02 数列大题综合

1．（2023·贵州·统考模拟预测）已知数列$\{a_n\}$是等差数列，数列$\{b_n\}$是公比不等于 1 的等比数列，且$a_1=b_1=1$，$a_2=b_2$，$a_5=b_3$.

(1)求a_n与b_n；

(2)设$S_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$，求$S_n$.

【答案】(1)$a_n=2n-1$，$b_n=3^{n-1}$

(2)$S_n=3^n-n-1$

【分析】（1）运用等差数列、等比数列的基本量计算即可.

（2）运用错位相减法求和即可.

【详解】（1）设$\{a_n\}$的公差为d，$\{b_n\}$的公比为$q(q\neq1)$，

由$a_1=b_1=1$，$a_2=b_2$，$a_5=b_3$，得$\begin{cases}1+d=q\\1+4d=q^2\end{cases}$，

解得$d=2$，$q=3$，

所以$a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$，$b_n=b_1q^{n-1}=3^{n-1}$.

（2）由（1）得$S_n=1\times3^{n-1}+3\times3^{n-2}+5\times3^{n-3}+\cdots+(2n-3)\times3+(2n-1)\times1$，

所以$\frac{1}{3}S_n=1\times3^{n-2}+3\times3^{n-3}+5\times3^{n-4}+\cdots+(2n-3)\times1+(2n-1)\times\frac{1}{3}$，

两式相减得$\frac{2}{3}S_n=3^{n-1}+2\left(3^{n-2}+3^{n-3}+\cdots+3+1\right)-\frac{2n-1}{3}$

$=3^{n-1}+\frac{2\left(1-3^{n-1}\right)}{1-3}-\frac{2n-1}{3}=2\times3^{n-1}-\frac{2n+2}{3}$，

所以$S_n=3^n-n-1$.

2．（2023·陕西商洛·统考二模）已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2+a_5=2(a_3+1)$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，求数列$\left\{\frac{1}{n+S_n}\right\}$的前 n 项和T_n.

【答案】(1)$a_n=2n-1$

(2) $T_n=\frac{n}{n+1}$

【分析】(1) 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，根据等差数列的性质即可求得d的值，进而即可求得$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 先根据等差数列前n项和的公式求得S_n，从而可得$\left\{\frac{1}{n+S_n}\right\}$的通项公式，再根据裂项相消即可求得$T_n$.

【详解】(1) 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

由$a_1=1$，$a_2+a_5=2(a_3+1)$，得$2+5d=2(1+2d+1)$，解得$d=2$.

所以$a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$.

(2) 由 (1) 得$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$，

所以$\frac{1}{n+S_n}=\frac{1}{n+n^2}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

所以$T_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

3.（2023·宁夏吴忠·统考模拟预测） 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_na_{n+1}=2^{n-1}$.

(1)设$b_n=a_{2n}$，求b_1和b_2的值及数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2)若不等式$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2m}>200$成立，求正整数$m$的最小值.

【答案】(1) $b_1=1,b_2=2$，$b_n=2^{n-1}$

(2)正整数m的最小值为7

【分析】(1) 根据递推公式求出a_2、a_3、a_4的值，即可求出b_1，b_2，再由$a_{2n}a_{2n+1}=2^{2n-1}$，$a_{2n+1}a_{2n+2}=2^{2n}$，即可得到$\frac{b_{n+1}}{b_n}=2$，从而得到$\{b_n\}$是1为首项，2为公比的等比数列，即可求出其通项公式；

(2) 由 (1) 可得$\{a_{2n-1}\}$是1为首项，2为公比的等比数列，利用分组求和及等比数列求和公式求出$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2m}$，即可得到$2^{m+1}-2>200$，解得$m>\log_2 101$，从而求出$m$的最小值.

