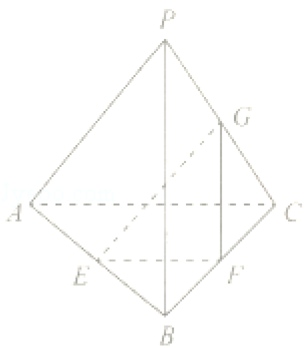
立体几何证明基础题

一．解答题（共28小题）

1．如图,在三棱锥P﹣ABC中，PB⊥BC，AC⊥BC,点E，F，G分别为AB，BC，PC，的中点

（1）求证:PB∥平面EFG;

（2）求证：BC⊥EG.

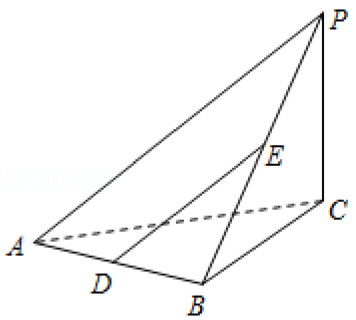


2．如图，在三棱锥P﹣ABC中，PC⊥底面ABC，AB⊥BC，D，E分别是AB，PB的中点.

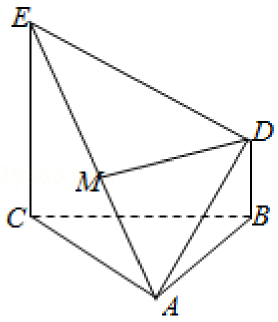
(1)求证DE∥PA

(2）求证：DE∥平面PAC;

(3)求证：AB⊥PB.



3．如图所示，△ABC为正三角形，CE⊥平面ABC，BD∥CE且CE=AC=2BD,试在AE上确定一点M，使得DM∥平面ABC.

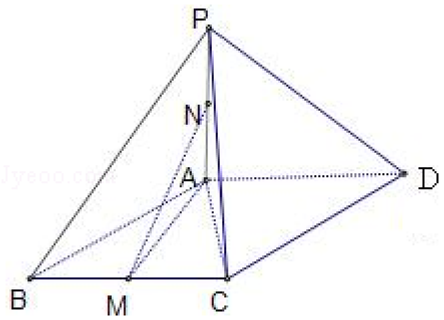


4．如图:在四棱锥P﹣ABCD中，底面ABCD是菱形，∠ABC=60°，PA⊥平面ABCD,点M，N分别为BC，PA的中点，且PA=AB=2.

（Ⅰ）证明：BC⊥平面AMN;

(Ⅱ)求三棱锥N﹣AMC的体积;

(Ⅲ）在线段PD上是否存在一点E,使得NM∥平面ACE；若存在,求出PE的长；若不存在，说明理由.

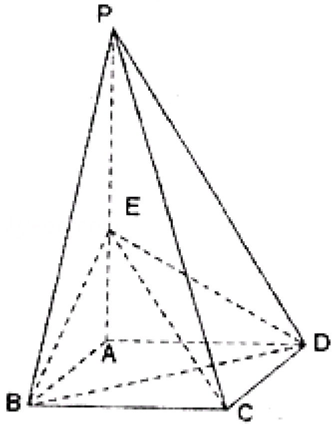


5．如图,四棱锥P﹣ABCD的底面是边长为1的正方形,侧棱PA⊥底面ABCD,且PA=2,E是侧棱PA上的动点.

（1）求四棱锥P﹣ABCD的体积;

(2）如果E是PA的中点，求证：PC∥平面BDE;

（3）是否不论点E在侧棱PA的任何位置，都有BD⊥CE？证明你的结论.

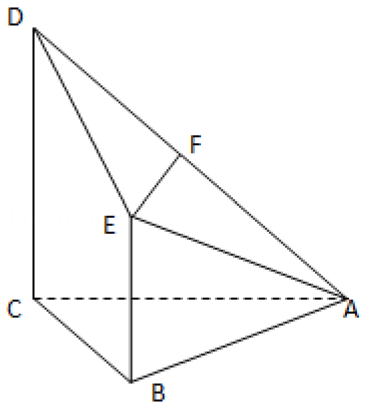


6．已知四棱锥 A－BCDE，其中 AB=BC=AC=BE=1，CD=2,CD⊥面 ABC,BE∥CD,F 为 AD 的中点．

（Ⅰ）求证：EF∥面 ABC；

(Ⅱ)求证：平面 ADE⊥平面 ACD；

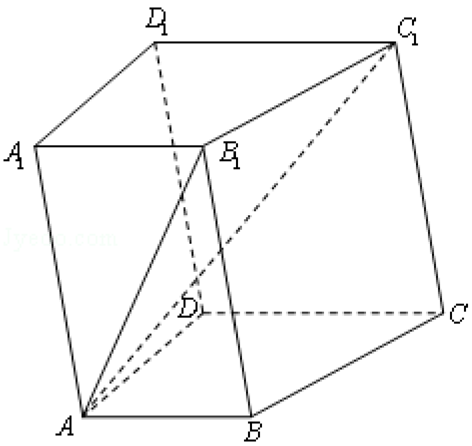
(Ⅲ)求四棱锥 A－BCDE 的体积．



7．如图，四棱柱 ABCD－$A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 A_1ABB_1⊥平面 ABCD，且∠ABC=$\frac{\pi}{2}$．

