专题五　不等式

一、多项选择题

1. 【答案】BCD

【解析】首先可得 $0<b<1$，当 $a=\frac{3}{4}$，$b=\frac{1}{2}$时，$a+b=\frac{5}{4}$，故 A 错误；经判断，其他选项均正确，故选 BCD.

2. 【答案】AB

【解析】因为$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则有 $b<a<0$，

对于 A，因为 $b<a<0$，所以 $a^2<b^2$，故选项 A 正确；

对于 B，因为 $b<a<0$，所以$\frac{b}{a}>0$，$\frac{a}{b}>0$且$\frac{b}{a}\neq\frac{a}{b}$，故$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$，故选项 B 正确；

对于 C，因为 $b<a<0$，所以 $a^2<ab$，故 $lga^2<lg(ab)$，故选项 C 错误；

对于 D，因为$|a|$与 1 的大小关系不确定，故函数 $y=|a|^x$的单调性不确定，故$|a|^a$与$|a|^b$的大小不确定，

故选项 D 错误.

故选：AB.

3.【答案】ACD

【解析】A：若 $a<b<0$，则 $|a|>|b|>0$，$-a>-b>0$，∴ $-a|a|>-b|b|$，∴ $a|a|<b|b|$，∴ A 正确，

B：∵ $a>0$，$b>0$，$c>0$，∴ $\frac{a+c}{b+c}-\frac{a}{b}=\frac{b(a+c)-a(b+c)}{b(b+c)}=\frac{c(b-a)}{b(b+c)}$ 不能确定符号，∴ B 错误，

C：∵ $a>0$，$b>0$，∴ $a+\frac{b}{a}+\frac{4}{ab}=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{a}+\frac{4}{ab}=\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{2}+\frac{4}{ab}\right)\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{2}}+2\sqrt{\frac{2}{b}}\geqslant 4\sqrt{1}=4$，

当且仅当 $a=b$ 时取等号，∴ $a+\frac{b}{a}+\frac{4}{ab}\geqslant 4$. ∴ C 正确，

D：∵ $a^2+b^2\geqslant 2ab$，∴ $a^2\geqslant 2ab-b^2$，∵ $a>0$，∴ $a\geqslant 2b-\frac{b}{a}$，∴ D 正确.

故选：ACD.

4.【答案】BCD

【解析】A：∵ $a>b>0$，∴ $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，∴ A 错误，

B：∵ $a>b$，∴ $a-1>b-1$，又∵ $y=2021^x$ 在 R 上为增函数，∴ $2021^{a-1}>2021^{b-1}$，∴ B 正确，

C：∵ $a>b>0$，∴ $a+b+2-2\sqrt{a}-2\sqrt{b}=a+2\sqrt{a}+1+b+2\sqrt{b}+1=(\sqrt{a}+1)^2+(\sqrt{b}+1)^2>0$，∴ C 正确，

D：∵ $a>b>0$，∴ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>2\sqrt{\frac{1}{ab}}=\frac{2}{\sqrt{ab}}$，$\frac{4}{a+b}<\frac{4}{2\sqrt{ab}}=\frac{2}{\sqrt{ab}}$，∴ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{4}{a+b}$，∴ D 正确.

故选：BCD.

5.【答案】ACD

【解析】对 A，由 $a>0$，$b>0$，且 $a-b=1$ 可得 $a>b>0$，

则 $e^a-e^b=e^b\left(e^{a-b}-1\right)=e^b(e-1)$，

$\because b>0$，$\therefore e^b>1$，又 $e-1>1$，$\therefore e^b(e-1)>1$，即 $e^a-e^b>1$，故 A 正确；

对 B，令 $a=2,b=1$，则 $a^e-b^e=2^e-1>1$，故 B 错误；

对 C，$\frac{9}{a}-\frac{1}{b}=\left(\frac{9}{a}-\frac{1}{b}\right)(a-b)=10-\left(\frac{9b}{a}+\frac{a}{b}\right)\leq 10-2\sqrt{\frac{9b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$，当且仅当 $\frac{9b}{a}=\frac{a}{b}$ 时等号成立，

故 C 正确；

对 D，$2\log_2 a-\log_2 b=\log_2\frac{a^2}{b}=\log_2\frac{(b+1)^2}{b}=\log_2\left(b+\frac{1}{b}+2\right)\geq\log_2\left(2\sqrt{b\cdot\frac{1}{b}}+2\right)=2$，当且仅

当 $b=\frac{1}{b}$，即 $b=1$ 时等号成立，故 D 正确.

故选：ACD.