【详解】(1) 由已知$a_1=1$，$a_na_{n+1}=2^{n-1}$

所以 $a_1a_2=1$，则 $a_2=1$，$a_2a_3=2$，则 $a_3=2$，$a_3a_4=4$，则 $a_4=2$；

因此 $b_1=a_2=1$，$b_2=a_4=2$，

因为 $a_{2n}a_{2n+1}=2^{2n-1}$，$a_{2n+1}a_{2n+2}=2^{2n}$，

所以 $\dfrac{a_{2n+2}}{a_{2n}}=2$，即 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2$，

故 $\{b_n\}$ 是 1 为首项，2 为公比的等比数列，

因此 $b_n=2^{n-1}$；

（2）由（1）知 $a_{2n}=b_n=2^{n-1}$，又 $a_{2n-1}a_{2n}=2^{2n-2}$，

所以 $a_{2n-1}=\dfrac{2^{2n-2}}{2^{n-1}}=2^{n-1}$，可得 $\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}=2$，

所以 $\{a_{2n-1}\}$ 是 1 为首项，2 为公比的等比数列，

因此 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2m}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2m-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2m})$

$=\dfrac{1-2^m}{1-2}\times 2=2^{m+1}-2$，

由 $2^{m+1}-2>200$，解得 $m>\log_2 101$，因为 $2^6<101<2^7$，又因为 $m\in\mathbf{N}^*$，

所以正整数 m 的最小值为 7.

4．（2023·内蒙古·校联考模拟预测） 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=2$，$\dfrac{2S_{n+1}}{a_{n+1}}=\dfrac{2S_n}{a_n}+1$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若 $b_n=\dfrac{1}{S_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

【答案】(1) $a_n=2n$

(2) $T_n=\dfrac{n}{n+1}$

【分析】（1）先根据 $\dfrac{2S_{n+1}}{a_{n+1}}=\dfrac{2S_n}{a_n}+1$，可得数列 $\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列，从而可得数列 $\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$ 的通项，再根据 a_n 与 S_n 的关系结合构造法即可得解；

（2）先求出数列 $\{b_n\}$ 的通项，再利用裂项相消法即可得解.

【详解】(1) 因为$\frac{2S_{n+1}}{a_{n+1}}=\frac{2S_n}{a_n}+1$，

所以$\frac{S_{n+1}}{a_{n+1}}-\frac{S_n}{a_n}=\frac{1}{2}$，

所以数列$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是以$\frac{S_1}{a_1}=1$为首项，$\frac{1}{2}$为公差的等差数列，

所以$\frac{S_n}{a_n}=\frac{n+1}{2}$，则$S_n=\frac{n+1}{2}a_n$，

当$n\geq 2$时，$S_{n-1}=\frac{n}{2}a_{n-1}$，

两式相减得$a_n=\frac{n+1}{2}a_n-\frac{n}{2}a_{n-1}$，即$\frac{a_n}{n}=\frac{a_{n-1}}{n-1}$，

所以数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$为常数列，且$\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}=2$，

所以$a_n=2n$；

(2) 由(1)得$S_n=\frac{n+1}{2}a_n=n(n+1)$，

所以$b_n=\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

所以$T_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

5.（2023·内蒙古赤峰·校联考模拟预测）等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_8=4$，$a_2=\frac{3}{5}$.

(1)设$b_n=[a_n]$，求数列$\{b_n\}$的前 7 项和，其中$[x]$表示不超过x的最大整数，如$[0.9]=0$，$[2.6]=2$；

(2)设$C_n=\frac{3}{25a_na_{n+1}}$，$T_n$是数列$\{C_n\}$的前$n$项和，求证：$T_n<\frac{3}{2}$.

【答案】(1)7

(2)证明见解析

【分析】(1) 根据题意求得等差数列$\{a_n\}$的通项公式，由$[x]$的定义，分别求得$b_1,b_2,\cdots,b_7$，即可得到结果；

(2) 根据题意可得数列$\{C_n\}$的通项公式，然后由裂项相消法即可得到结果；

【详解】(1) 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，因为$a_2=\frac{3}{5}$，则$a_3+a_8=a_2+d+a_2+6d=4$，

所以$d=\frac{2}{5}$，则$a_n=a_2+(n-2)d=\frac{2}{5}n-\frac{1}{5}$；

且$b_n=[a_n]$，则$a_1=\frac{1}{5},b_1=0$，$a_2=\frac{3}{5},b_2=0$，$a_3=1,b_3=1$，

$a_4=\frac{7}{5},b_4=1$，$a_5=\frac{9}{5},b_5=1$，$a_6=\frac{11}{5},b_6=2$，$a_7=\frac{13}{5},b_7=2$，

所以数列$\{b_n\}$的前 7 项和为$0+0+1+1+1+2+2=7$.