（1）求证：BC∥平面 AB_1C_1；

（2）求证:平面 A_1ABB_1⊥平面 AB_1C_1．

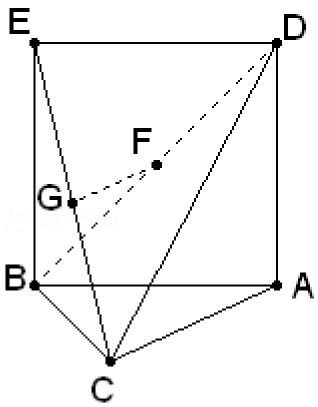


8．如图，三角形ABC中,AC=BC=$\frac{\sqrt{2}}{2}$AB，ABED是边长为1的正方形，平面ABED⊥底面ABC，若G、F分别是EC、BD的中点．

（Ⅰ)求证：GF∥底面ABC;

（Ⅱ)求证：AC⊥平面EBC;

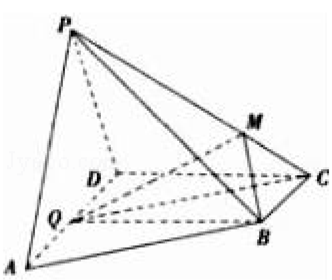
(Ⅲ）求几何体ADEBC的体积V．



9．如图,在四棱锥P﹣ABCD中，底面ABCD为直角梯形，AD||BC,PD⊥底面ABCD,∠ADC=90°，AD=2BC,Q为AD的中点,M为棱PC的中点．

（Ⅰ)证明：PA∥平面BMQ;

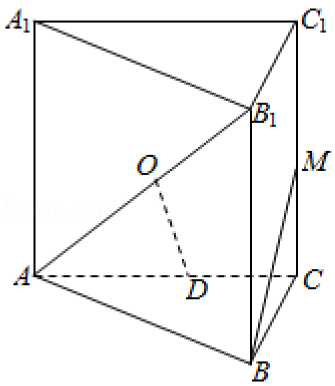
(Ⅱ）已知PD=DC=AD=2，求点P到平面BMQ的距离．



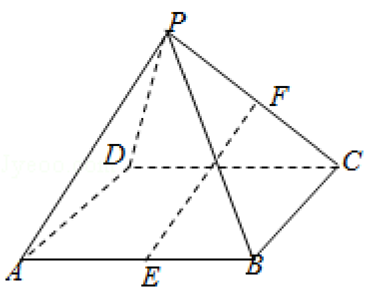
10．已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面△ABC 中，∠C=90°，$BC=\sqrt{2}$，$BB_1=2$，O 是 AB_1 的中点，D 是 AC 的中点，M 是 CC_1 的中点，

(1)证明：OD∥平面 BB_1C_1C；

(2)试证:$BM\perp AB_1$.



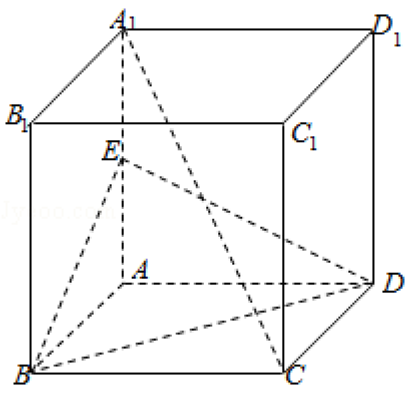
11．如图，在四棱锥 P－ABCD 中，四边形 ABCD 是平行四边形，E、F 分别是 AB、PC 中点,求证：EF∥面 PAD.



12．如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 AA_1 的中点，求证：

(Ⅰ) A_1C∥平面 BDE；

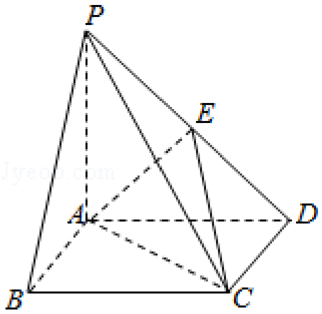
(Ⅱ)平面 $A_1AC\perp$平面 BDE.



