

第 25 讲 随机事件的概率



目标导航

课程标准	课标解读
1. 结合具体实例，理解古典概型，能计算古典概型中简单随机事件的概率。 2. 通过实例，理解概率的性质，掌握随机事件概率的运算法则。	1、通过阅读课本，查阅资料，并能结合物理中的力、位移、速度等具体背景认识向量，掌握向量与数量的区别与联系。 2、认真阅读课本，在读书过程中学会用有向线段、字母表示向量，了解有向线段与向量的联系与区别。 3、在认真学习的基础上，理解零向量、单位向量、平行向量、共线向量、相等向量及向量的模等概念，会辨识图形中这些相关的概念，学会向量的表示方法。



知识精讲

知识点 01 随机事件的概率

1. 概率的定义

一般地，对于给定的随机事件 A ，在相同条件下，随着试验次数的增加，事件 A 发生的频率会在某个常数附近摆动并趋于稳定，我们可以用这个常数来刻画随机事件 A 发生的可能性大小，并把这个常数称为随机事件 A 的概率，记作 $P(A)$ 。

2. 概率的基本性质

(1) 对任意的事件 A ，都有 $0 \leq P(A) \leq 1$ 。

(2) 对于必然事件 Ω 和不可能事件空集，显然 $P(\Omega)=1$ ， $P(\emptyset)=0$ 。

3. 频率的稳定性

若随机事件 A 在 n 次试验中发生了 m 次，则当试验次数 n 很大时，可以用事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 来估计事

件 A 的概率，即 $P(A) \approx \frac{m}{n}$ 。

【微点拨】 频率是概率的近似值，概率是频率的稳定值，随着试验次数的增加，频率会逐渐稳定于概率。

【即学即练 1】 下列说法不正确的是 ()

A. 必然事件是一定条件下必定发生的事件

- B. 不可能事件是一定条件下必然不会发生的事件
- C. 随机事件是在一定条件下可能发生也可能不发生的事件
- D. 事件 A 发生的概率 $P(A)$ 一定满足 $0 < P(A) < 1$

【答案】D

【详解】解:由题知,根据事件的分类和定义可知,选项 A,B,C 正确;

关于选项 D,若事件 A 为必然事件,则 $P(A)=1$,

故选项 D 错误.

故选:D

知识点 02 古典概型

1.等可能基本事件:在一次试验中,每个基本事件发生的可能性都相同,这时也称这些基本事件为等可能基本事件。

2.古典概型的定义

考察一些试验,具有以下两个特点:

- (1)样本空间 Ω 只含有有限个样本点;
- (2)每个基本事件的发生都是等可能的。

我们将满足上述条件的随机试验的概率模型称为古典概型。

3.古典概型的概率公式

在古典概型中,如果样本空间 (其中, n 为样本点的个数),那么每一个基本事件 $\{\omega_k\}(k=1,2,\dots,n)$ 发生的概率都是 $\frac{1}{n}$ 。如果事件 A 由其中 m 个等可能基本事件组合而成,即 A 中包含 m 个样本点,那么事件 A 发

生的概率为 $P(A)=\frac{m}{n}$ 。

【即学即练 2】某篮球运动员在最近几次参加的比赛中的得分情况如下表 (没有罚球):

投篮次数	投中两分球的次数	投中三分球的次数
100	55	18

记该运动员在一次投篮中,投中两分球为事件 A ,投中三分球为事件 B ,没投中为事件 C ,用频率估计概率的方法,得到的下述结论中不正确的是 ()

- A. $P(A)=0.55$ B. $P(B)=0.18$ C. $P(C)=0.27$ D. $P(B+C)=0.55$

【答案】D

【详解】依题意， $P(A) = \frac{55}{100} = 0.55, P(B) = \frac{18}{100} = 0.18,$

$$P(C) = \frac{100 - 55 - 18}{100} = 0.27, P(B+C) = \frac{100 - 55}{100} = 0.45,$$

所以 D 选项结论不正确.

故选: D

能力拓展

考法 计算古典概型的概率

【典例 1】某次高三年级模拟考试中，数学试卷有一道满分 10 分的选做题，学生可以从 A, B 两道题目中任选一题作答.某校有 900 名高三学生参加了本次考试，为了了解该校学生解答该选做题的得分情况，为下一步教学作参考依据，计划从 900 名考生的选做题成绩中随机抽取一个容量为 10 的样本.现采用分层抽样，按照学生选择 A 题目或 B 题目将成绩分为两层.已知该校高三学生有 540 人选做 A 题目，有 360 人选做 B 题目，选取的样本中，A 题目的成绩平均数为 5，方差为 2，B 题目的成绩平均数为 5.5，方差为 0.25.

