三角函数

2024 高考真题

题目 1 (新课标全国 I 卷) 已知 $\cos(\alpha+\beta)=m, \tan\alpha\tan\beta=2$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$ (　　)

A. $-3m$　　B. $-\dfrac{m}{3}$　　C. $\dfrac{m}{3}$　　D. $3m$

题目 2 (新课标全国 I 卷) 当 $x\in[0,2\pi]$ 时，曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为 (　　)

A. 3　　B. 4　　C. 6　　D. 8

题目 3 (新课标全国 II 卷) 设函数 $f(x)=a(x+1)^2-1$，$g(x)=\cos x+2ax$，当 $x\in(-1,1)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 恰有一个交点，则 $a=$ (　　)

A. -1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

题目 4 (全国甲卷数学(理)(文)) 已知 $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，则 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$ (　　)

A. $2\sqrt{3}+1$　　B. $2\sqrt{3}-1$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $1-\sqrt{3}$

题目 5 (新高考北京卷) 已知 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$，$f(x_1)=-1$，$f(x_2)=1$，$|x_1-x_2|_{\min}=\dfrac{\pi}{2}$，则 $\omega=$ (　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

题目 6 (新高考天津卷) 已知函数 $f(x)=\sin3\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 的最小正周期为 π．则函数在 $\left[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{6}\right]$ 的最小值是 (　　)

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\dfrac{3}{2}$　　C. 0　　D. $\dfrac{3}{2}$

题目 7 (新高考上海卷) 下列函数 $f(x)$ 的最小正周期是 2π 的是 (　　)

A. $\sin x+\cos x$　　B. $\sin x\cos x$　　C. $\sin^2x+\cos^2x$　　D. $\sin^2x-\cos^2x$

题目 8 (新课标全国 II 卷) 对于函数 $f(x)=\sin2x$ 和 $g(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，下列说法正确的有 (　　)

A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的零点　　B. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最大值

C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最小正周期　　D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有相同的对称轴

题目 9 (新课标全国 II 卷) 已知 α 为第一象限角，β 为第三象限角，$\tan\alpha+\tan\beta=4$，$\tan\alpha\tan\beta=\sqrt{2}+1$，

则 $\sin(\alpha+\beta)=$ ______.

题目 10 (全国甲卷数学(文)) 函数 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值是 ______.

2024
高考模拟题

一、单选题

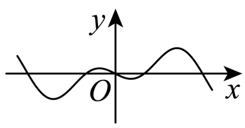
题目 1 (2024·宁夏石嘴山·三模) 在平面直角坐标系中，角 θ 的顶点与原点重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边经过点 $P(1,2)$，则 $7\cos^2\theta-2\sin 2\theta=$ (　　)

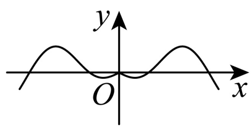
A. $-\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. -2　　D. 2

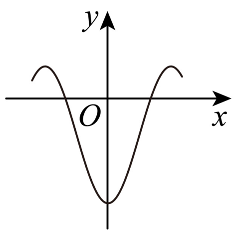
题目 2 (2024·广东茂名·一模) 已知 $\cos(\alpha+\pi)=-2\sin\alpha$，则 $\frac{\sin^2\alpha-3\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos\alpha}{\cos 2\alpha+1}=$ (　　)

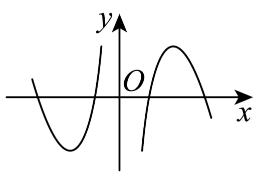
A. -1　　B. $-\frac{2}{5}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{7}{8}$

题目 3 (2024·河北保定·二模) 函数 $f(x)=\frac{1-e^x}{1+e^x}\cos 2x$ 的部分图象大致为 (　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

题目 4 (2024·山东济宁·三模) 已知函数 $f(x)=(\sqrt{3}\sin x+\cos x)\cos x-\frac{1}{2}$，若 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},m\right]$ 上的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，则实数 m 的取值范围是 (　　)

A. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$　　C. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{12}\right)$　　D. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{12}\right]$

题目 5 (2024·江西景德镇·三模) 函数 $f(x)=\cos\omega x(x\in\mathbf{R})$ 在 $[0,\pi]$ 内恰有两个对称中心，$|f(\pi)|=1$，将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图象. 若 $f(\alpha)+g(\alpha)=\frac{3}{5}$，则 $\cos\left(4\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=$ (　　)