6.【答案】 B, C

【解析】对于 A，当 $a=0$ 时，$(\frac{2}{7})^a=(\frac{3}{7})^a$，A 不符合题意；

对于 B，若 $b>a>1$，则 $1<a<\sqrt{ab}$，两边取对数得 $\log_{ab}a<\log_{ab}\sqrt{ab}=\frac{1}{2}$，B 符合题意；

对于 C，若 $a>0$，$b>0$，$a+2b=1$，则 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=(\frac{2}{a}+\frac{1}{b})(a+2b)=4+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}$

$\geq 4+2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=8$，当且仅当 $\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=2b=\frac{1}{2}$ 时等号成立，C 符合题意；

对于 D，取 $a=1,b=2$，$\frac{1+a}{b^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}<\frac{1+2}{1}=3$，D 不符合题意；

故答案为：BC

7.【答案】AD

【解析】因为 $a>0$，$b>0$，$a+2b=1$，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=(\frac{1}{a}+\frac{2}{b})(a+2b)=5+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}=9$，

当且仅当 $a=b$ 时取等号，$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 取得最小值 9，A 正确；

$a^2+b^2=b^2+(1-2b)^2=5b^2-4b+1=5(b-\frac{2}{5})^2+\frac{1}{5}$，

根据二次函数的性质可知，当 $b=\frac{2}{5}$ 时，上式取得最小值 $\frac{1}{5}$，B 错误；

因为 $1=a+2b\geqslant 2\sqrt{2ab}$，当且仅当 $a=2b=\frac{1}{2}$，即 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$ 时取等号，

所以 $ab\leqslant\frac{1}{8}$，

$\log_2a+\log_2b=\log_2ab\leqslant-3$，即最大值 -3，C 错误；

$2^a+4^b\geqslant 2\sqrt{2^{a+2b}}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $a=2b=\frac{1}{2}$，即 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$ 时取等号，此时 2^a+4^b 取得最小值 $2\sqrt{2}$，

D 正确.

故选：AD.

8.【答案】ACD

【解析】A. 若 $a>b>0$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，若 $c<0$，则 $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$ 成立，故 A 正确，

B. 若 $a>0$，$b>0$，$c>0$，则 $\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}=\frac{ab+ac-ab-bc}{b(b+c)}=\frac{(a-b)c}{b(b+c)}$，则当 $a>b$ 时，$\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$，故 B 错误，

C. 若 $a>b>0$，则 $(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2})^2-(\sqrt{\frac{a+b}{2}})^2=\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{4}-\frac{a+b}{2}=\frac{a+b+2\sqrt{ab}-2a-2b}{4}=-\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{4}=-\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{4}$

<0，

则 $(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2})^2<(\sqrt{\frac{a+b}{2}})^2$，即$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}<\sqrt{\frac{a+b}{2}}$成立，故 C 正确，

D. 由 $a+2b=2$ 得 $a+1+2b=3$，即$\frac{1}{a+1}+\frac{2}{b}=(\frac{1}{a+1}+\frac{2}{b})(\frac{a+1+2b}{3})=\frac{1}{3}(1+\frac{2b}{a+1}+4+\frac{2(a+1)}{b}\geq\frac{1}{3}(5+2\sqrt{\frac{2b}{a+1}\cdot\frac{2(a+1)}{b}})$

$=\frac{1}{3}\times(5+4)=3$，

当且仅当$\frac{2b}{a+1}=\frac{2(a+1)}{b}$，即 $b=a+1$ 时取等号，故 D 正确，

故选：ACD.

9. 【答案】 A, D

【解析】对于 A 选项，函数 $y=(\frac{1}{3})^x$ 为 R 上的减函数，由 $a>b>0$ ，可得 $(\frac{1}{3})^a<(\frac{1}{3})^b$ ，A 选项正确；

对于 B 选项，取 $c=0$ ，则 $ac^2=bc^2$ ，B 选项错误；

对于 C 选项，函数 $y=\log_2 x$ 为 $(0,+\infty)$ 上的增函数，因为 $a>b>0$ ，则 $\log_2 a>\log_2 b$ ，

则 $\log_2\frac{1}{a}=-\log_2 a<-\log_2 b=\log_2\frac{1}{b}$ ，C 选项错误；

对于 D 选项，由基本不等式可得 $2ab\leq a^2+b^2$ ，

所以， $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\leq 2(a^2+b^2)$ ，即 $(\frac{a+b}{2})^2\leq\frac{a^2+b^2}{2}$ ，

因为 $a>b>0$ ，所以， $(\frac{a+b}{2})^2<\frac{a^2+b^2}{2}$ ，D 选项正确.

故答案为：AD.