(1)用样本估计该校这 900 名考生选做题得分的平均数与方差;

(2)本选做题阅卷分值都为整数，且选取的样本中，A 题目成绩的中位数和 B 题目成绩的中位数都是 5.5.从样本中随机选取两个大于样本平均值的数据做进一步调查，求取到的两个成绩来自不同题目的概率.

【答案】(1)平均数为 5.2，方差为 1.36; (2)0.6

【详解】(1)由题意，按照分层随机抽样的方法抽出的样本中，

A 题目的成绩有 6 个，按分值降序分别记为 $x_1, x_2, \dots, x_6,$

B 题目的成绩有 4 个，按分值降序分别记为，

记样本的平均数为 \bar{x} ，样本的方差为 s^2 ，

$$\text{由题意知: } \bar{x} = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_6) + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)}{10} = \frac{5 \times 6 + 5.5 \times 4}{10} = 5.2,$$

$$\sum_{i=1}^6 (x_i - 5.2)^2 = \sum_{i=1}^6 [(x_i - 5) - 0.2]^2 = \sum_{i=1}^6 [(x_i - 5)^2 - 0.4(x_i - 5) + 0.04],$$

$$\sum_{i=1}^4 (y_i - 5.2)^2 = \sum_{i=1}^4 [(y_i - 5.5) + 0.3]^2 = \sum_{i=1}^4 [(y_i - 5.5)^2 + 0.6(y_i - 5.5) + 0.09],$$

$$\text{所以 } s^2 = \frac{(x_1 - 5.2)^2 + (x_2 - 5.2)^2 + \dots + (x_6 - 5.2)^2 + (y_1 - 5.2)^2 + \dots + (y_4 - 5.2)^2}{10}$$

$$= \frac{2 \times 6 - 0 + 0.04 \times 6 + 0.25 \times 4 + 0 + 0.09 \times 4}{10} = \frac{13.6}{10} = 1.36$$

所以估计该校 900 名考生选做题得分的平均数为 5.2，方差为 1.36.

(2) 由题意，样本中 A 题目的成绩大于样本平均值的有 3 个，设为

B 题目的成绩大于样本平均值的有 2 个，设为 y_1, y_2 .

从样本中随机选取两个大于样本平均值的数共有 10 种取法，为 (x_1, x_2) 、 (x_1, x_3) 、 (x_2, x_3) 、 (x_1, y_1) 、
 (x_2, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_1) 、 (x_3, y_2) 、

其中取到的两个成绩来自不同题目的取法共有 6 种，为 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_1) 、 (x_3, y_2) ，

记“从样本中随机选取两个大于样本平均值的数，取到的两个成绩来自不同题目”为事件 A，

$$\text{则 } P(A) = \frac{6}{10} = 0.6.$$

【典例 2】 全国爱卫办组织开展“地级市创卫工作”满意度调查工作，2023 年 2 月 14 日 24 日在网上进行问卷调查，该调查是国家卫生城市评审的重要依据，居民可根据自身实际感受，对所在市创卫工作作出客观、公正的评价。现随机抽取了 100 名居民的问卷进行评分统计，评分的频率分布直方图如图所示，数据分组依次为：

$[60, 65)$ 、 $[65, 70)$ 、 $[70, 75)$ 、 $[75, 80)$ 、 $[80, 85)$ 、 $[85, 90)$.

(1) 求 a 的值以及这 100 名居民问卷评分的中位数；

(2) 若根据各组的频率的比例采用分层随机抽样的方法，从评分在 $[65, 70)$ 和 $[70, 75)$ 内的居民中共抽取 6 人，查阅他们的答卷情况，再从这 6 人中选取 2 人进行专项调查，求这 2 人中恰有 1 人的评分在 $[70, 75)$ 内的概率。

$$\text{【答案】 (1) } a = 0.02; 77.5; \text{ (2) } \frac{8}{15}$$

【详解】 (1) 由频率分布直方图，

$$(0.01 + 2a + 0.04 + 0.05 + 0.06) \times 5 = 1 \Rightarrow a = 0.02;$$

注意到前 3 个矩形对应频率之和为： $(0.01 + 0.02 + 0.04) \times 5 = 0.35 < 0.5$ ，

前 4 个矩形对应频率之和为： $(0.01 + 0.02 + 0.04 + 0.06) \times 5 = 0.65 > 0.5$ ，

则中位数在之间，设为 x ，则 $(x - 75) \times 0.06 + 0.35 = 0.5 \Rightarrow x = 77.5$ ，即中位数为 77.5.

