运筹学

- 四川农业大学 建筑与城乡规划学院
- 主讲人：曹云忠

第 1 章　线性规划及单纯形法

■ 教学目标

■ （1）**掌握**线性规划的概念和建模方法；

■ （2）**掌握**单纯形法的基本原理和方法。

■ 重点

- 线性规划的**单纯形法**、**用单纯形表求解线性规划问题**、非标准形式的几种具体情形及其相应的标准化方法。

■ 难点

- 线性规划**解的基本概念**，例如**基**、**基变量**、**基解**、**基可行解和可行基**；**单纯形法**、**退化和两阶段单纯型法**。

■ 教学方法

- 理论讲述、案例讨论、课堂练习。

四川農業大學

教学内容

1.1 线性规划的数学模型

- **线性规划**（Linear Programming, 缩写为LP）

通常研究资源的最优利用、设备最佳运行等问题。例如：

- 当任务或目标确定后，如何统筹兼顾，合理安排，用最少的资源（如资金、设备、原标材料、人工、时间等）去完成确定的任务或目标；
- 企业在一定的资源条件限制下，如何组织安排生产获得最好的经济效益（如产品量最多、利润最大）。

线性规划应用例子--建立模型

- 例1-1：生产计划问题
  - 某企业在计划期内计划生产甲、乙两种产品。按工艺资料规定，每件产品甲需要消耗材料A 2公斤，消耗材料B 1公斤，每件产品乙需要消耗材料A 1公斤，消耗材料B 1.5公斤。
  - 已知在计划期内可供材料分别为40、30公斤；每生产一件甲、乙两产品，企业可获得利润分别为300、400元。
  - 假定市场需求无限制。企业决策者应如何安排生产计划，使企业在计划期内总的利润收入最大。

1.1 线性规划的数学模型--应用例子

解：设x_1、x_2分别为甲、乙产品的产量，数学模型为：

表1-1

产品 资源	甲	乙	现有资源
材料A	2	1	40
材料B	1	1.5	30
利润（元/件）	300	400	

$$\max Z = 300x_1 + 400x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 40 \\ x_1 + 1.5x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.1 线性规划的数学模型--应用例子

四川农业大学

■ 线性规划的数学模型的构成三要素

- 决策变量 ---Decision variables
- 目标函数---Objective function
- 约束条件---Constraints

■ 线性规划模型的辨别

1．解决问题的目标函数是多个决策变量的线性函数，通常是求最大值或 最小值；

2．解决问题的约束条件是一组多个决策变量的线性不等式或等式。

■ 例1-2：合理用料问题

某汽车需要用甲、乙、丙三种规格的轴各一根，这些轴的规格分别是1.5，1，0.7（m），这些轴需要用同一种圆钢来做，圆钢长度为4 m。现在要制造1000辆汽车，最少要用多少圆钢来生产这些轴？

解：这是一个条材下料问题（套裁下料），设切口宽度为零。

- 设一根圆钢切割成甲、乙、丙三种轴的根数分别为y1，y2，y3,则切割方式可用不等式 $1.5y1+y2+0.7y3 \le 4$表示，求这个不等式关于y1，y2，y3的非负整数解。
- 这样的非负整数解共有10组，也就是有10种下料方式，如表2-2所示。

1.1 线性规划的数学模型--应用例子

■ 表1-2 套裁下料方案

规格＼方案	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	需求量
甲 (y_1根)	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	1000
乙 (y_2根)	1	0	2	1	0	4	3	2	1	0	1000
丙 (y_3根)	0	1	0	2	3	0	1	2	4	5	1000
余料（m）	0	0.3	0.5	0.1	o.4	0	0.3	0.6	0.2	0.5	

x_1 x_2 …… x_{10}

1.1 线性规划的数学模型--应用例子

- 设x_j (j=1,2...,10)为第 j 种下料方案所用圆钢的根数。则用料最少数学模型为:

$$\min Z=\sum_{j=1}^{10} x_j$$

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5\geq 1000 \\ x_1+2x_3+x_4+4x_6+3x_7+2x_8+x_9\geq 1000 \\ x_2+2x_4+3x_5+x_7+2x_8+4x_9+5x_{10}\geq 1000 \\ x_j\geq 0,\ j=1,2...,10 \end{cases}$$