13．如图，四棱锥 P－ABCD 中，底面 ABCD 为矩形，E 为 PD 的中点．

（1）求证：PB∥平面 AEC；

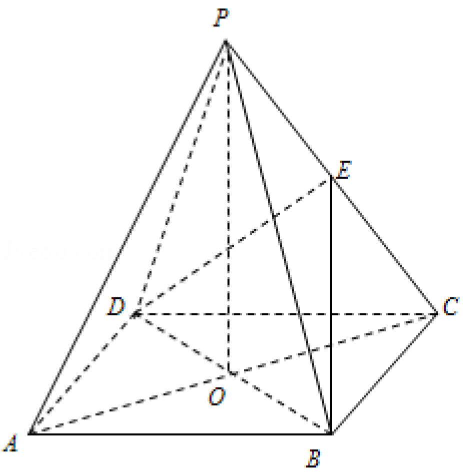
（2）若 PA⊥平面 ABCD，PA=AD，求证：平面 AEC⊥平面 PCD．



14．如图,ABCD 是正方形,O 是正方形的中心，PO⊥底面 ABCD，E 是 PC 的中点． 求证：

（1）PA∥平面 BDE；

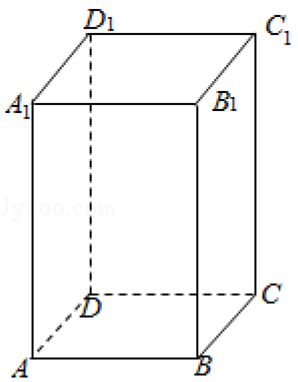
（2）BD⊥平面 PAC．



15．如图，正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，底面边长 AB=1，侧棱长 $AA_1=2$．

（Ⅰ）求正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的表面积；

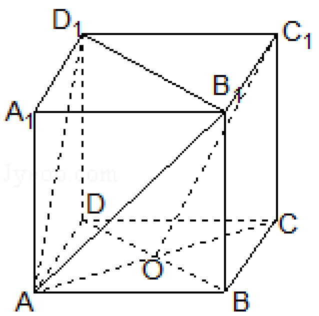
（Ⅱ）证明：AC⊥平面 BDD_1B_1．



16．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，O 是底 ABCD 对角线的交点．求证：

(1)C_1O∥面 AB_1D_1；

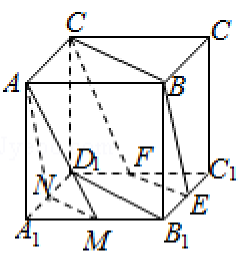
（2）A_1C⊥面 AB_1D_1．



17．如图所示,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，E,F,N 分别为 A_1B_1,B_1C_1,C_1D_1，D_1A_1 的中点，求证：

（1）E，F，D，B 四点共面；

(2）面 AMN∥平面 EFDB．

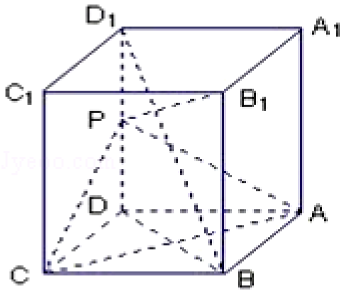


18．如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,AB=AD=1,AA_1=2,点 P 是 DD_1 的中点．

求证：（1）直线 BD_1∥平面 PAC

(2）①求异面直线 PC 与 AA_1 所成的角．

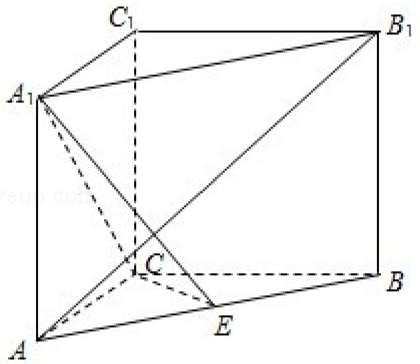
②平面 PAC⊥平面 BDD_1．



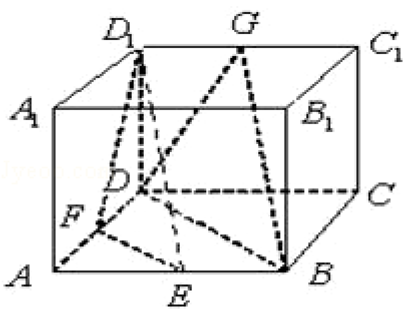
19．如图,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=CB=CC_1=2$，E 是 AB 中点.

（Ⅰ）求证：$AB_1\perp$ 平面 A_1CE；

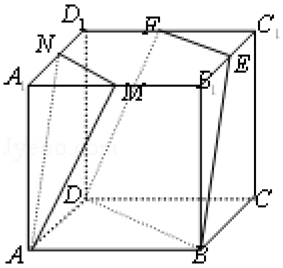
（Ⅱ）求直线 A_1C_1 与平面 A_1CE 所成角的正弦值.



20．如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F、G 分别是 AB、AD、C_1D_1 的中点．求证: 平面 D_1EF∥平面 BDG.



21．（文科）如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,M,N，E，F 分别是棱 A_1B_1，A_1D_1，B_1C_1，C_1D_1 的中点，求证：平面 AMN∥平面 EFDB.