(2) 评分在 $[65, 70)$ 、 $[70, 75)$ 对应频率为：0.1, 0.2，则抽取 6 人中， $[65, 70)$ 中的有 2 人，设为 A_1, A_2 ， $[70, 75)$ 中的有 4 人，设为 B_1, B_2, B_3, B_4 .

则从6人中选取2人的情况为： $A_1A_2, A_1B_1, A_1B_2, A_1B_3, A_1B_4, A_2B_1, A_2B_2, A_2B_3, A_2B_4,$

$B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_2B_3, B_2B_4, B_3B_4$,共15种,恰有1人在 $[70,75)$ 中的有8种情况,

故相应概率为： $\frac{8}{15}$.



题组 A 基础过关练

1. 从含有三件正品和一件次品的产品中任取两件,则取出的两件中恰有一件次品的概率是()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】D

【详解】有三件正品(用1, 2, 3表示)和一件次品(用0表示)的产品中任取两件的样本空间

$\Omega = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,2), (1,3), (2,3)\}$, 恰有一件次品 $A = \{(0,1), (0,2), (0,3)\}$,

由古典概型得 $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,

故选: D.

2. 如图所示的《宋人扑枣图轴》是作于宋朝的中国古画,该图中小孩有扑枣的爬、扶、捡、顶四个动作,现有A,B两个孩童分别随机选择其中的一个动作进行模仿,则A,B两个孩童选择模仿的动作相同的概率为

()

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】B

【详解】A,B两个孩童分别随机选择其中的一个动作进行模仿,一共有 $4 \times 4 = 16$ 种情况,其中A,B两个孩童选择模仿的动作相同的情况有4种,

所以A,B两个孩童选择模仿的动作相同的概率为 $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

故选: B

3. 下列事件中是随机事件的是()

- A. 所有四边形的内角和为 180°
B. 通常加热到 100°C ,水沸腾

C. 袋中有 2 个黄球, 3 个绿球, 共 5 个球, 随机摸出一个球是红球

D. 抛掷一枚硬币两次, 第一次正面向上, 第二次反面向上

【答案】D

【详解】A. 所有四边形的内角和为 360° , 所以该事件是不可能事件;

B. 通常加热到 100°C , 水沸腾, 在一定条件下, 是必然事件;

C. 袋中有 2 个黄球, 3 个绿球, 共 5 个球, 随机摸出一个球是红球, 是不可能事件;

D. 抛掷一枚硬币两次, 第一次正面向上, 第二次反面向上, 是随机事件, 可能发生, 也可能不发生, 是随机事件.

故选: D

4. “ a 是实数, $|a| \geq 0$ ”这一事件是 ()

A. 必然事件

B. 不确定事件

C. 不可能事件

D. 随机事件

【答案】A

【详解】由于 a 是实数, 故 $|a| \geq 0$ 恒成立,

所以 a 是实数, $|a| \geq 0$ ”这一事件是必然事件.

故选: A

5. 某工厂生产的产品的合格率是 99.99%, 这说明 ()

A. 该厂生产的 10 000 件产品中不合格的产品一定有 1 件

B. 该厂生产的 10 000 件产品中合格的产品一定有 9 999 件

C. 该厂生产的 10 000 件产品中没有一个不合格的产品

D. 该厂生产的产品合格的可能性是 99.99%

【答案】D

【详解】对于 A: 该厂生产的 10000 件产品中不合格的产品不一定有 1 件, 可能是多件或者没有, 故 A 错误;

对于 B: 该厂生产的 10000 件产品中合格的产品不一定是 9999 件, 故 B 错误;

对于 C: 该厂生产的 10000 件产品中可能有不合格产品, 故 C 错误;

对于 D: 该厂生产的产品合格的可能性是 99.99%, 故 D 正确;

故选: D.

