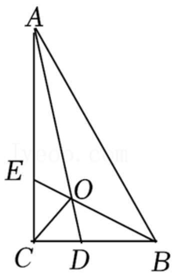
$\therefore AO^2+DO^2=72$，

$\therefore AD^2=72$，

$\therefore AD=6\sqrt{2}$.

故答案为：$6\sqrt{2}$.

8．（2021秋•新吴区期末）如图，在△ABC中，$\angle ACB=90°$，$AC=8$，$BC=6$，△ABC的两条角平分线AD、BE相交于点O，连接CO，则CO的长为 ______.

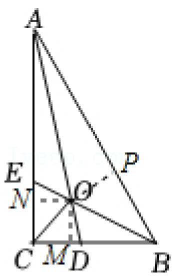


【思路点拨】

过O作$OM\perp BC$于M，$OP\perp AB$于P，$ON\perp AC$于N，根据角平分线的想知道的$OM=ON$，推出OC平分$\angle ACB$，得到△OCM是等腰直角三角形，根据勾股定理和三角形的面积公式即可得到结论.

【解题过程】

解：过O作$OM\perp BC$于M，$OP\perp AB$于P，$ON\perp AC$于N，



$\because AD$和BE是△ABC的角平分线，

$\therefore OP=OM$，$ON=OP$，

$\therefore OM=ON$，

$\therefore OC$平分$\angle ACB$，

$\because \angle ACB=90°$，

$\therefore \angle ACO=\angle BCO=45°$，

$\therefore$△OCM是等腰直角三角形，

在△ABC中，$\angle ACB=90°$，$AC=8$，$BC=6$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\times$（$AB+AC+BC$）$\cdot OM$，

∴6×8＝（10+6+8）×OM，

∴OM＝2，

∴$OC=\sqrt{OM^2+CM^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

故答案为：$2\sqrt{2}$．

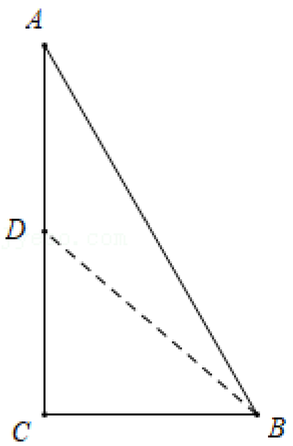
9．（2021秋•徐汇区期末）如果三角形有一边上的中线长恰好等于这边的长，那么称这个三角形为“好玩三角形”，在Rt△ABC中，∠C＝90°，AC＝2，若Rt△ABC是“好玩三角形”，则AB＝________．

【思路点拨】

分两种情形：分别是AC上的中线BD＝AC，BC上的中线AE＝BC，分别画出图形，利用勾股定理解决问题即可．

【解题过程】

解：如图，当AC上的中线BD＝AC时，



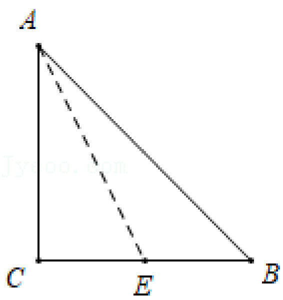
∵AC＝2，

∴BD＝2，CD＝1，

在Rt△BDC中，由勾股定理得，$BC=\sqrt{3}$，

在Rt△ABC中，由勾股定理得，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}$；

当BC上的中线AE＝BC时，设CE＝x，则AE＝BC＝$2x$，



在 Rt△ACE 中，由勾股定理得，$x^2+2^2=(2x)^2$，

∵$x>0$，

∴$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

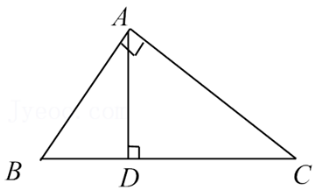
∴$BC=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

在 Rt△ABC 中，由勾股定理得，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2^2+(\frac{4\sqrt{3}}{3})^2}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$；

∵直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，故不符合题意，

故答案为：$\sqrt{7}$或$\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

10．（2021 秋•鼓楼区期末）如图，在△ABC 中，∠BAC＝90°，AB＝15，AC＝20，AD⊥BC，垂足为 D．求 AD，BD 的长．



【思路点拨】

先根据勾股定理求出 BC 的长，再利用三角形面积公式得出$\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}BC\cdot AD$，然后即可求出 AD.

【解题过程】

解：∵∠BAC＝90°，AB＝15，AC＝20，

∴$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=25$，

∵$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}BC\cdot AD$，

∴$AB\cdot AC=BC\cdot AD$，

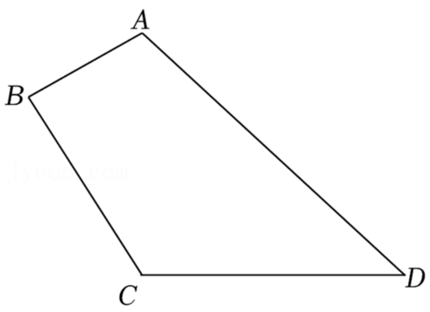
∴$15\times 20=25AD$，

∴$AD=12$；

∵$AD\perp BC$，

∴$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{15^2-12^2}=9$.

11．（2020 秋•宝山区校级期末）如图，在四边形 $ABCD$ 中，∠ABC＝90°，∠BCD＝120°，AB＝1，$BC=\sqrt{3}$，CD＝2，求 AD 的长．

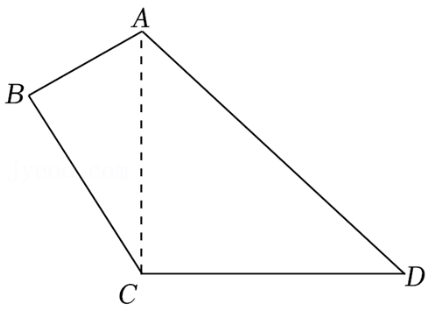


【思路点拨】

在直角三角形 ABC 中勾股定理求出 AC 的长度，在直角三角形 ACD 中利用勾股定理求出 AD 的长即可.

【解题过程】

解：如图，连接 AC，



$\because \angle ABC=90°$，$AB=1$，$BC=\sqrt{3}$，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$.

$\therefore AB=\frac{1}{2}AC$.

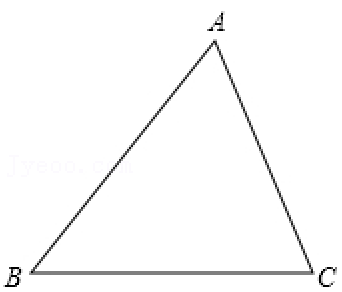
又$\because \angle BCD=120°$，

$\therefore \angle ACD=120°-30°=90°$.

$\because CD=2$，

$\therefore AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，即 $AD=2\sqrt{2}$.

12．（2021 秋•靖江市校级期中）如图，在△ABC 中，$AB=25$，$BC=28$，$AC=17$，求△ABC 的面积．



【思路点拨】