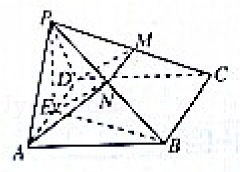


22．如图，在四棱锥P－ABCD中，侧面PAD是正三角形,且与底面ABCD垂直，底面ABCD是边长为2的菱形，∠BAD=60°，N是PB的中点,过A、D、N三点的平面交PC于M,E为AD的中点,求证:

（1）EN∥平面PDC；

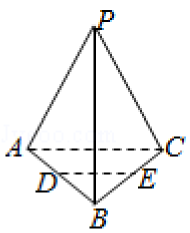
（2）BC⊥平面PEB；

(3)平面PBC⊥平面ADMN.



23．如图，在正三棱锥P－ABC中，D,E分别是AB，BC的中点.

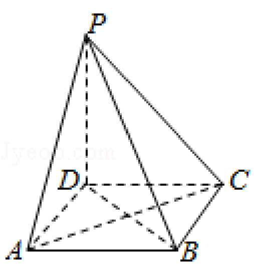
（1）求证:DE∥平面PAC；（2）求证：AB⊥PC.



24．如图所示,在四棱锥P－ABCD中，底面是边长为1的正方形，侧棱PD=1，PA=PC=$\sqrt{2}$.

(1)求证：PD⊥平面ABCD；

（2）求证：平面PAC⊥平面PBD.

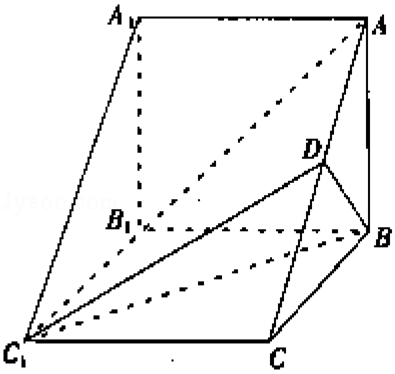


25．如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧棱 $AA_1\perp$ 底面 ABC，$AB\perp BC$，D 为 AC 的中点，$A_1A=AB=2$．

（1）求证：AB_1∥平面 BC_1D；

(2)过点 B 作 $BE\perp AC$ 于点 E,求证：直线 $BE\perp$ 平面 AA_1C_1C

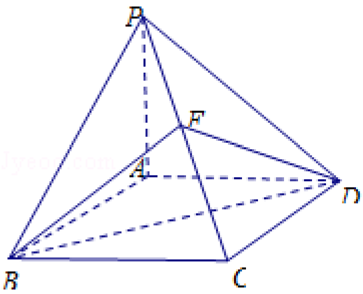
(3）若四棱锥 $B-AA_1C_1D$ 的体积为 3，求 BC 的长度．



26．如图,已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 ABCD 是菱形，$PA\perp$ 平面 ABCD，点 F 为 PC 的中点．

（1）求证：PA∥平面 BDF；

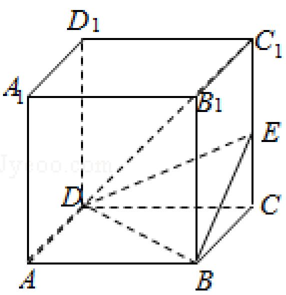
(2）求证:$PC\perp BD$．



27．如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E 是 CC_1 的中点．

（1）求证：$AC_1\perp BD$．

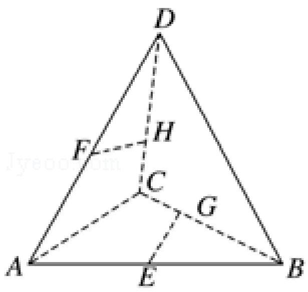
(2）求证：AC_1∥平面 BDE．



28．已知空间四边形ABCD（如图所示），E、F分别是AB、AD的中点，G、H分别是BC、CD上的点，且$CG=\frac{1}{3}BC$，$CH=\frac{1}{3}DC$．求证：

①E、F、G、H四点共面；

②三直线FH、EG、AC共点．



立体几何证明基础题

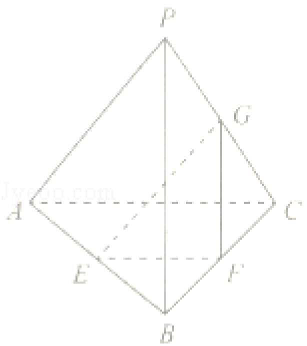
参考答案与试题解析

一．解答题（共28小题）

1．如图,在三棱锥P﹣ABC中，PB⊥BC，AC⊥BC，点E，F，G分别为AB，BC，PC，的中点

(1）求证：PB∥平面EFG;

（2）求证：BC⊥EG.



【分析】(1）推导出GF∥PB,由此能证明PB∥平面EFG.

（2）推导出EF⊥BC,GF⊥BC，从而BC⊥平面EFG，由此能证明BC⊥EG.