6. 哥德巴赫猜想的部分内容如下: 任一大于 2 的偶数可以表示为两个素数 (素数是在大于 1

的自然数中，除了1和它本身以外不再有其他因数的自然数)之和，如 $18=7+11$.在不超过16的素数中，随机选取两个不同的数，其和等于16的概率是_____.

【答案】 $\frac{2}{15}$

【详解】 不超过16的素数有2、3、5、7、11、13，

随机选取两个不同的数：(2, 3)、(2, 5)、(2, 7)、(2, 11)、(2, 13)、(3, 5)、(3, 7)、(3, 11)、(3, 13)、(5, 7)、(5, 11)、(5, 13)、(7, 11)、(7, 13)、(11, 13) 共有15个基本事件，满足“和”等于16的有(3, 13)、(5, 11)共有2个基本事件，

所以其和等于16的概率 $P = \frac{2}{15}$.

故答案为： $\frac{2}{15}$.

7. 某人抛图钉250次，其中钉尖向上有70次，钉尖向上的经验概率是_____.

【答案】 0.28

【详解】 因为抛图钉250次，事件钉尖向上有70次，

所以事件钉尖向上发生的频率为 $\frac{70}{250} = 0.28$ ，

所以钉尖向上的经验概率是0.28.

故答案为：0.28.

8. 在一个不透明的布袋中，红色、黑色、白色的玻璃球共有50个，除颜色外其他完全相同，小明通过多次摸球试验后发现其中摸到红色球，黑色球的频率稳定在30%和40%，则口袋中白色球的个数可能是_____个.

【答案】 15

【详解】 ∵摸到红色球、黑色球的频率稳定在30%和40%，

∴摸到白球的频率为 $1 - 30\% - 40\% = 30\%$ ，

故口袋中白色球的个数可能是 $50 \times 30\% = 15$ 个.

故答案为：15

9. 在10个学生中，男生有 x 个，现从10个学生中任选6人去参加某项活动.①至少有一个女生;②5个男生，1个女生;③3个男生，3个女生.当 x 为何值时，使得①为必然事件，②为不可能事件，③为随机事件?

【答案】 $x=3$ 或 $x=4$.

【详解】 “5个男生，1个女生”为不可能事件，则有 $x < 5$ 或 $x = 10$ ，

“3个男生，3个女生”为随机事件，则有 $3 \leq x \leq 7$ ，

综上所述, 又由 $x \in \mathbb{N}^*$, 得 $x=3$ 或 $x=4$,

所以 $x=3$ 或 $x=4$.

10. 有 1 号、2 号、3 号三个信箱和 A, B, C, D 四封信, 若 4 封信可以任意投入信箱, 投完为止, 其中 A 信恰好投入 1 号或 2 号信箱的概率是多少?

【答案】 $\frac{2}{3}$

【详解】 由于每封信可以任意投入信箱, 对于 A 信, 投入各个信箱的可能性是相等的, 一共有 3 种不同的结果.

投入 1 号信箱或 2 号信箱有 2 种结果, 故 A 信恰好投入 1 号或 2 号信箱的概率为 $\frac{2}{3}$.

题组 B 能力提升练

1. 蜜蜂包括小蜜蜂和黑小蜜蜂等很多种类, 在我国的云南及周边各省都有分布, 春暖花开的时候是放蜂的大好时机, 养蜂人甲在某地区放养了 100 箱小蜜蜂和 1 箱黑小蜜蜂, 养蜂人乙在同一地区放养了 1 箱小蜜蜂和 100 箱黑小蜜蜂. 某中学生物小组在上述地区捕获了 1 只黑小蜜蜂, 假设每箱中蜜蜂的数量相同, 那么, 该生物小组的同学认为这只黑小蜜蜂是养蜂人_____放养的比较合理 ()

- A. 甲
B. 乙
C. 甲和乙
D. 不能确定

【答案】 B

【详解】 由题意可知, 从养蜂人甲放养的蜜蜂中捕获一只蜜蜂是黑小蜜蜂的概率为 $\frac{1}{101}$,

而从养蜂人乙放养的蜜蜂中捕获一只蜜蜂是黑小蜜蜂的概率为 $\frac{100}{101}$,

所以认为这只黑小蜜蜂是养蜂人乙放养的比较合理.

故选: B.