10. 【答案】BCD

【解析】A：$\because\sin 1\in(0,1)$，$\therefore 2^{\sin 1}>2^0=1$，$\log_2(\sin 1)<\log_2 1=0$，$\therefore\log_2(\sin 1)<2^{\sin 1}$，$\therefore A$ 错误，

B：$\because\pi^{-2}<\pi^{\frac{1}{2}}$，$\therefore(\frac{1}{\pi})^2<\pi^{\frac{1}{2}}$，$\therefore B$ 正确，

C：$(\sqrt{7}+2)^2=11+4\sqrt{7}$，$(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2=11+2\sqrt{30}$，$\because 4\sqrt{7}<2\sqrt{30}$，

$\therefore(\sqrt{7}+2)^2<(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2$，$\therefore\sqrt{7}+2<\sqrt{6}+\sqrt{5}$，$\therefore\sqrt{7}-\sqrt{5}<\sqrt{6}-2$，$\therefore C$ 正确，

D：$\log_3 4=1+\log_3\frac{4}{3}$，$\log_5 6=1+\log_5\frac{6}{5}$，

$\because\log_3\frac{4}{3}>\log_3\frac{6}{5}>\log_5\frac{6}{5}$，$\therefore\log_3 4>\log_5 6$，$\therefore\log_4 3<\log_6 5$，$\therefore D$ 正确.

故选：BCD.

11. 【答案】ACD

【解析】$|\overrightarrow{OA}|^2=t^2+\frac{4}{t^2}\geqslant 2\sqrt{t^2\cdot\frac{4}{t^2}}=4$，当且仅当 $t^2=\frac{4}{t^2}$，即 $t=\pm\sqrt{2}$时，取“＝”，∴$|\overrightarrow{OA}|$的最小值是 2，∴A 对；

当 $t=1$，$m=4$ 时，A（1，2），B（4，2），C（3，0），可知 $AB//x$ 轴且 $AB=3$，点 C 到 AB 的距离为 2，

∴△ABC 的面积为$\frac{1}{2}\times3\times2=3$，∴$B$ 错；

点 A 关于 x 轴的对称点 A_1 坐标为（1，－2），则 $|\overrightarrow{PA}|+|\overrightarrow{PB}|$的最小值为 $A_1B=\sqrt{(1-4)^2+(-2-2)^2}=5$，∴$C$ 对；

∵θ∈（0，π），∴$t=\sin\theta\in(0,1]$，∵$\overrightarrow{CA}$与$\overrightarrow{CB}$的夹角 $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2})$，∴$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=t-7+m+\frac{16-3m}{t}>0$，

得：$m<\frac{t^2-7t+16}{3-t}=\frac{(3-t)^2+(3-t)+4}{3-t}=(3-t)+\frac{4}{3-t}+1$.

$2\leqslant3-t<3$，令 $3-t=s\in[2,3)$，则 $(3-t)+\frac{4}{3-t}+1=s+\frac{4}{s}+1\geqslant2\sqrt{s\cdot\frac{4}{s}}+1=5$，当且仅当 $s=\frac{4}{s}$，即 $s=2$ 时取“＝”，∴$m<5$，∴D 对.

故选：ACD.

二、填空题

12.【答案】$(-\infty,2]$

【解析】解：∵命题“$\exists x\in R$，$e^x<a-e^{-x}$”为假命题，

∴$\forall x\in R$，$e^x+e^{-x}\geqslant a$ 恒成立，

∵$e^x+e^{-x}\geqslant2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=2$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，

故实数 a 的取值范围为：$(-\infty,2]$.

故答案为：$(-\infty,2]$.

13.【答案】16

【解析】由题意得 $a+4b=4$，$a>0$，$b>0$，

则$\frac{4}{a}+\frac{9}{b}=\frac{1}{4}(\frac{4}{a}+\frac{9}{b})(a+4b)=\frac{1}{4}(40+\frac{16b}{a}+\frac{9a}{b})\geqslant\frac{1}{4}(40+2\sqrt{\frac{16b}{a}\cdot\frac{9a}{b}})=16$，

当且仅当$\frac{16b}{a}=\frac{9a}{b}$且 $a+4b=4$，即 $a=1$，$b=\frac{3}{4}$时取等号，此时$\frac{4}{a}+\frac{9}{b}$的最小值 16.

故答案为：16.

专题六　数列

一、单项选择题

1.【答案】 D

【解析】因为 $2S_3=a_2+a_3+a_4$ ，所以 $2(a_1+a_2+a_3)=a_2+a_3+a_4$ ，

即 $2a_1+a_2+a_3=a_4$ ，

因为 $a_1\neq 0$ ，所以 $2+q+q^2=q^3$ ，

即 $(q-2)(q^2+q+1)=0$ ，

因为 $q^2+q+1\neq 0$ ，所以 $q=2$.

故答案为：D

2.【答案】A

【解析】由题意 $2a_{2021}=a_{2019}+a_{2020}$，

设正项等比数列$\{a_n\}$的公比为 q（$q>0$），$\therefore 2a_{2020}\cdot q=\frac{a_{2020}}{q}+a_{2020}$，

$\because a_{2020}\neq 0$，$\therefore 2q^2-q-1=0$，解得 $q=-\frac{1}{2}$（舍去），或 $q=1$.

故选：A.