1	X1	500
2	X2	0
3	X3	0
4	X4	0
5	X5	0
6	X6	62.5
7	X7	0
8	X8	0
9	X9	250
10	X10	0

Z = 812.5

1.1 线性规划的数学模型---一般模型

■ 线性规划的一般模型

一般地，设线性规划数学模型中，有m个约束，有n个决策变量 x_j, j=1,2…,n，目标函数的变量系数用 c_j表示, c_j称为价值系数。约束条件的变量系数用 a_{ij}表示，a_{ij}称为工艺系数。约束条件右端的常数用 b_i表示，b_i称为资源限量。则线性规划数学模型的一般表达式可写成：

$$\max(\min)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le (或 =, \ge) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le (或 =, \ge) b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le (或 =, \ge) b_m \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

$$\max(\min)Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le (或 =, \ge) b_i \qquad i = 1, 2, \cdots, m \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

在实际中一般 $x_j \ge 0$, 但有时$x_j \le 0$ 或 x_j无符号限制。

1.2 图解法

■ 图解法的步骤

1. 求可行解集合。分别求出满足每个约束条件和变量非负要求的区域，其交集就是可行解集合，或称为**可行域。**

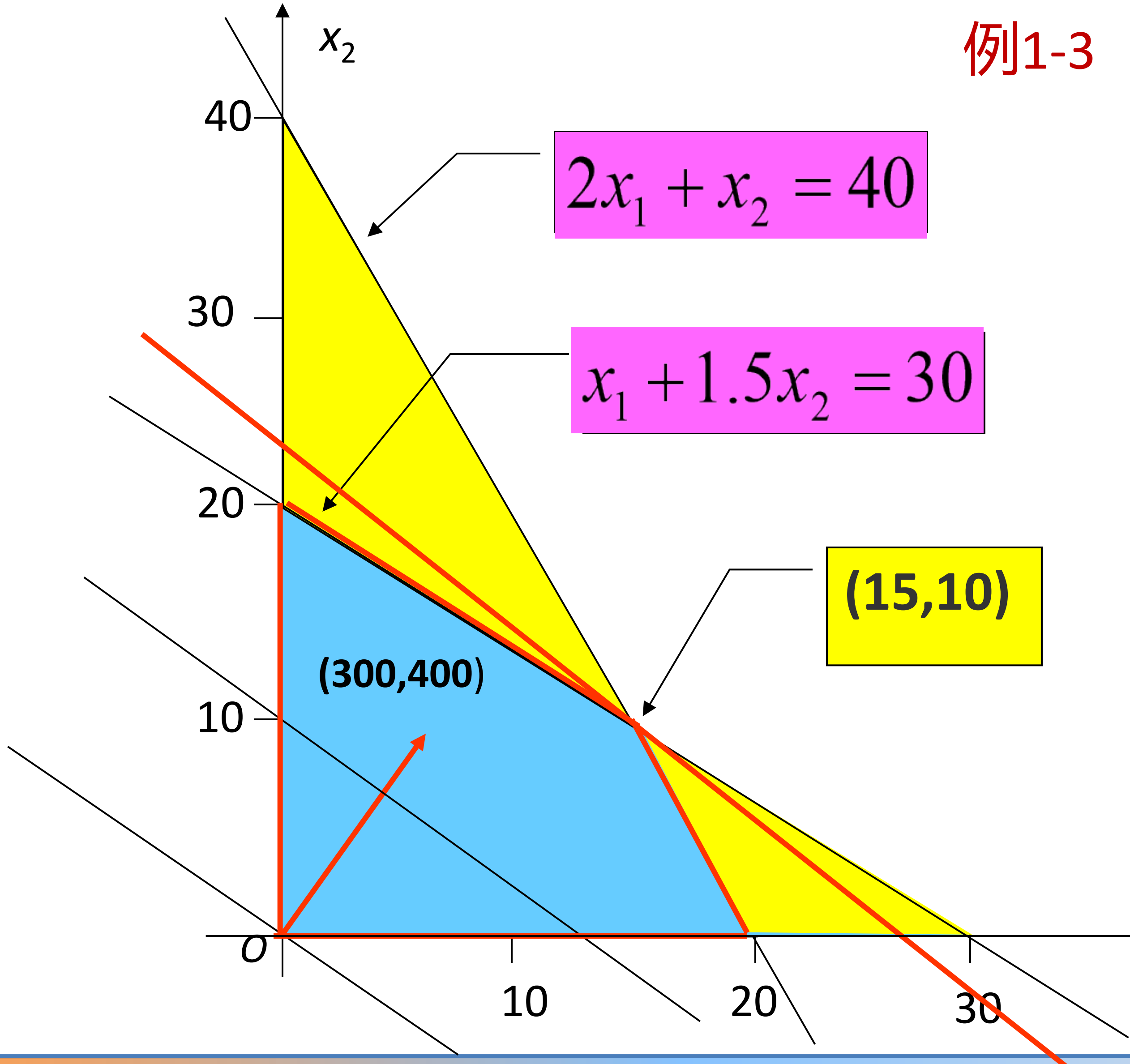
2. 绘制目标函数图形。先过原点作一条矢量指向点（c_1,c_2），矢量的方向就是目标函数增加的方向，称为梯度方向，再作一条与矢量垂直的直线，这条直线就是目标函数图形；