A. $\frac{7}{25}$　　B. $\frac{16}{25}$　　C. $-\frac{9}{25}$　　D. $-\frac{19}{25}$

题目 6 (2024·安徽马鞍山·三模) 已知函数 $f(x)=\sin 2\omega x+\cos 2\omega x(\omega>1)$ 的一个零点是 $\frac{\pi}{2}$，且 $f(x)$ 在

$\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{16}\right)$上单调，则$\omega=$（　　）

A. $\frac{5}{4}$　　B. $\frac{7}{4}$　　C. $\frac{9}{4}$　　D. $\frac{11}{4}$

题目 7 (2024·山东临沂·二模) 已知函数$f(x)=\sin(2x+\varphi)\left(|\phi|<\frac{\pi}{2}\right)$图象的一个对称中心为$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$，则（　　）

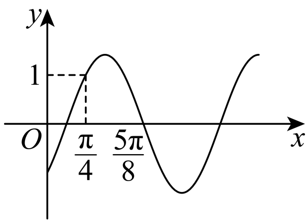
A. $f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增

B. $x=\frac{5\pi}{6}$是$f(x)$图象的一条对称轴

C. $f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$上的值域为$\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

D. 将$f(x)$图象上的所有点向左平移$\frac{5\pi}{12}$个长度单位后，得到的函数图象关于y轴对称

题目 8 (2024·广东广州·二模) 已知函数$f(x)=\sqrt{2}\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，若将函数$f(x)$的图象向右平移$\theta(\theta>0)$个单位后所得曲线关于$y$轴对称，则$\theta$的最小值为（　　）



A. $\frac{\pi}{8}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{3\pi}{8}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

题目 9 (2024·四川雅安·三模) 已知函数$f(x)=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x(\omega>0)$，则下列说法中正确的个数是（　　）

①当$\omega=2$时，函数$y=f(x)-2\log_{\pi}x$有且只有一个零点；

②当$\omega=2$时，函数$y=f(x+\varphi)$为奇函数，则正数φ的最小值为$\frac{\pi}{3}$；

③若函数$y=f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$上单调递增，则$\omega$的最小值为$\frac{1}{2}$；

④若函数$y=f(x)$在$(0,\pi)$上恰有两个极值点，则ω的取值范围为$\left(\frac{13}{6},\frac{25}{6}\right]$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

题目 10 (2024·河北保定·二模) 已知$\tan\alpha=\frac{3\cos\alpha}{\sin\alpha+11}$，则$\cos2\alpha=$（　　）

A. $-\frac{7}{8}$　　B. $\frac{7}{8}$　　C. $\frac{7}{9}$　　D. $-\frac{7}{9}$

题目 11 (2024·河北衡水·三模) 已知 $\sin(3\alpha-\beta)=m\sin(\alpha-\beta)$，$\tan(2\alpha-\beta)=n\tan\alpha$，则 m，n 的关系为 ( )

A. $m=2n$　　B. $n=\frac{m+1}{m}$　　C. $n=\frac{m}{m-1}$　　D. $n=\frac{m+1}{m-1}$

题目 12 (2024·辽宁沈阳·三模) 已知 $\tan\frac{\alpha}{2}=2$，则 $\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin\alpha$ 的值是 ( )

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $\frac{6}{5}$　　D. $\frac{8}{5}$

题目 13 (2024·贵州黔东南·二模) 已知 $0<\alpha<\beta<\pi$，且 $\sin(\alpha+\beta)=2\cos(\alpha+\beta)$，$\sin\alpha\sin\beta-3\cos\alpha\cos\beta=0$，则 $\tan(\alpha-\beta)=$ ( )

A. -1　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

二、多选题

题目 14 (2024·河北张家口·三模) 已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\cos^2x+2\sin x\cos x$，则下列说法正确的是 ( )

A. 函数 $f(x)$ 的一个周期为 2π

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称

C. 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，若函数 $g(x)$ 为偶函数，则 φ 的最小值为 $\frac{5\pi}{12}$

D. 若 $f\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{5\pi}{24}\right)-\sqrt{3}=\frac{1}{2}$，其中 α 为锐角，则 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的值为 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{30}}{8}$

题目 15 (2024·辽宁鞍山·模拟预测) 已知函数 $f(x)=\sin x\cdot\cos x$，则 ( )

A. $f(x)$ 是奇函数　　B. $f(x)$ 的最小正周期为 2π

C. $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$　　D. $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增

题目 16 (2024·安徽·三模) 已知函数 $f(x)=|\sin x|-\sqrt{3}\cos x$，则 ( )