3.【答案】C

【解析】$\because S_n$是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$\begin{vmatrix}1 & (10-a_7)\\ 1 & a_9\end{vmatrix}=0$，

$\therefore a_9-(10-a_7)=0$，解得 $a_9+a_7=10$，

$\therefore S_{15}=\frac{15}{2}(a_1+a_{15})=\frac{15}{2}(a_9+a_7)=\frac{15}{2}\times 10=75$.

故选：C.

4.【答案】B

【解析】设等差数列共有（$2n+1$）项，由题意得 $S_{奇}=a_1+a_3+\cdots+a_{2n+1}$，$S_{偶}=a_2+a_4+\cdots+a_{2n}$，

故 $S_{奇}-S_{偶}=a_1+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{2n+1}-a_{2n})=a_1+d+\cdots+d=a_1+nd=a_{n+1}=319-290=29$.

故中间项 a_{n+1} 为 29.

故选：B.

5.【答案】C

【解析】由数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2}$，$a_n+b_n=1$，$b_{n+1}=\frac{b_n}{1-a_n^2}$，

可得 $b_n=1-a_n$①，$b_{n+1}=\frac{b_n}{1-a_n^2}=\frac{b_n}{(1-a_n)(1+a_n)}=\frac{b_n}{b_n(1+a_n)}=\frac{1}{2-b_n}$，

则$b_{n+1}=\frac{1}{2-b_n}$，两边同时减去 1，得$b_{n+1}-1=\frac{1}{2-b_n}-1=\frac{b_n-1}{2-b_n}$，

则$\frac{1}{b_{n+1}-1}-\frac{1}{b_n-1}=-1$，

∵$\frac{1}{b_1-1}=\frac{1}{-a_1}=-2$，

∴$\{\frac{1}{b_n-1}\}$是以 - 2 为首项， - 1 为公差的等差数列.

∴$b_n=\frac{n}{n+1}$，

故$b_{2021}=\frac{2021}{2022}$.

故选：C.

6.【答案】C

【解析】由第 1 项 1＝1×1，第 2 项 6＝2×3，

第 3 项 15＝3×5，第 4 项 28＝4×7，...，

归纳得，第 n 项为 n（$2n$ - 1），

∴第 10 项为 10×（20 - 1）＝190，

故选：C.

7.【答案】D

【解析】由题意可得 f（1）＝1，f（2）＝1，f（3）＝2，f（4）＝2，f（5）＝2，f（6）＝2，f（7）＝3，f（8）＝3，f（9）＝3，f（10）＝3，f（11）＝3，f（12）＝3，

...，可得依次为 2 个 1，4 个 2，6 个 3，8 个 4，10 个 5，...，

因此 $a_1+a_2=2\times1=2$，$a_3+a_4+a_5+a_6=4\times\frac{1}{2}=2$，$a_7+a_8+...+a_{12}=6\times\frac{1}{3}=2$，$a_{13}+a_{14}+...+a_{20}=8\times\frac{1}{4}=2$，...，

由 20＝10×2，可得 $m=2+4+6+8+...+20=\frac{1}{2}\times10\times(2+20)=110$.

故选：D.

二、多项选择题

8.【答案】ABC

【解析】$a_1=1$，$a_n\bullet a_{n+1}=2^n$，∴$a_2\bullet a_1=2$，即 $a_2=2$，

∵$a_n\bullet a_{n+1}=2^n$，∴$a_{n+1}\bullet a_{n+2}=2^{n+1}$，

∴$\frac{a_{n+2}}{a_n}=2$，

∴数列$\{a_n\}$的奇数列和偶数列，分别是以 2 为公比的等比数列，

$\therefore a_{2n}=2\times 2^{n-1}=2^n$，$a_{2n-1}=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$，

$\therefore a_4=4$，故 AB 正确；

$\therefore a_{2n}-a_{2n-1}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$，故 C 正确；

$\therefore a_{2n}+a_{2n-1}=2^n+2^{n-1}=3\times 2^{n-1}$，故 D 不正确.

故选：ABC.

9. 【答案】ABD

【解析】数表中，每行是等差数列，且第一行的首项是 1，公差为 2，第二行的首项是 4，公差为 4，第三行的首项是 12，公差为 8，每行的第一个数满足数列 $a_n=n\times 2^{n-1}$，每行的公差构成一个以 2 为首项，公比为 2 的等比数列，公差满足数列 $d_n=2^n$.