3.求最优解。依据目标函数求最大或最小移动目标函数直线，直线与可行域相交的点对应的坐标就是最优解。

一般地，将目标函数直线放在可行域中

- 求最大值时直线沿着矢量方向移动
- 求最小值时沿着矢量的反方向移动

1.2 图解法



例1-3

$$\max Z = 300x_1 + 400x_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 40 \\ x_1 + 1.5x_2 &\le 30 \\ x_1 \ge 0, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

最优解 X=(15,10)

最优值 Z=8500

1.3 线性规划的标准型

■ 在用单纯法求解线性规划问题时，为了讨论问题方便，需将线性规划模型化为统一的标准形式。

■ 线性规划问题的标准型为:

1．目标函数求最大值（或求最小值）

2．约束条件都为等式方程

3．变量 x_j 非负

4．常数 b_i 非负

1.3 线性规划的标准型

$$\max\ Z = c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \square + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}x_2 + \square + a_{2n}x_n = b_2 \\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \square + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\square\ ,n \\ b_i \geq 0, i = 1,2,\square\ ,m \end{cases}$$

1.3 线性规划的标准型

- **求和形式**

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i & i=1,2,\cdots,m\\ x_j\ge 0, j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

- **矩阵形式**

$$\max Z=CX$$

$$\begin{cases}AX=b\\ X\ge 0\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix};\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix};\quad b=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix};\quad C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

通常 X 记为：$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，称 A 为约束方程的系数矩阵，m 是约束方程的个数，n 是决策变量的个数，一般情况 $m\le n$，且秩 $r(A)=m$。

例1-4：将下列线性规划化为标准型

$$\min Z = -x_1 + x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 8 & (1) \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 3 & (2) \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \le -5 & (3) \\ x_1 \ge 0、x_2 \ge 0、x_3 \text{ 无符号要求} \end{cases}$$

解：（1）因为x_3无符号要求，即x_3取正值也可取负值，标准型中要求变量非负，所以令

$$x_3 = x_3' - x_3'', \quad \text{其中 } x_3', x_3'' \ge 0$$

四川農業大學

$$\min\ Z = -x_1 + x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 8 & (1) \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 3 & (2) \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \le -5 & (3) \\ x_1 \ge 0、x_2 \ge 0、x_3\ \text{无符号要求} & \end{cases}$$

(2) 约束条件(1)是 ≤ 号，则在 ≤ 左端加入松弛变量 (slack variable) x_4 ($x_4 \ge 0$), 化为等式；

(3) 约束条件(2)是 ≥ 号，则在 ≥ 号左端减去剩余变量(Surplus variable) x_5($x_5 \ge 0$)。也称松弛变量；

(4) 约束条件(3)是 ≤ 号且常数项为负数，因此在 ≤ 左边加入松弛变量x_6 ($x_6 \ge 0$)，同时两边乘以 - 1。

(5) 目标函数是最小值，为了化为求最大值，令Z′= - Z, 得到max Z′= - Z，即当Z达到最小值时 Z′达到最大值，反之亦然。

■ 得到下列标准型

$$\max Z' = x_1 - x_2 + 3x_3' - 3x_3''$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3' - x_3'' + x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 + x_3' - x_3'' - x_5 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - 2(x_3' - x_3'') - x_6 = 5 \\ x_1、x_2、x_3'、x_3''、x_4、x_5、x_6 \geq 0 \end{cases}$$