2. 某商场对某一商品搞活动, 已知该商品每个的进价为 3 元, 售价为 8 元, 每天销售的第 20 个及之后的商品按半价出售, 该商场统计了近 10 天这种商品的销售量, 如图所示. 从日利润不少于 96 元的几天里任选 2 天, 则选出的这 2 天日利润都是 97 元的概率为 ()

- A. $\frac{1}{9}$
B. $\frac{1}{10}$
C. $\frac{1}{5}$
D. $\frac{1}{8}$

【答案】 B

【详解】日销售量不少于 20 个时，日利润不少于 96 元，其中日销售量为 20 个时，日利润为 96 元；日销售量为 21 个时，日利润为 97 元.

从题中条形统计图可以看出，日销售量为 20 个的有 3 天，日销售量为 21 个的有 2 天.

设日销售量为 20 个的 3 天分别记为 a, b, c ，日销售量为 21 个的 2 天分别记为 A, B ，

从这 5 天中任选 2 天，可能的情况有：

共 10 种，

其中选出的 2 天的日销售量都为 21 个的情况只有 1 种，

所以所求概率为 $P = \frac{1}{10}$.

故选：B.

3. 现有 6 个大小相同、质地均匀的小球，球上标有数字 1, 3, 3, 4, 5, 6. 从这 6 个小球中随机取出两个球，如果已经知道取出的球中有数字 3. 则所取出的两个小球上数字都是 3 的概率为 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{1}{15}$

【答案】C

【详解】任取两个小球，则出的球中有数字 3 的事件有，共 9 个基本事件，

其中所取出的两个小球上数字都是 3 的基本事件共 1 个，

所以所取出的两个小球上数字都是 3 的概率 $P = \frac{1}{9}$.

故选：C

4. 一种电路控制器在出厂时，每 4 件一等品装成一箱. 工人装箱时，不小心将 2 件二等品和 2 件一等品装入了一箱，为了找出该箱中的二等品，需要对该箱中的产品逐件进行测试. 假设检测员不知道该箱产品中二等品的具体数量，则测试的第 2 件产品是二等品的概率为 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】D

【详解】只考虑测试的第 2 件产品，它可以是箱中的 4 件产品中的任何一件，因此有四种结果，并且这 4 中结果的出现是等可能的，

测试的第 2 件产品是二等品的结果有 2 种，因此，测试的第 2 件产品是二等品的概率为 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

故选:D.

5. 一个盒子中有若干白色围棋子，为了估计其中围棋子的数目，小明将 100

颗黑色的围棋子放入其中，充分搅拌后随机抽出了 20 颗，数得其中有 5 颗黑色的围棋子，根据这些信息可以估计白色围棋子的数目约为（ ）

- A. 200 颗 B. 300 颗 C. 400 颗 D. 500 颗

【答案】B

【详解】 设白色围棋子的数目为 n ，则由已知可得 $\frac{5}{20} = \frac{100}{n+100}$ ，

解得 $n = 300$ ，

即白色围棋子的数目大约有 300 颗.

故选：B.

6. 若 $m \in \{-1, 3, 4, 6, 7\}$ ，则方程 $x^2 + 4x + m = 0$ 有实根的概率为_____.

【答案】 $\frac{3}{5}$ / 0.6

【详解】 Q 方程 $x^2 + 4x + m = 0$ 有实根，

$\therefore \Delta = 16 - 4m \geq 0$ ，解得 $m \leq 4$ ，

又 $m \in \{-1, 3, 4, 6, 7\}$ ，

$\therefore m$ 可取的值的集合为 $\{-1, 3, 4\}$ ，

则方程 $x^2 + 4x + m = 0$ 有实根的概率为 $\frac{3}{5}$.

故答案为： $\frac{3}{5}$.

7. 某种福利彩票的中奖概率为 0.1%，若某人买这种彩票 999 次，均未中奖，则此人第 1000 次买这种彩票中奖的概率为_____.

【答案】0.1%

【详解】 概率表示事件发生的可能性的概率，并不代表事件发生的频率，“某彩票的中奖概率为 $\frac{1}{100}$ ”意味着购买彩票中奖的可能性为 $\frac{1}{100}$.

故答案为：0.1%

8. 已知冰箱里有 4 袋牛奶，其中 1 袋枣味、3 袋原味，若小明从中任取两袋，则取到枣味牛奶的概率为_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$ / 0.5

【详解】 设 4 袋牛奶编号分别为 a, b, c, d ，其中 a 为枣味， b, c, d 为原味，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/186133152154010235>