对于选项 A：由题可知，每行第一个数满足下列关系：$a_n=n\times 2^{n-1}$，所以第 6 行第 1 个数为 $a_6=6\times 2^{6-1}=192$，故 A 正确；

对于选项 B：每行的公差构成一个以 2 为首项，公比为 2 的等比数列，故第 10 行的数从左到右构成公差为 2^{10} 的等差数列，选项 B 正确；

对于选项 C：第 10 行的第一个数为 $a_{10}=10\times 2^{10-1}=10\times 2^9$，公差为 2^{10}，所以前 10 个数的和为：

$10\times 10\times 2^9+\dfrac{10\times 9}{2}\times 2^{10}=190\times 2^9$，故 C 错误；

对于选项 D：数表中第 2021 行中第一个数为 $a_{2021}=2021\times 2^{2021-1}=2021\times 2^{2020}$，第 2021 行的公差为 2^{2021}，故数表中第 2021 行第 2021 个数为 $2021\times 2^{2020}+(2021-1)\times 2^{2021}=6061\times 2^{2020}$，选项 D 正确.

故选：ABD.

10. 【答案】ABD

【解析】设丢失的这个数据为 a，由题意可得，众数为 2，平均数为 $\frac{25+a}{7}$，

①当 $a\leq 2$ 时，这列数位 a，2, 2, 2, 4, 5, 10，则中位数为 2，

所以 $\frac{25+a}{7}$，2, 2, 成等差数列，则 $\frac{25+a}{7}=2$，解得 $a=-11<2$，符合题意；

②当 $2<a<4$ 时，这列数位 2, 2, 2，a，4, 5, 10，则中位数为 a，

所以 $\frac{25+a}{7}$，a，2 成等差数列，则 $2a=\frac{25+a}{7}+2$，解得 $a=3$，符合题意；

③当 $a\geqslant 4$ 时，这列数为2，2，，2, 4，a，，5, 10，则中位数为4，

所以$\frac{25+a}{7}$，4, 2成等差数列，则有 $2\times 4=\frac{25+a}{7}+2$，解得 $a=17$，符合题意．

故选：ABD．

11．【答案】ABD

【解析】$a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$，$a_n+a_{n-1}=2a_{n-1}+2a_{n-2}=2(a_{n-1}+a_{n-2})$（$n\geqslant 3$），

因为 $a_1=a_2=1$，所以 $a_3=a_1+2a_2=3$，

$a_3+a_2=4=2(a_2+a_1)$，

所以数列$\{a_n+a_{n+1}\}$是首项为2，公比为2的等比数列，

所以 $a_n+a_{n+1}=2\cdot 2^{n-1}=2^n$，故选项 A 正确；

$a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$，

$a_n-2a_{n-1}=2a_{n-2}-a_{n-1}=-(a_{n-1}-2a_{n-2})$，

$a_3-2a_2=3-2=1$，$a_2-2a_1=1-2=-1$，

所以$\{a_{n+1}-2a_n\}$是首项为-1，公比为-1的等比数列，

$a_{n+1}-2a_n=-1\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^n$，故选项 B 正确；

$\begin{cases}a_{n+1}+a_n=2^n\\a_{n+1}-2a_n=(-1)^n\end{cases}$，所以 $a_n=\frac{2^n-(-1)^n}{3}$，故选项 C 错误；

$S_{20}=a_1+a_2+\cdots+a_n$

$=\frac{2-(-1)}{3}+\frac{2^2-(-1)^2}{3}+\cdots+\frac{2^{20}-(-1)^{20}}{3}$

$=\frac{(2+2^2+\cdots+2^{20})-[(-1)+(-1)^2+\cdots+(-1)^{20}]}{3}$

$=\frac{1}{3}\times[\frac{2(1-2^{20})}{1-2}-\frac{(-1)\times[1-(-1)^{20}]}{1-(-1)}]$

$=\frac{2}{3}(2^{20}-1)=\frac{2}{3}(4^{10}-1)$，故选项 D 正确．

故选：ABD．

12．【答案】ABD

【解析】由 $a_1=3+3$，$a_2=3+3+9$，$a_3=3+3+9+27$，$a_4=3+3+9+27+81$，，$\cdots$，$a_n=3+3^1+3^2+3^3+\cdots+3^n=3+\frac{3(1-3^n)}{1-3}$

$=\frac{3^{n+1}+3}{2}$，

由 a_1 有3项，a_2 有5项，a_3 有9项，a_5 有17项，$\cdots$，

故 a_n 有 2^n+1 项．故 C 错误；

所以 $k+2=2^n+1$，即 $k+1=2^n$，故 A 正确；

由 $a_n=\dfrac{3^{n+1}+3}{2}$，可得 $a_{n+1}=\dfrac{3^{n+2}+3}{2}=3a_n-3$，故 B 正确；

由 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\dfrac{1}{2}(3^2+3^3+3^4+\cdots+3^{n+1})+\dfrac{3n}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9(1-3^n)}{1-3}+\dfrac{3n}{2}=\dfrac{3}{4}(3^{n+1}+2n-3)$，故 D 正确.

故选：ABD.