A. $f(x)$ 是偶函数　　B. $f(x)$ 的最小正周期是 π

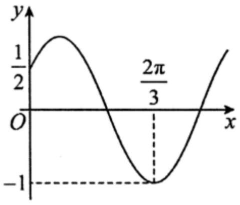
C. $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3},2]$　　D. $f(x)$ 在 $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增

题目 17 (2024·山西太原·模拟预测) 已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称，且 $h(x)=\sin2x-f(x)$，则 ( )

A. $\varphi=\frac{\pi}{12}$　　B. $h(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 中心对称

C. $f(x)$ 与 $h(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称　　D. $h(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{12}\right)$ 内单调递增

题目 18 (2024·浙江金华·三模) 已知函数 $f(x)=\sin2\omega x\cos\varphi+\cos2\omega x\sin\varphi\left(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则（　　）



A. $\varphi=\frac{\pi}{6}$

B. $\omega=2$

C. $f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 为偶函数

D. $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$

题目 19 (2024·浙江温州·二模) 已知角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，$P(-3,4)$ 为其终边上一点，若角 β 的终边与角 2α 的终边关于直线 $y=-x$ 对称，则（　　）

A. $\cos(\pi+\alpha)=\frac{3}{5}$

B. $\beta=2k\pi+\frac{\pi}{2}+2\alpha(k\in\mathbf{Z})$

C. $\tan\beta=\frac{7}{24}$

D. 角 β 的终边在第一象限

题目 20 (2024·广东佛山·二模) 已知函数 $f(x)=\sin x+\cos2x$ 与 $g(x)=\sin2x+\cos x$，记 $h(x)=\lambda f(x)+\mu g(x)$，其中 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ 且 $\lambda^2+\mu^2\neq0$．下列说法正确的是（　　）

A. $h(x)$ 一定为周期函数

B. 若 $\lambda\cdot\mu>0$，则 $h'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上总有零点

C. $h(x)$ 可能为偶函数

D. $h(x)$ 在区间 $(0,2\pi)$ 上的图象过 3 个定点

题目 21 (2024·湖南·二模) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，把 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，以下说法正确的是（　　）

A. $x=\frac{\pi}{6}$ 是 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴

B. $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in Z)$

C. $y=g(x)$ 的图象关于原点对称

D. $f(x)+g(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$

题目 22 (2024·广东江门·一模) 已知函数 $f(x)=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)+2\sqrt{3}\cos^2\omega x-\sqrt{3}(\omega>0)$，则下列结论正确的是（　　）

A. 若 $f(x)$ 相邻两条对称轴的距离为 $\frac{\pi}{2}$，则 $\omega=2$

B. 当 $\omega=1$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3},2]$

C. 当 $\omega=1$ 时，$f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数解析式为 $y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

D. 若 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 上有且仅有两个零点，则 $5\leqslant\omega<8$

三、填空题

题目 23 (2024·北京·三模) 已知函数 $f(x)=\sin x\cos\omega x, x\in\mathbf{R}$.

①若 $\omega=1$，则 $f(x)$ 的最小正周期是 ______；，

②若 $\omega=2$，则 $f(x)$ 的值域是 ______.

题目 24 (2024·北京·模拟预测) 已知函数 $f(x)=\sin\omega x-2\cos\omega x(\omega>0)$，且 $f(\alpha+x)=f(\alpha-x)$. 若两个不等的实数 x_1,x_2 满足 $f(x_1)f(x_2)=5$ 且 $|x_1-x_2|_{\min}=\pi$，则 $\sin4\alpha=$ ______.

题目 25 (2024·湖北荆州·三模) 设 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\tan\alpha=m\tan\beta$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$，若满足条件的 α 与 β 存在且唯一，则 $m=$ ______，$\tan\alpha\tan\beta=$ ______.

三角函数

2024

高考真题

题目 1 (新课标全国 I 卷) 已知 $\cos(\alpha+\beta)=m, \tan\alpha\tan\beta=2$, 则 $\cos(\alpha-\beta)=$ (　　)

A. $-3m$　　B. $-\frac{m}{3}$　　C. $\frac{m}{3}$　　D. $3m$

【答案】A

【分析】根据两角和的余弦可求 $\cos\alpha\cos\beta, \sin\alpha\sin\beta$ 的关系，结合 $\tan\alpha\tan\beta$ 的值可求前者，故可求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

【详解】因为 $\cos(\alpha+\beta)=m$, 所以 $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=m$,

而 $\tan\alpha\tan\beta=2$, 所以 $=\frac{1}{2}\times 2b\times kb\times\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}\times kb\times b\times\sin\frac{A}{2}$,

故 $\cos\alpha\cos\beta-2\cos\alpha\cos\beta=m$ 即 $\cos\alpha\cos\beta=-m$,

从而 $\sin\alpha\sin\beta=-2m$, 故 $\cos(\alpha-\beta)=-3m$,

故选: A.