（2）由（1）可知，$a_{n+1}=\frac{2n+1}{5},a_n=\frac{2n-1}{5}$，

所以$C_n=\frac{3}{25a_na_{n+1}}=\frac{3}{25\left(\frac{2n-1}{5}\right)\left(\frac{2n+1}{5}\right)}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

所以$T_n=\frac{3}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)<\frac{3}{2}$.

6．（2023·广西南宁·统考二模）记S_n为各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$S_3=7$且$a_3,3a_2,a_4$成等差数列.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=a_n\log_2 a_{n+1}^2$，求$\{b_n\}$的前 n 项和T_n.

【答案】(1)$a_n=2^{n-1}$

(2)$T_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$

【分析】（1）根据条件列出等比数列基本量的方程组，即可求解；

（2）由（1）可知$b_n=n\cdot 2^n$，利用错位相减法求和.

【详解】（1）设数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公比为 q，则$S_3=a_1+a_2+a_3=a_1\left(1+q+q^2\right)=7$ ①，

因为a_3，$3a_2$，a_4成等差数列，则$6a_2=a_3+a_4$，即$6a_1q=a_1q^2+a_1q^3$②，

因为$a_1\neq 0$，所以由②式可得$q^2+q-6=0$，解得$q=2$或$q=-3$（舍），

代入①式可得$a_1=1$，$\therefore a_n=2^{n-1}$

（2）由$b_n=a_n\log_2 a_{n+1}^2$得$b_n=2n\cdot 2^{n-1}=n\cdot 2^n$，

则$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$③，

所以$2T_n=1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+n\cdot 2^{n+1}$④

③−④得

$$-T_n=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=\frac{2\left(1-2^n\right)}{1-2}-n\cdot 2^{n+1}=2^{n+1}-2-n\cdot 2^{n+1}$$

$\therefore T_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$

7.（2023·广西南宁·南宁三中校考模拟预测） 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且

$3S_n+a_n=4$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$c_n=n\cdot a_n$，数列$\{c_n\}$的前n项和为T_n，证明：$T_n<\frac{16}{9}$.

【答案】(1) $a_n=\frac{1}{4^{n-1}}$;

(2)证明见解析

【分析】（1）利用数列的递推关系式求出数列的通项公式.

（2）利用错位相减法求出数列的和，根据不等式的性质可证明$T_n<\frac{16}{9}$.

【详解】（1）当$n=1$时，$3S_1+a_1=4$，解得$S_1=a_1=1$；

当$n\geq 2$时，$3S_n+a_n=4,3S_{n-1}+a_{n-1}=4$，两式相减得$a_n=\frac{1}{4}a_{n-1}$；

所以$\{a_n\}$是$a_1=1$，$q=\frac{1}{4}$的等比数列，

故$a_n=a_1q^{n-1}=\frac{1}{4^{n-1}}$.

（2）证明：因为$c_n=n\cdot a_n=\frac{n}{4^{n-1}}$，

所以$T_n=\frac{1}{4^0}+\frac{2}{4^1}+\frac{3}{4^2}+\cdots+\frac{n}{4^{n-1}}$,①

$\frac{1}{4}T_n=\frac{1}{4^1}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots+\frac{n}{4^n}$，②

①②得$\frac{3}{4}T_n=\frac{1}{4^0}+\frac{1}{4^1}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}-\frac{n}{4^n}=\frac{\frac{1}{4^0}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}-\frac{n}{4^n}=\frac{4}{3}-\frac{3n+4}{3\cdot 4^n}$

所以$T_n=\frac{16}{9}-\frac{3n+4}{9\times 4^{n-1}}$. 因为$\frac{3n+4}{9\times 4^{n-1}}>0$，所以$T_n<\frac{16}{9}$.

8.（2023·贵州·统考模拟预测） 公比为q的等比数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2^n+a$.

(1)求a与q的值；

(2)若$b_n=\log_2 a_n$，记数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，求$\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_3}+\cdots+\frac{1}{T_{n+1}}$.

【答案】(1) $a=-1$，$q=2$

(2) $\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_3}+\cdots+\frac{1}{T_{n+1}}=\frac{2n}{n+1}$

【分析】（1）根据 S_n,a_n 的关系由条件求 a_n，再结合等比数列定义求 a 与 q 的值；

（2）先求 b_n，利用等差数列求和公式求 T_n，利用裂项相消法求 $\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_3}+\cdots+\frac{1}{T_{n+1}}$.