13. 【答案】 B, C

【解析】由题意，记 $\langle x\rangle$ 表示与实数 x 最接近的整数，且 $k=\langle\sqrt{n}\rangle$，

当 $n=1$ 时，可得 $\sqrt{n}=1,\langle\sqrt{n}\rangle=1$，所以 A 不正确；

由 $|\sqrt{n}-\langle\sqrt{n}\rangle|<\frac{1}{2}$，即 $|\sqrt{n}-k|<\frac{1}{2}$，可得 $-\frac{1}{2}<\sqrt{n}-k<\frac{1}{2}$，

可得 $\sqrt{n}<k+\frac{1}{2}$ 成立，所以 B 符合题意；

由 $-\frac{1}{2}<\sqrt{n}-k<\frac{1}{2}$，可得 $k-\frac{1}{2}<\sqrt{n}<k+\frac{1}{2}$，平方可得 $k^2-k+\frac{1}{4}<n<k^2+k+\frac{1}{4}$，

因为 $n\in N*$，且 $k^2-k+\frac{1}{4}$ 不是整数，

其中 k^2-k+1 是 $k^2-k+\frac{1}{4}$ 右侧的最接近的整数，

所以 $n\geq k^2-k+1$ 成立，所以 C 符合题意；

当 $n=1,2$ 时，$\langle\sqrt{n}\rangle=1$，此时 $a_1=a_2=1$；

当 $n=3,4,5,6$ 时，$\langle\sqrt{n}\rangle=2$，此时 $a_3=a_4=a_5=a_6=\frac{1}{2}$；

当 $n=7,8,9,10,11,12$ 时，$\langle\sqrt{n}\rangle=3$，此时 $a_7=a_8=\cdots=a_{12}=\frac{1}{3}$；

当 $n=13,14,\cdots,20$ 时，$\langle\sqrt{n}\rangle=4$，此时 $a_{13}=a_{14}=\cdots=a_{20}=\frac{1}{4}$；

……

归纳可得数列 $\{a_n\}$ 中，有 2 个 1，4 个 $\frac{1}{2}$，6 个 $\frac{1}{3}$，8 个 $\frac{1}{4}$，……

又由 $2,4,6,8,\cdots$ 构成首项为 2，公差为 2 的等差数列，可得 $S_n=\frac{n(2+2n)}{2}=n(n+1)$，

令 $n(n+1)\leq 2021,n\in N^*$，解得 $n=44$，

所以 $S_{2021}=1\times 2+\frac{1}{2}\times 4+\frac{1}{3}\times 6+\cdots+\frac{1}{22}\times 44+\frac{1}{23}\times 41=88+\frac{41}{23}$，所以 D 不正确.

故答案为：BC.

三、填空题

14.【答案】1 或$-\dfrac{1}{2}$

15.【答案】 1348

【解析】由斐波那契数列的特点知：从第一项起，每 3 个数中前两个为奇数后一个偶数，

$\because$ $\dfrac{2021}{3}$ 的整数部分为 673，余数为 2，

$\therefore$该数列的前 2021 项中共有 673 个偶数，奇数的个数为 $2021-673=1348$.

故答案为：1348

16.【答案】-999

【解析】由题知，$S_n-S_{n-1}=-n^2$，则 $S_{n-1}+S_n=-(n+1)^2$.

两式作差得：$a_{n+1}+a_n=(-n+1)^2-(-n^2)=-2n-1$.

整理得 $a_{n+1}+(n+1)=-(a_n+n)$.

所以$\{a_n+n\}$是以 $a_1+1=1022$ 为首项，-1 为公比的等比数列.

$\therefore a_{2021}+2021=1022\times(-1)^{2020}=1022$. 则 $a_{2021}=-999$，

故答案为：-999.

17.【答案】-1

【解析】$\because 2S_n-na_n=n$（$n\in N^*$），$\therefore S_n=\dfrac{n(a_n+1)}{2}$,

$\therefore S_1=a_1=\dfrac{a_1+1}{2}$，解得 $a_1=1$，

$\therefore S_n=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)$，$\therefore\{a_n\}$是等差数列，

$\because S_{20}=-360$，$\therefore S_{20}=\dfrac{20(1+a_{20})}{2}=-360$，

解得 $a_{20}+1=-36$，即 $a_{20}=-37$，

$\therefore 19d=a_{20}-a_1=-38$，解得 $d=-2$，

$\therefore a_2=a_1+d=1-2=-1$.

故答案为：-1.

18.【答案】1 或 8 或 10 或 64（只需填一个）

【解析】若 $a_7=1$，则 $a_6=2$，$a_5=4$，$a_4=8$ 或 1，

①当 $a_4=8$ 时，$a_3=16$，$a_2=32$ 或 5，

若 $a_2=32$，则 $a_1=64$；若 $a_2=5$，则 $a_1=10$，

②若 $a_4=1$ 时，$a_3=2$，$a_2=4$，$a_1=8$ 或 1，

综上所述，m 的值为 1 或 8 或 10 或 64，

故答案为：1 或 8 或 10 或 64（只需填一个）.