题目 2 (新课标全国 I 卷) 当 $x\in[0,2\pi]$ 时，曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为 (　　)

A. 3　　B. 4　　C. 6　　D. 8

【答案】C

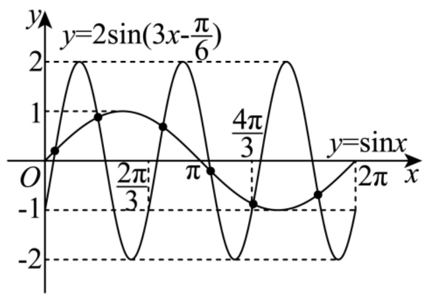
【分析】画出两函数在 $[0,2\pi]$ 上的图象，根据图象即可求解

【详解】因为函数 $y=\sin x$ 的的最小正周期为 $T=2\pi$,

函数 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{3}$,

所以在 $x\in[0,2\pi]$ 上函数 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 有三个周期的图象，

在坐标系中结合五点法画出两函数图象，如图所示:



由图可知，两函数图象有 6 个交点.

故选: C

题目 3 (新课标全国Ⅱ卷) 设函数 $f(x)=a(x+1)^2-1$，$g(x)=\cos x+2ax$，当 $x\in(-1,1)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 恰有一个交点，则 $a=$ (　　)

A. -1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

【答案】D

【分析】解法一：令 $F(x)=ax^2+a-1,G(x)=\cos x$，分析可知曲线 $y=F(x)$ 与 $y=G(x)$ 恰有一个交点，结合偶函数的对称性可知该交点只能在 y 轴上，即可得 $a=2$，并代入检验即可；解法二：令 $h(x)=f(x)-g(x),x\in(-1,1)$，可知 $h(x)$ 为偶函数，根据偶函数的对称性可知 $h(x)$ 的零点只能为 0，即可得 $a=2$，并代入检验即可.

【详解】解法一：令 $f(x)=g(x)$，即 $a(x+1)^2-1=\cos x+2ax$，可得 $ax^2+a-1=\cos x$，

令 $F(x)=ax^2+a-1,G(x)=\cos x$，

原题意等价于当 $x\in(-1,1)$ 时，曲线 $y=F(x)$ 与 $y=G(x)$ 恰有一个交点，

注意到 $F(x),G(x)$ 均为偶函数，可知该交点只能在 y 轴上，

可得 $F(0)=G(0)$，即 $a-1=1$，解得 $a=2$，

若 $a=2$，令 $F(x)=G(x)$，可得 $2x^2+1-\cos x=0$

因为 $x\in(-1,1)$，则 $2x^2\geqslant 0,1-\cos x\geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

可得 $2x^2+1-\cos x\geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

则方程 $2x^2+1-\cos x=0$ 有且仅有一个实根 0，即曲线 $y=F(x)$ 与 $y=G(x)$ 恰有一个交点，

所以 $a=2$ 符合题意；

综上所述：$a=2$.

解法二：令 $h(x)=f(x)-g(x)=ax^2+a-1-\cos x,x\in(-1,1)$，

原题意等价于 $h(x)$ 有且仅有一个零点，

因为 $h(-x)=a(-x)^2+a-1-\cos(-x)=ax^2+a-1-\cos x=h(x)$，

则 $h(x)$ 为偶函数，

根据偶函数的对称性可知 $h(x)$ 的零点只能为 0，

即 $h(0)=a-2=0$，解得 $a=2$，

若 $a=2$，则 $h(x)=2x^2+1-\cos x,x\in(-1,1)$，

又因为 $2x^2\geqslant 0,1-\cos x\geqslant 0$ 当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

可得 $h(x)\geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

即 $h(x)$ 有且仅有一个零点 0，所以 $a=2$ 符合题意；

故选：D.

题目 4 (全国甲卷数学(理)(文)) 已知 $\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$ (　　)

A. $2\sqrt{3}+1$　　B. $2\sqrt{3}-1$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $1-\sqrt{3}$

【答案】B

【分析】先将 $\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ 弦化切求得 $\tan\alpha$，再根据两角和的正切公式即可求解.

