目　录

第一章　行列式

知识要点

1.排列：

$i_1, i_2, \cdots, i_n$的逆序数 $N(i_1 i_2 \cdots i_n) =$ i_1 后面比 i_1 小的个数$+ i_2$ 后面比 i_2 小的个数$+ \cdots +$ i_{n-1} 后面比 i_{n-1} 小的个数.

2.n 个元素所有排列的种数为 $P_n = n(n-1)3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

3.n 阶行列式的定义：$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & a_n \\ a_n & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \sum_{i_1 \cdots i_n} (-1)^{N(i_1 \cdots i_j)} a_{i_1} \cdots a_{i_n}$.

4.对角行列式$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

5.关于代数余子式的重要性质：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = \dot{D} \delta_{ij} = \begin{cases} D, i = j, \\ 0, i \neq j, \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = D \delta_{ij} = \begin{cases} D, i = j, \\ 0, i \neq j, \end{cases}$$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$为原行列式的值.

6.行列式的计算方法：

(1)行列式定义法；

(2)用行列式的性质将行列式化为上/下三角行列式；

(3)行列式按一行、列展开降阶法;

(4)递推公式法.

7.范德蒙德行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \Pi_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(x_i - x_j).$$

8.克莱姆法则:

n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{12}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m}x_n = b_n, \end{cases}$$

若方程组系数行列式 $D \neq 0$,则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式.

第一节　行列式的概念

(A)基础练习

一、选择题

1.排列 145362879 的逆序数为(　　).

A. 8　　B. 7　　C. 10　　D. 9

2. 下列排列中,(　　)是偶排列.

A. 54312　　B. 51432　　C. 38162754　　D. 654321

3. 下列各项中,(　　)为某 4 阶行列式中带正号的项.

A. $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$　　B. $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$　　C. $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$　　D. $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$

4. 若行列式 $\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ 的值为 0,则 $\lambda=$(　　).

A. -1 或 3　　B. 0 或 3　　C. 1 或 -3　　D. -1 或 -3

5. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 的值是(　　).

A. -1　　B. -2　　C. 1　　D. 2

6. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 的值为(　　).

A. 0　　B. $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

C. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$　　D. $-\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

二、填空题

1. $\begin{vmatrix} 34\ 215 & 35\ 215 \\ 28\ 092 & 29\ 092 \end{vmatrix}=$______________.

2. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=$______________.

3. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{vmatrix}=$______________.

4.行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2\,000 & 2\,001 & 2\,002 \\ 0 & -1 & 0 & 2\,003 \\ 0 & 0 & -1 & 2\,004 \\ 0 & 0 & 0 & 2\,005 \end{vmatrix}$=______________.

5.行列式$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$=______________.

三、计算题

1.用对角线法则计算二阶行列式.

(1)$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

(2)$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

(3)$\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$

(4)$\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$

2.用对角线法则计算三阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

(B)提高练习

一、填空题

1.要使排列(3729m14n5)为偶排列,则 $m=$________,$n=$________.

2.若 $a_{1i}a_{23}a_{35}a_{5j}a_{44}$ 是五阶行列式中带有正号的一项,则 $i=$________,$j=$________.

3.关于 x 的多项式 $\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ x & -x & x \\ 1 & 2 & -2x \end{vmatrix}$ 中含 x^3,x^2 项的系数分别是________,________.

4.$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$,则 x 应满足的条件是________.

二、用对角线法则计算三阶行列式

1.$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

三、利用行列式的定义计算行列式

1. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

第二节　行列式的性质

（A）基础练习

一、选择题

1. 行列式 $3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=$（　　）.

A. $\begin{vmatrix} 3a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & 3b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & 3c_3 \end{vmatrix}$　　B. $\begin{vmatrix} 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \\ 3a_2 & 3b_2 & 3c_2 \\ 3a_3 & 3b_3 & 3c_3 \end{vmatrix}$

C. $\begin{vmatrix} 3a_1 & -3b_1 & 3c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$　　D. $\begin{vmatrix} 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

2. 已知四阶行列式 A 的值为 2，将 A 的第 3 行元素乘以 -1 加到第 4 行的对应元素上去，则现行列式的值为（　　）.

A. 2　　B. 0　　C. -1　　D. -2

3. 设 $D=\begin{vmatrix} a+m & c+e \\ b+n & d+f \end{vmatrix}$，则 $D=$（　　）.

A. $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} m & e \\ n & f \end{vmatrix}$　　B. $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} m & c \\ n & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} m & e \\ n & f \end{vmatrix}$

C. $\begin{vmatrix} a & c \\ n & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} m & e \\ b & f \end{vmatrix}$　　D. $\begin{vmatrix} m & a \\ b & n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & e \\ d & f \end{vmatrix}$

4. 设行列式 $D_1=\begin{vmatrix} a & b & c+a \\ a_1 & b_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$，则 $D_1=$（　　）.

A. 0　　B. D_2　　C. $2D_2$　　D. $3D_2$

5. 设行列式 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1$，则行列式 $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{4}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$（　　）.

A. $\frac{2}{3}$　　B. 1　　C. 2　　D. $\frac{8}{3}$

6. 设行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=3$，$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & 5a_{11}+2a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 5a_{21}+2a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 5a_{31}+2a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则 D_1 的值为（　　）.

A. -15　　B. -6　　C. 6　　D. 15

7. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}$ 的值为（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 0　　D. -1

二、计算下列行列式

1. $\begin{vmatrix} 4\ 251 & 6\ 251 \\ 7\ 092 & 9\ 092 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$.

3. $D=\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1\,014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$.

4. $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.