【解答】证明:（1）∵点F，G分别为BC，PC，的中点，

∴GF∥PB,

∵PB⊄平面EFG，FG⊂平面EFG,

∴PB∥平面EFG.

(2）∵在三棱锥P﹣ABC中，PB⊥BC，AC⊥BC,

点E,F，G分别为AB,BC，PC，的中点,

∴EF∥AC，GF∥PB,

∴EF⊥BC，GF⊥BC,

∵EF∩FG=F，∴BC⊥平面EFG,

∵EG⊂平面EFG，∴BC⊥EG.

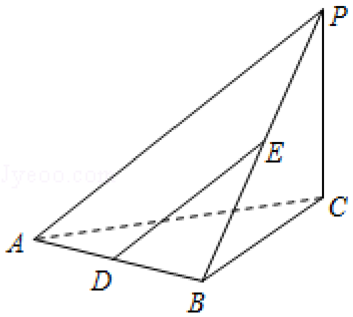
【点评】本题考查线面平行、线线垂直的证明，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，是中档题.

2．如图，在三棱锥P－ABC中，PC⊥底面ABC,AB⊥BC，D，E分别是AB,PB的中点.

(1)求证DE∥PA

(2)求证：DE∥平面PAC;

(3）求证：AB⊥PB.



【分析】(1）由D，E分别是AB，PB的中点，能证明DE∥PA.

(2）由PA⊂平面PAC，DE∥PA，且DE⊄平面PAC，能证明DE∥平面PAC.

(3）推导出AB⊥PC，AB⊥BC，得AB⊥平面PBC,由此能证明AB⊥PB.

【解答】证明:(1）因为D，E分别是AB，PB的中点，所以DE∥PA.

（2）因为PA⊂平面PAC，DE∥PA，且DE⊄平面PAC，

所以DE∥平面PAC.

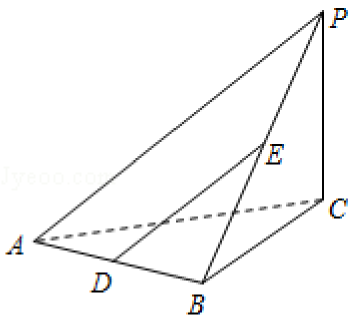
(3）因为PC⊥平面ABC，且AB⊂平面ABC，

所以AB⊥PC.

又因为AB⊥BC，且PC∩BC=C.

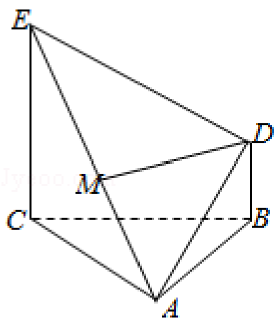
所以AB⊥平面PBC.

又因为PB⊂平面PBC，所以AB⊥PB.



【点评】本题考查线线平行、线面平行、线线垂直的证明，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查化归与转化思想、函数与方程思想，是基础题.

3．如图所示，△ABC 为正三角形,CE⊥平面 ABC，BD∥CE 且 CE=AC=2BD,试在 AE 上确定一点 M，使得 DM∥平面 ABC.



【分析】AE 中点为 M，取 AC 中点为 N,通过证明四边形 MNBD 是平行四边形得出 DM∥BN，从而可得 DM∥平面 ABC.

【解答】解:取 AE 中点为 M，取 AC 中点为 N，连结 MD，MN，NB，

在△ABC 中，∵M，N 分别是边 AC，AE 的中点,∴CE=2MN 且 MN∥CE,

又∵CE=2BD 且 BD∥CE,

∴MN∥BD 且 MN=BD,

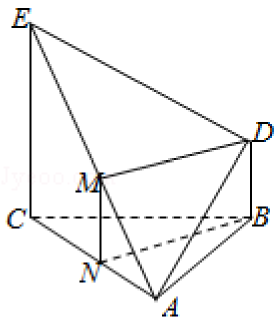
∴四边形 BDMN 是平行四边形.

∴DM∥BN,

又∵BN⊂平面 ABC，DM⊄平面 ABC,

∴DM∥平面 ABC.

故 M 为 AE 的中点时，DM∥平面 ABC.



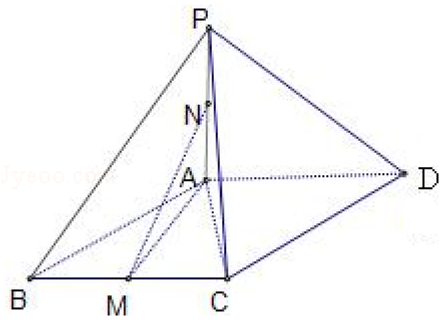
【点评】本题考查了线面平行的判定，属于基础题.

4．如图：在四棱锥 P﹣ABCD 中，底面 ABCD 是菱形，∠ABC=60°，PA⊥平面 ABCD，点 M，N 分别为 BC，PA 的中点，且 PA=AB=2.