■ 特别地，当某个约束是绝对值不等式时，将绝对值不等式化为两个不等式，再化为等式，例如约束

$$|4x_1 - x_2 + 7x_3| \leq 9 \rightarrow \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 7x_3 \leq 9 \\ -4x_1 + x_2 - 7x_3 \leq 9 \end{cases}$$

1.3 线性规划的标准型

- **复习要点**

1. 如何化标准形式？

可以对照四条标准逐一判断！

标准形式是人为定义的，目标函数可以是求最小值。

2. 用软件求解时，一般不必化成标准型。

图解法时不必化为标准型。

3. 单纯形法手工求解时一定要化为标准型。

1.4 线性规划解的概念

■ 设线性规划的标准型

$$\max Z=CX \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.1)$$

$$AX=b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.2)$$

$$X\geq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.3)$$

式中：A是m×n矩阵，m≤n，并且r(A)=m，显然A中至少有一个m×m阶子矩阵B，使得 r(B)=m。

■ **基** (basis)：A中存在m×m阶子矩阵B，并且有 r(B)=m，则称B是线性规划的一个基 (或称基矩阵 Basis Matrix)。

当 m=n 时，基矩阵唯一，当m<n时，基矩阵就可能有多个，但数目不超过 C_n^m

四川农业大学

例1-5：已知线性规划，求所有基矩阵。

$$\max Z = 4x_1 - 2x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ -10x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ x_j \ge 0, j = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

解：约束方程的系数矩阵为2×5矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 容易看出$r(A)=2$，2阶子矩阵有$C_5^2=10$个。由线性代数知，基矩阵B必为非奇异矩阵并且$|B|\neq 0$。反之，当矩阵B的行列式等式零即$|B|=0$时就不是基。
- 因此，矩阵A中第1列与第3列构成的2阶方阵不是一个基，故基矩阵只有9个，如下所示：

1.4 线性规划解的概念

$B_1=\begin{bmatrix}5 & 1\\ -10 & 6\end{bmatrix}$, $B_2=\begin{bmatrix}5 & 1\\ -10 & 0\end{bmatrix}$, $B_3=\begin{bmatrix}5 & 0\\ -10 & 1\end{bmatrix}$, $B_4=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 6 & 2\end{bmatrix}$ $B_5=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 6 & 0\end{bmatrix}$,

$B_6=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}$, $B_7=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, $B_8=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$, $B_9=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

- 当确定某一矩阵为基矩阵时，则基矩阵对应的所有列向量均称为基向量(basis vector)，其余列向量称为非基向量。

- 基向量对应的变量称为基变量(basis variable)，非基向量对应的变量称为非基变量。

1.4 线性规划解的概念

四川農業大學

例如，考虑基B2：

$$B_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

● 例中B_2的基向量分别是A中的第1列和第4列，其余列向量是非基向量，则x_1、x_4是基变量，x_2、x_3、x_5是非基变量。

● 特别注意：基变量、非基变量是针对某一确定基而言的，不同的基对应的基变量和非基变量也不同。

1.4 线性规划解的概念

- 可行解 (Feasible Solution)

  称满足约束条件 (1.2) 及 (1.3)的解 $X=(x_1,x_2\ldots，x_n)^T$ 称为可行解

  例如；$X=(0,0,\frac{1}{2},\frac{7}{2},1)^T$ 与 $X=（0，0，0，3，2，）$都是例1 的可行解。

- 最优解 (Optimal Solution) 满足目标(1.1)的可行解称为最优解，即使得目标函数达到最大值的可行解就是最优解，例如可行解 $X=(\frac{3}{5},0,0,0,8)^T$ 是最优解。

- 基本解 (Basis Solution) 对某一确定的基 B，令非基变量等于零，利用式（1.2）解出基变量，则这组解称为基 B 的基本解。

- 基本可行解(Basis Feasible Solution) 若基本解是可行解则称为是基本可行解（也称基可行解）。

1.4 线性规划解的概念

- 非可行解(Infeasible Solution)　无界解 (Unbound Solution)

在例1-5中，对 B_1 来说，x_1, x_2是基变量，x_3, x_4 , x_5是非基变量，令 $x_3=x_4=x_5=0$，则式1.2（约束条件）为：

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 = 3 \\ -10x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -10 & 6 \end{bmatrix}$$