【详解】（1）已知 $S_n=2^n+a$.

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2+a$；

当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$.

所以 $a_2=2,a_3=4$，

由数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，可得 $q=\frac{a_3}{a_2}=\frac{2^2}{2^1}=2$，

又 $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{2+a}$

所以 $2+a=1$，即 $a=-1$.

（2）因为 $b_n=\log_2 a_n=\log_2 2^{n-1}=n-1$.

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=0+1+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$，

所以当 $n\ge 2$ 时，$\frac{1}{T_n}=\frac{2}{n(n-1)}=2\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$，

所以 $\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_3}+\cdots+\frac{1}{T_{n+1}}=2\left(\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$

9.（2023·江西九江·瑞昌市第一中学校联考模拟预测）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，

$S_n=n^2+n$，$\{b_n\}$ 是等比数列，$b_1=a_1$，$b_2=\frac{a_1a_2}{2}$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)求数列 $\left\{\frac{1}{S_n}+b_n\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

【答案】(1) $a_n=2n$

(2) $T_n=\frac{n}{n+1}+2^{n+1}-2$

【分析】（1）利用 a_n 与 S_n 之间的关系，可得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）利用等比数列的通项公式可得 b_n，利用裂项相消法与分组求和法可得 T_n .

【详解】（1）$\because S_n = n^2 + n$ ，

$\therefore$ 当 $n=1$ 时，$a_1 = S_1 = 2$ ，

当 $n \ge 2$ 时，$S_{n-1} = (n-1)^2 + (n-1)$ ，

$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + n - [(n-1)^2 + (n-1)] = 2n$ ，

当 $n=1$ 时，$a_1 = 2$ 符合上式，

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n$ ；

（2）由（1）得 $a_n = 2n$ ，则 $a_2 = 4$ ，

$\therefore b_1 = a_1 = 2$ ，$b_2 = \dfrac{a_1 a_2}{2} = 4$ ，

在等比数列 $\{b_n\}$ 中，公比 $q = \dfrac{b_2}{b_1} = 2$ ，$\therefore b_n = 2^n$ ，

$\therefore \dfrac{1}{S_n} + b_n = \dfrac{1}{n^2+n} + 2^n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} + 2^n$ ，

$\therefore$ 数列 $\left\{\dfrac{1}{S_n} + b_n\right\}$ 的前 n 项和

$T_n = (1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}) + \left(2 + 2^2 + \cdots + 2^n\right) = 1 - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{2(1-2^n)}{1-2} = \dfrac{n}{n+1} + 2^{n+1} - 2$.

10．（2023·四川德阳·统考模拟预测）已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，且满足 $a_2 = 3$ ，

$a_2 + a_4 + a_6 = 21$. 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和是 S_n ，且 $S_n + b_n = 2$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 及数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)若 $c_n = a_n + b_n$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】(1) $a_n = 2n - 1$ ；$b_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(2) $n^2 + 2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

【分析】（1）由已知条件得 $a_4 = 7$ ，利用等差数列的通项公式即可得出 a；再由 S_n 与 b_n 的关系得出 $\{b\}$ 的通项公式；

（2）由（1）得 $c_n=a_n+b_n=2n-1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，利用分组求和求和即可.

【详解】（1）因为数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，且满足 $a_2=3$， $a_2+a_4+a_6=21$，

由等差数列的性质可得 $a_2+a_4+a_6=3a_4=21$， $a_4=7$，所以公差 $d=2$，

则 $a_n=3+(n-2)\times 2=2n-1$.

又当 $n=1$ 时， $b_1=S_1=2-b_1$，所以 $b_1=1$，

$S_n=2-b_n$ ①

当 $n\geq 2$ 时， $S_{n-1}=2-b_{n-1}$ ②

由①－②得 $b_n=-b_n+b_{n-1}$，即 $\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{1}{2}$（$n\geq 2$），

所以 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，故 $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

（2）由（1）得 $c_n=a_n+b_n=2n-1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，

所以 $T_n=\frac{n(1+2n-1)}{2}+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=n^2+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

11．（2023·四川达州·统考二模）已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和， $S_n=\frac{1}{4}n^2+\frac{5}{4}n$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=2^{a_{2n}}$，记 T_n， T_n' 分别为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和与前 n 项积，求 T_n+T_n'.