（Ⅰ）证明：BC⊥平面 AMN；

（Ⅱ）求三棱锥 N﹣AMC 的体积；

（Ⅲ）在线段 PD 上是否存在一点 E，使得 NM∥平面 ACE；若存在，求出 PE 的长；若不存在，说明理由.



【分析】(Ⅰ）要证线与面垂直，只要证明线与面上的两条相交线垂直，找面上的两条线，根据四边形是一个菱形，从菱形出发找到一条，再从 PA⊥平面 ABCD，得到结论.

(Ⅱ）要求三棱锥的体积，首先根据所给的体积确定用哪一个面做底面，会使得计算简单一些，选择三角形 AMC，做出底面面积，利用体积公式得到结果.

（III）对于这种是否存在的问题，首先要观察出结论，再进行证明,根据线面平行的判定定理,利用中位线确定线与线平行，得到结论.

【解答】解:（Ⅰ）证明：∵ABCD为菱形,

∴AB=BC

又∠ABC=60°，

∴AB=BC=AC,

又M为BC中点，∴BC⊥AM

而PA⊥平面ABCD,BC⊂平面ABCD，∴PA⊥BC

又PA∩AM=A,∴BC⊥平面AMN

（II）∵ $S_{\triangle AMC}=\frac{1}{2}AM\bullet CM=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{2}$

又PA⊥底面ABCD，PA=2，∴AN=1

∴三棱锥N－AMC的体积 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle AMC}\bullet AN$

$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{6}$

（III）存在点E,

取PD中点E，连接NE，EC，AE,

∵N，E分别为PA，PD中点,

∴ $NE\underline{\underline{//}}\frac{1}{2}AD$

又在菱形ABCD中, $CM\underline{\underline{//}}\frac{1}{2}AD$

∴ $NE\underline{\underline{//}}MC$，即MCEN是平行四边形

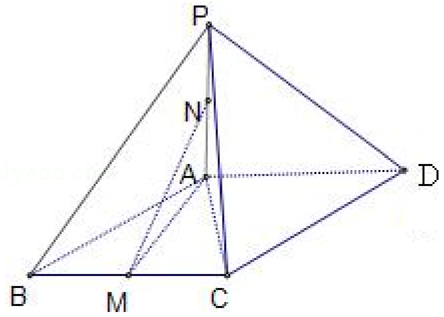
∴NM∥EC,

又EC⊂平面ACE，NM⊄平面ACE

∴MN∥平面ACE,

即在PD上存在一点E,使得NM∥平面ACE,

此时$PE=\frac{1}{2}PD=\sqrt{2}$.



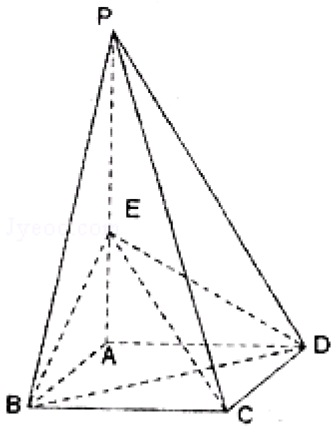
【点评】本题考查空间中直线与平面之间的位置关系，是一个非常适合作为高考题目出现的问题，题目包含的知识点比较全面，重点突出,是一个好题.

5．如图，四棱锥P－ABCD的底面是边长为1的正方形，侧棱PA⊥底面ABCD，且PA=2,E是侧棱PA上的动点.

（1）求四棱锥P－ABCD的体积；

(2）如果E是PA的中点,求证：PC∥平面BDE；

（3）是否不论点E在侧棱PA的任何位置,都有BD⊥CE？证明你的结论.



【分析】(1)利用四棱锥的体积计算公式即可;

(2）利用三角形的中位线定理和线面平行的判定定理即可证明;

(3)利用线面垂直的判定和性质即可证明.

【解答】解:（1）∵PA⊥底面ABCD,∴PA为此四棱锥底面上的高.

∴$V_{四棱锥P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{正方形ABCD}\times PA=\frac{1}{3}\times 1^2\times 2=\frac{2}{3}$.

（2）连接 AC 交 BD 于 O，连接 OE.

∵四边形 ABCD 是正方形，∴AO=OC，

又∵AE=EP，∴OE∥PC.

又∵PC⊄平面 BDE，OE⊂平面 BDE.

∴PC∥平面 BDE.

（3）不论点 E 在侧棱 PA 的任何位置，都有 BD⊥CE.

证明：∵四边形 ABCD 是正方形，∴BD⊥AC.

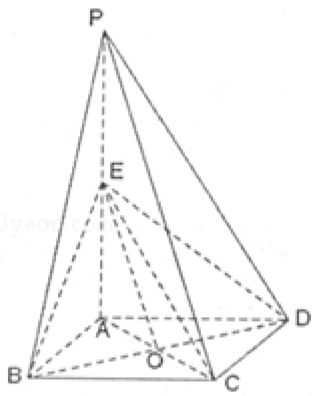
∵PA⊥底面 ABCD，∴PA⊥BD.