因$|B_1|\neq 0$，由克莱姆法则知，x_1、x_2有唯一解 $x_1 = 2/5$, $x_2=1$，则基本解为：

$$X^{(1)} = (\frac{2}{5},1,0,0,0)^T$$

对B_2来说，x_1,x_4为基变量。令非基变量x_2,x_3,x_5为零，则得到 $x_1 = -\frac{1}{5}$，$x_4=4$。

$$B_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\max Z = 4x_1 - 2x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ -10x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

基本解为 $X^{(2)} = (-\frac{1}{5}, 0, 0, 4, 0)^T$

结论：

- 由于 $X^{(1)} \geq 0$ 是基本解，从而它是基本可行解，在 $X^{(2)}$ 中因 x_1<0,故其不是可行解，也就不是基本可行解。

- 可行解不一定是基本可行解

例如 $X = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 1)^T$ 满足式(1.2) ~ (1.3)，是可行解，但其不是任何基矩阵的基本解，所以不是基本可行解。

1.4 线性规划解的概念

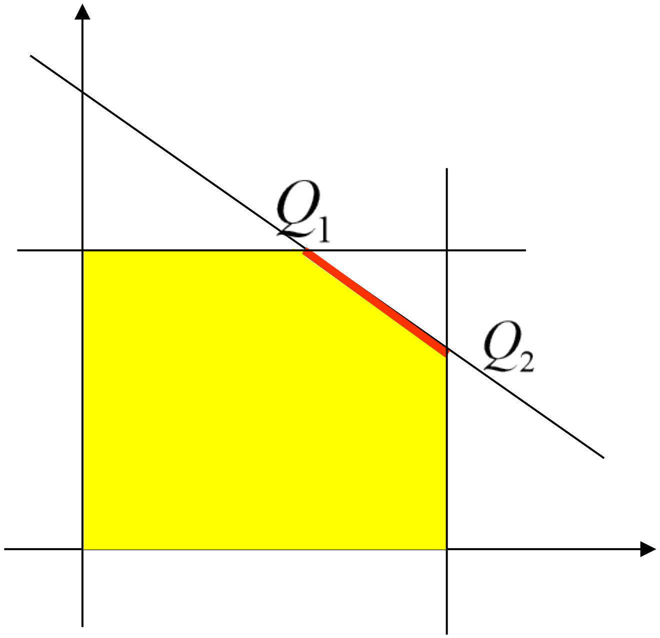
● 基本最优解：若最优解是基本解，则称为基本最优解。例如，满足式 (1.1) ~ (1.3)是最优解, 又是B_3的基本解, 因此它是基本最优解。

● 可行基：基可行解对应的基称为可行基；

● 最优基：基本最优解对应的基称为最优基。

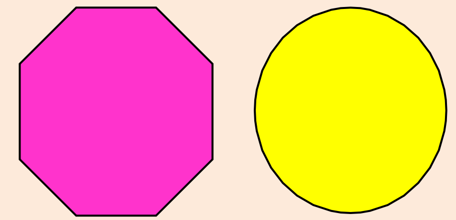
● 特别注意：当最优解唯一时，最优解亦是基本最优解；当最优解不唯一时，则最优解不一定是基本最优解。

例如右图中线段$\overline{Q_1Q_2}$的点为最优 解时，Q_1点及Q_2点是基本最优解, 线段$\overline{Q_1Q_2}$的内点是最优解而不是基本最优解。

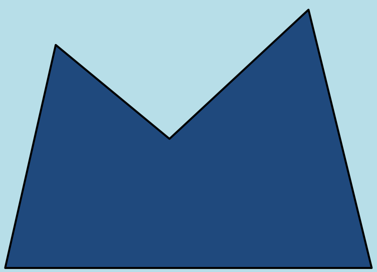


1.5 单纯形法基本原理

- **凸集**(Convex Set)：设K是n维空间的一个点集，对**任意两点** $X^{(1)}$、$X^{(2)} \in K$，当 $X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(2)} \in K \,(0 \le \alpha \le 1)$ 时，则称K为凸集。



凸集



非凸集

> 其中：$X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(2)}$ 就是以 $X^{(1)}$、$X^{(2)}$ 为端点的线段方程，点 X 的位置由 α 的值确定，当 $\alpha=0$ 时，$X= X^{(2)}$，当 $\alpha=1$ 时，$X = X^{(1)}$