【答案】(1) $a_n=\frac{1}{2}n+1$

(2) $2^{n+2}+2^{\frac{n^2+3n}{2}}-4$

【分析】（1）先求出 a_1，当 $n\geq 2$ 时，求出 $a_n=S_n-S_{n-1}$，检验当 $n=1$ 时成立，即可求出通项公式；

（2）由（1）得出 b_n，可知 $\{b_n\}$ 为等比数列，根据等比数列前 n 项和公式求出 T_n，再将数列 $\{b_n\}$ 每一项相乘，底数相同指数相加，指数为等差数列，根据等差数列前 n 项和公式，计算出指数，求出 T_n'，即可求出 T_n+T_n'.

【详解】(1) $\because S_n=\frac{1}{4}n^2+\frac{5}{4}n$,

$\therefore a_1=S_1=\frac{3}{2}$,

当 $n\ge 2$ 时, $S_{n-1}=\frac{1}{4}(n-1)^2+\frac{5}{4}(n-1)$,

$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2}n+1$,

当 $n=1$ 时, $a_1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$,

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{1}{2}n+1$;

(2) $\because b_n=2^{a_{2n}}$, $a_{2n}=n+1$,

$\therefore b_n=2^{n+1}$,

$\therefore T_n=\frac{4\cdot(1-2^n)}{1-2}=2^{n+2}-4$,

$T_n'=2^2\times 2^3\times\cdots\times 2^{n+1}=2^{2+3+\cdots+(n+1)}=2^{\frac{[2+(n+1)]n}{2}}=2^{\frac{n^2+3n}{2}}$,

$\therefore T_n+T_n'=2^{n+2}+2^{\frac{n^2+3n}{2}}-4$.

12.(2023·陕西咸阳·校考一模) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之积为 $S_n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)设公差不为 0 的等差数列 $\{b_n\}$ 中, $b_1=1$, ____________, 求数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

请从① $b_2^2=b_4$; ② $b_3+b_5=8$ 这两个条件中选择一个条件,补充在上面的问题中并作答.

注:如果选择多个条件分别作答,则按照第一个解答计分.

【答案】(1) $a_n=2^{n-1}$;

(2) $T_n=2^n-1+\frac{1}{2}n(n+1)$.

【分析】(1)根据当 $n\ge 2$ 时, $a_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}$ 计算并检验 $a_1=S_1=1$ 成立即可得答案;

(2)根据等差数列基本计算得 $b_n=n$, 进而 $a_n+b_n=2^{n-1}+n$, 再分组求和即可.

【详解】(1)解:当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=1$

当 $n\ge 2$ 时, $a_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}=2^{\frac{n(n-1)-(n-1)(n-2)}{2}}=2^{n-1}$

综上，$a_n=2^{n-1}$；

（2）解：若选① $b_2^2=b_4$，

设等差数列$\{b_n\}$的公差为$d(d\neq 0)$，

因为$b_1=1$，$b_2^2=b_4$，

所以$(1+d)^2=1+3d(d\neq 0)$，解得$d=1$

所以，$b_n=n$，

所以，$a_n+b_n=2^{n-1}+n$，

所以，$T_n=(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})+(1+2+\cdots+n)$

$=\dfrac{1-2^n}{1-2}+\dfrac{n(n+1)}{2}=2^n-1+\dfrac{1}{2}n(n+1)$

所以，$T_n=2^n-1+\dfrac{1}{2}n(n+1)$

若选② $b_3+b_5=8$，

设等差数列$\{b_n\}$的公差为$d(d\neq 0)$，

因为$b_3+b_5=8$，所以$b_4=4$，

又因为$b_1=1$，所以$4=1+3d$，解得$d=1$

所以，$b_n=n$，

所以，$a_n+b_n=2^{n-1}+n$，

所以，$T_n=(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})+(1+2+\cdots+n)=\dfrac{1-2^n}{1-2}+\dfrac{n(n+1)}{2}=2^n-1+\dfrac{1}{2}n(n+1)$

所以，$T_n=2^n-1+\dfrac{1}{2}n(n+1)$

13．（2023·陕西汉中·统考二模）已知数列$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列，$a_1=1$且a_2，a_5，a_{14}成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n，在① $S_n=2^n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$； ② $S_n=2b_n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$；③ $S_{n+1}=2S_n+1$，$n\in\mathbf{N}^*$；这三个条件中任选一个，将序号补充在下面横线处，并根据题意解决问题.问题：若$b_1=1$，且______，求数列$\{a_n+b_n\}$的前n项和T_n.