又∵PA∩AC=A，

∴BD⊥平面 PAC.

∵CE⊂平面 PAC.

∴BD⊥CE.



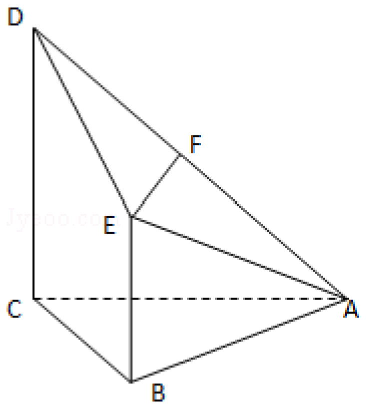
【点评】熟练掌握线面平行、垂直的判定和性质定理及四棱锥的体积计算公式是解题的关键.

6．已知四棱锥 A－BCDE，其中 AB=BC=AC=BE=1，CD=2，CD⊥面 ABC，BE∥CD，F 为 AD 的中点.

（Ⅰ）求证：EF∥面 ABC；

（Ⅱ）求证：平面 ADE⊥平面 ACD；

(Ⅲ)求四棱锥A－BCDE的体积.



【分析】(Ⅰ)取AC中点G，连接FG、BG，根据三角形中位线定理，得到四边形FGBE为平行四边形，进而得到EF∥BG，再结合线面平行的判定定理得到EF∥面ABC;

(Ⅱ)根据已知中△ABC为等边三角形，G为AC的中点，DC⊥面ABC得到BG⊥AC，DC⊥BG,根据线面垂直的判定定理得到BG⊥面ADC，则EF⊥面ADC，再由面面垂直的判定定理，可得面ADE⊥面ACD;

(Ⅲ)方法一：四棱锥四棱锥A－BCDE分为两个三棱锥E－ABC和E－ADC，分别求出三棱锥E－ABC和E－ADC的体积，即可得到四棱锥A－BCDE的体积.

方法二：取BC的中点为O，连接AO，可证AO⊥平面BCDE,即AO为V_{A-BCDE}的高,求出底面面积和高代入棱锥体积公式即可求出四棱锥A－BCDE的体积.

【解答】证明：(Ⅰ)取AC中点G,连接FG、BG,

∵F，G分别是AD，AC的中点

∴FG∥CD,且FG=$\frac{1}{2}$DC=1.

∵BE∥CD∴FG与BE平行且相等

∴EF∥BG.

EF⊄面ABC，BG⊂面ABC

∴EF∥面ABC…（4分）

(Ⅱ)∵△ABC为等边三角形∴BG⊥AC

又∵DC⊥面 ABC，BG⊂面 ABC∴DC⊥BG

∴BG 垂直于面 ADC 的两条相交直线 AC,DC，

∴BG⊥面 ADC.　　　　　　　　　　　　…(6 分)

∵EF∥BG

∴EF⊥面 ADC

∵EF⊂面 ADE，∴面 ADE⊥面 ADC.　…(8 分)

解：(Ⅲ)

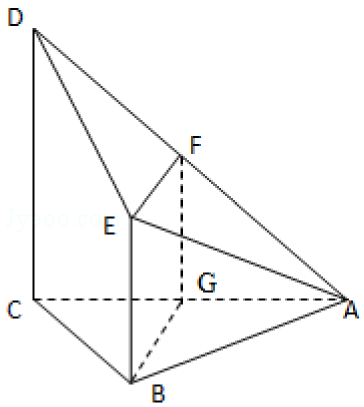
方法一:连接 EC，该四棱锥分为两个三棱锥 E－ABC 和 E－ADC.

$V_{A\text{-}BCDE}=V_{E\text{-}ABC}+V_{E\text{-}ACD}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times1+\frac{1}{3}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. …(12 分)

方法二：取 BC 的中点为 O，连接 AO,则 AO⊥BC，又 CD⊥平面 ABC，

∴CD⊥AO，BC∩CD=C，∴AO⊥平面 BCDE，

∴AO 为 V_{A-BCDE} 的高，$AO=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$S_{BCDE}=\frac{(1+2)\times1}{2}=\frac{3}{2}$，∴ $V_{A\text{-}BCDE}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

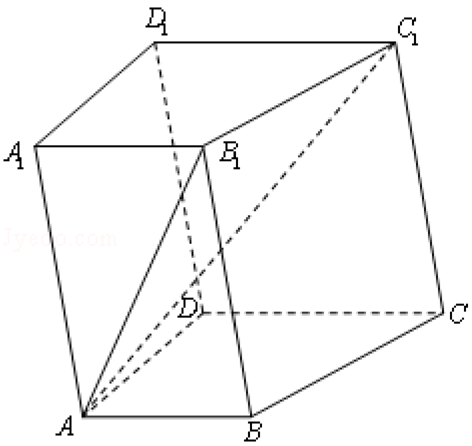


【点评】本题考查的知识点是直线与平面平行的判定，平面与平面垂直的判定，棱锥的体积，其中熟练掌握空间线面平行或垂直的判定、性质、定义、几何特征是解答此类问题的关键.