19.【答案】83

【解析】∵$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2}，a_n为偶数\\3a_n+1，a_n为奇数\end{cases}$，

∴当 $a_6=2$ 时，则 $a_5=4$，

①当 $a_5=4$ 时，$a_4=1$ 或 $a_4=8$，

②若 $a_4=1$ 时，则 $a_3=2$，若 $a_4=8$ 时，$a_3=16$，

③若 $a_3=2$ 时，则 $a_2=4$，若 $a_3=16$ 时，$a_2=32$ 或 $a_2=5$，

④若 $a_2=4$ 时，则 $a_1=8$ 或 $a_1=1$，若 $a_2=32$ 时，则 $a_1=64$，若 $a_2=5$ 时，则 $a_1=10$，

∴m 的值为 1 或 8 或 10 或 64，

∴m 的所有取值之和为 1+8+10+64＝83.

故答案为：83.

20.【答案】2026

【解析】由题，$S_n=\log_2\left(\dfrac{1+2}{1+1}\right)+\log_2\left(\dfrac{2+2}{2+1}\right)+\cdots+\log_2\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$

$=\log_2\dfrac{3}{2}+\log_2\dfrac{4}{3}+\cdots+\log_2\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$

$=\log_2\dfrac{n+2}{2}=\log_2(n+2)-\log_2 2=\log_2(n+2)-1$.

所以，$S_k=\log_2(k+2)-1$.

因为 S_k 为正整数，所以 $\log_2(k+2)-1>0$，即 $k+2>2\Rightarrow k>0$.

令 $m=\log_2(k+2)$，则 $k=2^m-2$.

因为 $k\in[1,2021]$，所以 $2^m\in[3,2023]$.

因为 $y=2^x$ 为增函数，且 $2^1=2,2^2=4,\cdots,2^{10}=1024,2^{11}=2048$

所以 $m\in[2,10]$.

所以所有“好数”的和为 $2^2-2+2^3-2+\cdots+2^{10}-2=\dfrac{2^2-2^{10}\times 2}{1-2}-2\times 9=2026$.

故答案为：2026.

21. 【答案】88

【解析】

88 把 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 带入条件可求得，$S_n=\sqrt{n}$. $\frac{1}{S_n}=\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{2\sqrt{n}}$，又 $\frac{2}{2\sqrt{n}}>\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$，所以，$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots$ $+\frac{1}{S_{2\,025}}>2(\sqrt{2\,026}-1)>88$，又 $\frac{2}{2\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(n\geqslant 2)$，

$\therefore \frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_{2\,025}}<1+2(\sqrt{2\,025}-1)=89$. 由上可得答案为 88.

四、解答题

22. 【解析】（1）等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_2=4$，$S_5=30$，

设首项为 a_1，公差为 d，

所以 $\begin{cases} a_1+d=4 \\ 5a_1+\dfrac{5\times 4}{2}d=30 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a_1=2 \\ d=2 \end{cases}$，故 $a_n=2n$；

（2）由于 $b_n=\dfrac{2}{a_n^2-1}=\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}$，所以 $T_n=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\ldots+(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})=1-\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{2n}{2n+1}$.

23. 【解析】（1）由题意得：$a_1=2$，$a_2=4$，$a_3=8$，

$\therefore$ 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=\dfrac{4}{2}=2$，$\therefore a_n=2\times 2^{n-1}=2^n$.

又 $b_n=2\log_2 a_n=2\log_2 2^n=2n$，$\therefore b_n=2n$.

（2）由（1）知：$\dfrac{1}{b_n^2-1}=\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，

$\therefore T_n=\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，

$\because n\in N^*$，$\therefore \dfrac{1}{2n+1}>0$，$\therefore 1-\dfrac{1}{2n+1}<1$，$\therefore T_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)<\dfrac{1}{2}$.

24. 【解析】（1）证明：由 $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$，得 $b_{n+1}=a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)=2b_n$，

又 $b_1=a_1+a_2=2\neq0$，所以 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，

（2）由（1）知，$T_n=\dfrac{2-2^n\times2}{1-2}=2(2^n-1)$，

于是 $\dfrac{b_{n+1}}{T_n\cdot T_{n+1}}=\dfrac{T_{n+1}-T_n}{T_n\cdot T_{n+1}}=\dfrac{1}{T_n}-\dfrac{1}{T_{n+1}}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1})$，

$$\frac{b_2}{T_1\cdot T_2}+\frac{b_3}{T_2\cdot T_3}+\cdots+\frac{b_{n+1}}{T_n\cdot T_{n+1}}$$
$$=\frac{1}{2}[(\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^2-1})+(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1})+\cdots+(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1})]=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{n+1}-1}).$$

因为 $\dfrac{1}{2^{n+1}-1}>0$，所以 $\dfrac{b_2}{T_1\cdot T_2}+\dfrac{b_3}{T_2\cdot T_3}+\cdots+\dfrac{b_{n+1}}{T_n\cdot T_{n+1}}<\dfrac{1}{2}$.