（注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答给分.）

【答案】(1) $a_n=2n-1$

(2) $T_n=n^2+2^n-1$

【分析】（1）设等差数列的公差为 d，根据 a_2， a_5， a_{14} 成等比数列，由 $(a_1+4d)^2=(a_1+d)(a_1+13d)$ 求解；

（2）选①，由 $S_n=2^n-1$， $n\in\mathbf{N}^*$，得到 $n\geq 2$ 时， $b_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-1}$ 求解；选②，由 $S_n=2b_n-1$， $n\in\mathbf{N}^*$，得到 $n\geq 2$ 时， $S_{n-1}=2b_{n-1}-1$，两式相减求解; 选③，由 $S_{n+1}=2S_n+1$， $n\in\mathbf{N}^*$，得到 $n\geq 2$ 时， $S_n=2S_{n-1}+1$，两式相减求解.进而得到 $a_n+b_n=(2n-1)+2^{n-1}$，再利用分组求和求解.

【详解】（1）解：设等差数列的公差为 d，

因为 a_2， a_5， a_{14} 成等比数列，

所以 $(a_1+4d)^2=(a_1+d)(a_1+13d)$，

解得 $d=2$ 或 $d=0$ （舍去）.

所以， $a_n=1+2(n-1)=2n-1$.

（2）选①，由 $S_n=2^n-1$， $n\in\mathbf{N}^*$，

当 $n\geq 2$ 时， $b_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-1}$， 当 $n=1$ 时等式也成立，

所以 $b_n=2^{n-1}$，

选②，由 $S_n=2b_n-1$， $n\in\mathbf{N}^*$， ①

当 $n\geq 2$ 时， $S_{n-1}=2b_{n-1}-1$， ②

②①得 $2b_{n-1}=b_n$， 即 $\frac{b_n}{b_{n-1}}=2$，

所以 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，

当 $n=1$ 时等式也成立，

所以 $b_n=2^{n-1}$，

选③，由 $S_{n+1}=2S_n+1$， $n\in\mathbf{N}^*$， ①

当 $n=1$ 时 $a_2=2$

当 $n\geq 2$ 时，$S_n=2S_{n-1}+1$，②

②①得 $2b_{n+1}=b_n$，即 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=2$，又 $\frac{b_2}{b_1}=2$，

所以 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，

所以 $b_n=2^{n-1}$，

则 $a_n+b_n=(2n-1)+2^{n-1}$，

$T_n=(a_1+a_2+\text{K}+a_n)+(b_1+b_2+\text{K}+b_n)$，

$=n^2+2^n-1$.

14．（2023·甘肃·统考一模）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_6=2, S_5=5$，等比数列 $\{b_n\}$ 中，$b_2=4, b_5=32$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $c_n=a_n+b_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

【答案】(1) $a_n=\frac{n}{3}$；$b_n=2^n$

(2) $T_n=\frac{1}{6}n(n+1)+2^{n+1}-2$

【分析】（1）分别设等差数列的公差和等比数列的公比，根据条件列出相应的方程，求出数列的首项以及公差和公比，即可得答案.

（2）由（1）的结论可得 c_n 的表达式，利用分组求和的方法，即可求得答案.

【详解】（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $\begin{cases}a_6=a_1+5d=2\\ S_5=5a_1+10d=5\end{cases}$，

解得 $a_1=d=\frac{1}{3}$，

所以 $a_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{n}{3}$；

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，则 $q^3=\frac{b_5}{b_2}=8, \therefore q=2$，

则 $b_1=\frac{b_2}{q}=2$，所以 $b_n=2^n$.

（2）由（1）得：$c_n=a_n+b_n=\frac{n}{3}+2^n$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
https://d.book118.com/188011005076007004