- **凸组合** (Convex combination):

设 $X, X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(K)}$ 是 R^n 中的点，若存在 $\lambda_1,\ \lambda_2, \cdots \lambda_K$，且 $\lambda_i \ge 0$ 及 $\sum_{i=1}^{K} \lambda_i = 1$

使得 $X=\sum_{i=1}^{K} \lambda_i X_i$ 成立，则称 X 为 $X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(K)}$ 凸组合。

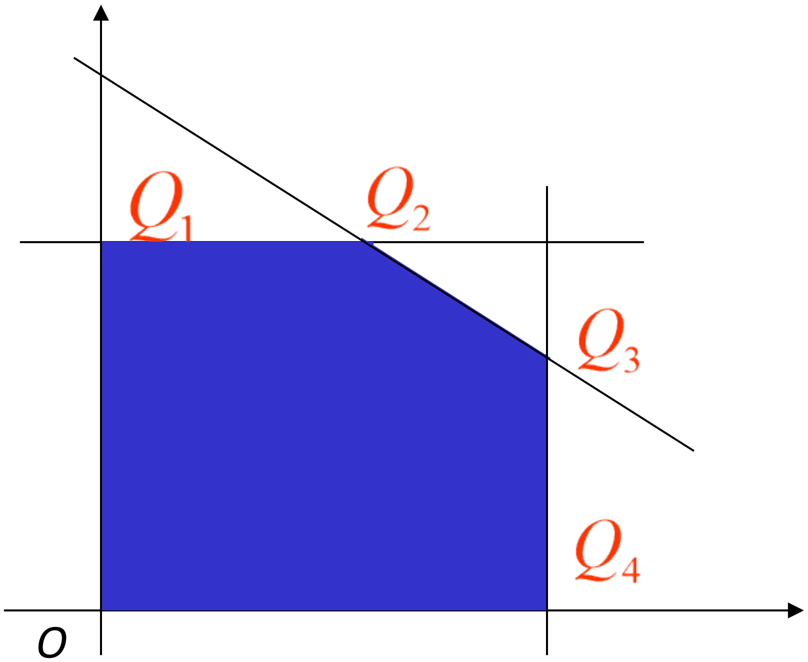
1.5 单纯形法基本原理

● 极点 (Extreme Point) ：设K是凸集，$X \in K$，若X 不能用 K中两个不同的点 $X^{(1)}, X^{(2)}$ 的凸组合表示为

$$X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha) X^{(2)} \quad (0 < \alpha < 1)$$

则称 X是 K的一个极点或顶点。

➢ X 是凸集 K的极点，即X不可能是K中某一线段的内点，只能是K中某一线段的端点。



四川农业大学

■ 线性规划的基本定理

【定理1】若线性规划可行解 K 非空, 则 K 是凸集。

【定理2】线性规划的可行解集合 K 中的点 X 是极点的充要条件为X是基本可行解。

【定理3】若线性规划有最优解, 则最优值一定可以在可行解集合的某个极点上到达, 最优解就是极点的坐标向量。

1.5 单纯形法基本原理　相关解释：

四川农业大学

- 定理2刻划了**可行解集的极点与基本可行解的对应关系。**极点是基本可行解，反之，基本可行解也一定是极点，但它们并非一一对应，有可能两个或多个基本可行解对应于同一极点(退化基本可行解时);
- 定理3描述了**最优解在可行解集中的位置。**若最优解唯一，则最优解只能在某一极点上达到；若具有多重最优解，则最优解是某些极点的凸组合。从而最优解是可行解集的极点或边界点，不可能是可行解集的内点 。
- 若线性规划的**可行解集非空且有界，则一定有最优解**；若可行解集无界，则线性规划可能有最优解，也可能没有最优解。
- 定理2及3还给了我们一个启示：寻求最优解不是在无限个可行解中去找，而是在有限个基本可行解中去寻求。这就引出了一种有效地寻找最优解的方法---单纯形法。