7．如图，四棱柱 ABCD－$A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 A_1ABB_1⊥平面 ABCD，且∠ABC=$\frac{\pi}{2}$.

(1) 求证：BC∥平面 AB_1C_1；

(2)求证：平面 A_1ABB_1⊥平面 AB_1C_1.



【分析】(1) 根据 $BC∥B_1C_1$，且 $B_1C_1⊂$平面 AB_1C_1，$BC⊄$平面 AB_1C_1，依据线面平行的判定定理推断出 $BC∥$平面 AB_1C_1.

(2) 平面 $A_1ABB_1⊥$平面 $ABCD$，平面 $ABCD∥$平面 $A_1B_1C_1D_1$，推断出平面 $A_1ABB_1⊥$平面 $A_1B_1C_1D_1$，又平面 $A_1ABB_1∩$平面 $A_1B_1C_1D_1=A_1B_1$，$A_1B_1⊥C_1B_1$，$C_1B_1⊂$平面 AB_1C_1，根据面面垂直的性质推断出平面 $A_1ABB_1⊥$平面 AB_1C_1.

【解答】证明：(1) ∵$BC∥B_1C_1$，且 $B_1C_1⊂$平面 AB_1C_1，$BC⊄$平面 AB_1C_1，

∴$BC∥$平面 AB_1C_1.

(2) ∵平面 $A_1ABB_1⊥$平面 $ABCD$，平面 $ABCD∥$平面 $A_1B_1C_1D_1$，

∴平面 $A_1ABB_1⊥$平面 $A_1B_1C_1D_1$，

∵平面 $A_1ABB_1∩$平面 $A_1B_1C_1D_1=A_1B_1$，$A_1B_1⊥C_1B_1$，

∴$C_1B_1⊂$平面 AB_1C_1，

∴平面 $A_1ABB_1⊥$平面 AB_1C_1.

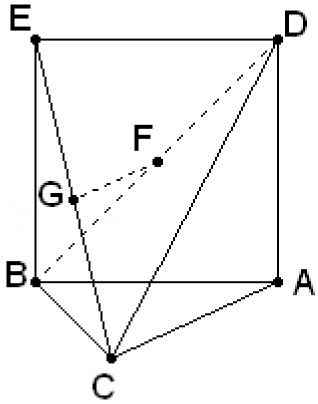
【点评】本题主要考查了线面平行和面面垂直的判定定理．注重了对基础知识的考查．

8．如图，三角形 ABC 中，$AC=BC=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$，ABED 是边长为 1 的正方形，平面 ABED⊥底面 ABC，若 G、F 分别是 EC、BD 的中点．

(Ⅰ)求证：GF∥底面 ABC；

（Ⅱ）求证：AC⊥平面 EBC;

（Ⅲ）求几何体 ADEBC 的体积 V.



【分析】(1) 证法一:证明一条直线与一个平面平行,除了可以根据直线与平面平行的判定定理以外,通常还可以通过平面与平面平行进行转化,比如取 BE 的中点 H，连接 HF、GH，根据中位线定理易证得：平面 HGF∥平面 ABC，进一步可得:GF∥平面 ABC.

证法二：根据直线与平面平行的判定定理可知：如果不在一个平面内的一条直线和平面内的一条直线平行，那么直线和这个平面平行．故只需在平面 ABC 中找到与 GF 平行的直线即可．因为 G、F 分别是 EC、BD 的中点，故平移是可以通过构造特殊的四边形、三角形来实现.

证法三:根据直线与平面平行的判定定理可知:如果不在一个平面内的一条直线和平面内的一条直线平行，那么直线和这个平面平行．故只需在平面 ABC 中找到与 GF 平行的直线即可．因为 G、F 分别是 EC、BD 的中点，所以构造中位线是常用的找到平行直线的方法.

(2) 证明直线与平面垂直,关键要找到两条相交直线与之都垂直．有时候题目中没有现成的直线与直线垂直，需要我们先通过直线与平面垂直或者平面与平面垂直去转化一下．由第一问可知：GF∥平面 ABC，而平面 ABED⊥平面 ABC，所以 BE⊥平面 ABC，所以 BE⊥AC；又由勾股定理可以证明：AC⊥BC.

(3) 解决棱锥、棱柱求体积的问题，关键在于找到合适的高与对应的底面，切忌不审图形，盲目求解;根据平面与平面垂直的性质定理可知:CN⊥平面 ABED，而 ABED 是边长为 1 的正方形,进一步即可以求得体积.