25.【解析】解：（1）数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_1=1$，$2S_n=na_{n+1}$，①

当 $n=1$ 时，解得 $a_2=2$，

当 $n\geqslant2$ 时，$2S_{n-1}=(n-1)a_n$，②

①-②得：$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}$，故 $\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{a_2}{2}=1$，

所以 $a_n=n$（首项符合通项），

故 $a_n=n$.

（2）由于 $b_nb_{n+1}=2^n$，$n\in N^*$，

所以 $b_{n+1}b_{n+2}=2^{n+1}$，

所以 $\dfrac{b_{n+2}}{b_n}=2$（常数），

由于 $b_1=1$，所以 $b_2=2$，

所以数列 $\{b_n\}$ 的偶数项为以 2 为首项，2 为公比的等比数列；

所以构造新数列 $\{c_n\}$：a_1，b_2，a_3，b_4，a_5，b_6，…，

$\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项的和：

$T_{2n}=(a_1+a_3+...+a_{2n-1})+(b_2+b_4+...+b_{2n})=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}+\dfrac{2\times(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}+n^2-2.$

26.【解析】解：（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，

由 $a_1=b_2=2$，$S_5=30$，b_4+2 是 b_3 与 b_5 的等差中项，

可得 $b_1q=2$，$5\times2+10d=30$，$2(b_4+2)=b_3+b_5$，即 $2(b_1q^3+2)=b_1q^2+b_1q^4$，解得 $d=2$，$b_1=1$，$q=2$，

则 $a_n=2+2(n-1)=2n$；$b_n=2^{n-1}$；

（2）$a_{60}=120$，所以数列 $\{a_n\}$ 前 60 项中与数列 $\{b_n\}$ 的公共项共有 6 项，且最大公共项为 $b_7=2^6=64$，

又 $a_{66}=132$，$b_8=2^7=128$，

所以 $T_{60}=S_{67}-(2+2^2+...+2^7)=134+\frac{1}{2}\times67\times66\times2-\frac{2(1-2^7)}{1-2}$

$=4556-254=4302$.

27.【解析】证明：（1）当 $n=2$ 时，$S_3+S_1=2S_2+1$，

即 $a_1+a_2+a_3+a_1=2(a_1+a_2)+1$，得 $a_3=3$，

当 $n\geqslant2$ 时，因为 $S_{n+1}+S_{n-1}=2S_n+1$，所以 $S_{n+2}+S_n=2S_{n+1}+1$，

两式相减得 $a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}$，

所以 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$，

所以 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以 a_3-a_2 为首项，以 1 为公比的等比数列；

$a_3-a_2=1$，

所以 $a_{n+1}-a_n=1$，

所以 $a_n=\begin{cases}2, & n=1,\\ n, & n\geqslant2.\end{cases}$

（2）数列 $\{a_n\}$ 前 100 项为 2，2，3，4，5，…，100，

数列 $\{2^{a_n}\}$ 为 2^2，2^2，2^3，2^4，…，2^n，

所以数列 $\{c_n\}$ 前 100 项含有数列 $\{2^{a_n}\}$ 的项为 2^2，2^2，2^3，2^4，2^5，2^6 共六项，

所以 $T_n=2^2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2+2+3+4+5+\cdots+94=128+2+\frac{(2+94)\times93}{2}=4594$.

28.【解析】 解：选①：$\because$ $2S_n+1=3^n$ ，当 $n\geq2$ 时，$2S_{n-1}+1=3^{n-1}$ ，

两式相减得 $2a_n=2\cdot3^{n-1}$ ，$\therefore$ $a_n=3^{n-1}(n\geq2)$ ，

又$\because$ $a_1=1$ 满足上式，

故 $a_n=3^{n-1}$ ，

令 $b_n=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{(n+1)\log_3a_{n+1}}=(\frac{1}{3})^{n-1}+\frac{1}{(n+1)\log_3 3^n}=(\frac{1}{3})^{n-1}+\frac{1}{n(n+1)}=(\frac{1}{3})^{n-1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ ，

$\therefore$ $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=(\frac{1}{3})^0+(\frac{1}{3})^1+(\frac{1}{3})^2+\cdots+(\frac{1}{3})^{n-1}+(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}+1-\frac{1}{n+1}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{n-1}-\frac{1}{n+1}$ ，

因为 $\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{n-1}>0$ ，$\frac{1}{n+1}>0$ ，所以 $T_n<\frac{5}{2}$.

选②：$\because$ $a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n=3^{\frac{n^2-n}{2}}$ ，$\therefore$当 $n\geq2$ 时，$a_1a_2\cdots a_{n-1}=3^{\frac{(n-1)^2-(n-1)}{2}}$ ，两式相除得 $a_n=$