1.5 单纯形法基本原理

● 复习要点

1. 线性规划常用的概念：可行解、基本解、基本 可行解、最优解、基本最优解、基、可行基、最优基、凸集、极点（凸点）、凸组合

2. 线性规划的三个基本定理。

1.6 单纯形法

Simplex Method

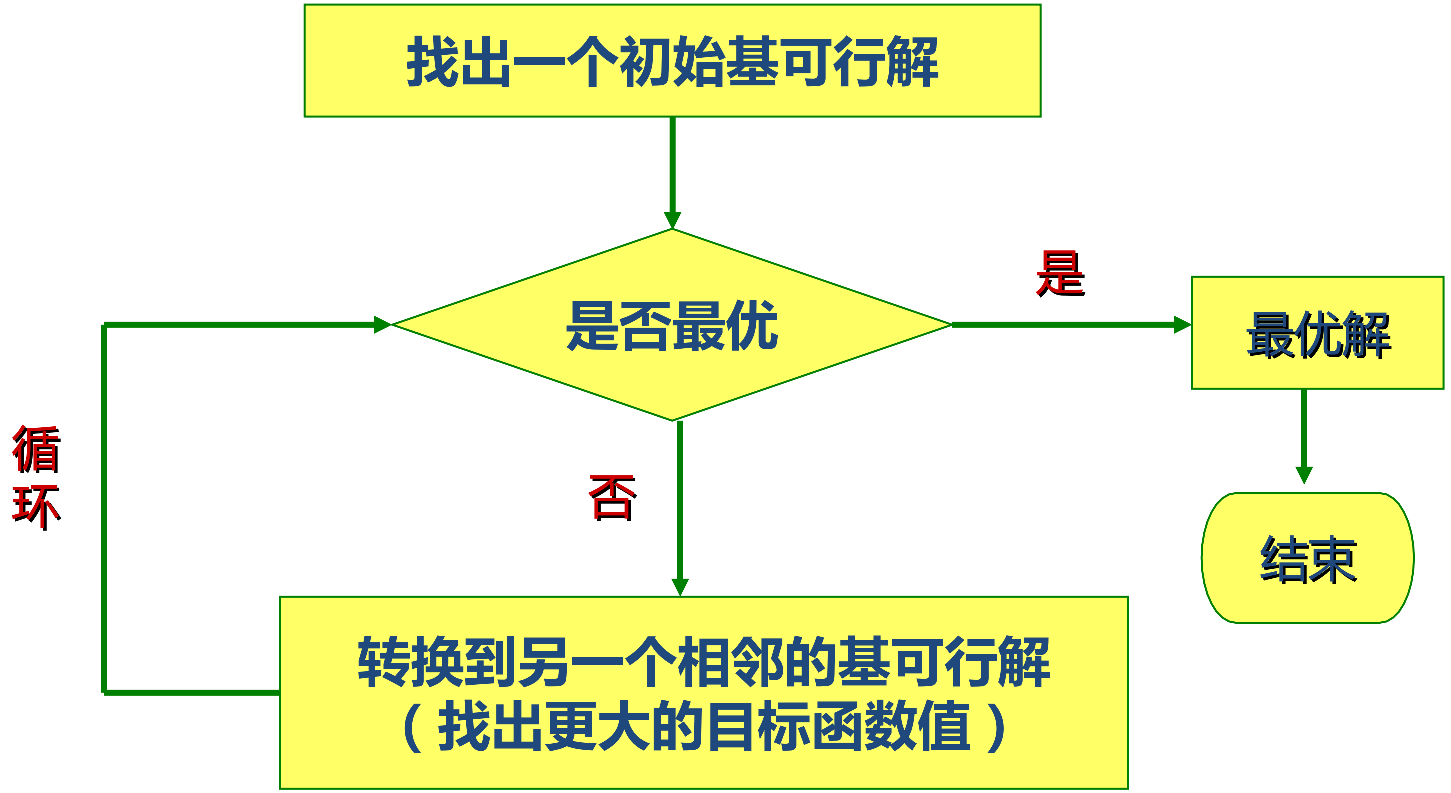
1.6.1 普通单纯形法

- **单纯形法**(Simplex Method)是一种逐步逼近最优解的迭代方法。即先求出一个初始基可行解，并判断它是否最优，若不是最优，再换一个基可行解并判断，直到得出最优解或无最优解为止。

如何求得初始基本可行解？

- 当系数矩阵A中可以观察得到一个可行基时（可行基通常是一个单位矩阵或m个线性无关的单位向量组成的矩阵），可以通过解线性方程组求得初始基本可行解。

➢ 单纯形法的思路



核心：变量迭代