【详解】因为 $\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，

所以 $\frac{1}{1-\tan\alpha}=\sqrt{3}$，$\Rightarrow \tan\alpha=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=2\sqrt{3}-1$，

故选：B.

题目 5 (新高考北京卷) 已知 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$，$f(x_1)=-1$，$f(x_2)=1$，$|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\pi}{2}$，则 $\omega=$ (　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】B

【分析】根据三角函数最值分析周期性，结合三角函数最小正周期公式运算求解.

【详解】由题意可知：x_1 为 $f(x)$ 的最小值点，x_2 为 $f(x)$ 的最大值点，

则 $|x_1-x_2|_{\min}=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，即 $T=\pi$，

且 $\omega>0$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$.

故选：B.

题目 6 (新高考天津卷) 已知函数 $f(x)=\sin3\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 的最小正周期为 π. 则函数在 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$ 的最小值是 (　　)

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{3}{2}$　　C. 0　　D. $\frac{3}{2}$

【答案】A

【分析】先由诱导公式化简，结合周期公式求出 ω，得 $f(x)=-\sin2x$，再整体求出 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$ 时，$2x$ 的范围，结合正弦三角函数图象特征即可求解.

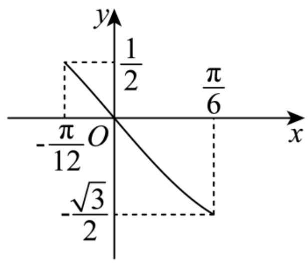
【详解】$f(x)=\sin3\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin(3\omega x+\pi)=-\sin3\omega x$，由 $T=\frac{2\pi}{3\omega}=\pi$ 得 $\omega=\frac{2}{3}$，

即 $f(x)=-\sin2x$，当 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$ 时，$2x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，

画出 $f(x)=-\sin2x$ 图象，如下图，

由图可知，$f(x)=-\sin2x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$ 上递减，

所以，当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)_{\min}=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$



故选：A

题目 7 (新高考上海卷) 下列函数 $f(x)$ 的最小正周期是 2π 的是（　　）

A. $\sin x+\cos x$　　B. $\sin x\cos x$　　C. $\sin^2x+\cos^2x$　　D. $\sin^2x-\cos^2x$

【答案】A

【分析】根据辅助角公式、二倍角公式以及同角三角函数关系并结合三角函数的性质一一判断即可．

【详解】对 A，$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，周期 $T=2\pi$，故 A 正确；

对 B，$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$，周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 B 错误；

对于选项 C，$\sin^2x+\cos^2x=1$，是常值函数，不存在最小正周期，故 C 错误；

对于选项 D，$\sin^2x-\cos^2x=-\cos 2x$，周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 D 错误，

故选：A.

题目 8 (新课标全国 II 卷) 对于函数 $f(x)=\sin 2x$ 和 $g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，下列说法正确的有（　　）

A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的零点　　B. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最大值

C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最小正周期　　D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有相同的对称轴

【答案】BC

【分析】根据正弦函数的零点，最值，周期公式，对称轴方程逐一分析每个选项即可．

【详解】A 选项，令 $f(x)=\sin 2x=0$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$，即为 $f(x)$ 零点，

令 $g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}, k\in\mathbf{Z}$，即为 $g(x)$ 零点，

显然 $f(x), g(x)$ 零点不同，A 选项错误；

B 选项，显然 $f(x)_{\max}=g(x)_{\max}=1$，$B$ 选项正确；

C 选项，根据周期公式，$f(x), g(x)$ 的周期均为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，C 选项正确；

D 选项，根据正弦函数的性质 $f(x)$ 的对称轴满足 $2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, k\in\mathbf{Z}$，

$g(x)$ 的对称轴满足 $2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}, k\in\mathbf{Z}$，

显然 $f(x), g(x)$ 图像的对称轴不同，D 选项错误．

故选：BC

题目 9 (新课标全国Ⅱ卷) 已知 α 为第一象限角, β 为第三象限角, $\tan\alpha+\tan\beta=4$, $\tan\alpha\tan\beta=\sqrt{2}+1$, 则 $\sin(\alpha+\beta)=$ ______.

【答案】$-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

【分析】法一:根据两角和与差的正切公式得 $\tan(\alpha+\beta)=-2\sqrt{2}$,再缩小 $\alpha+\beta$ 的范围,最后结合同角的平方和关系即可得到答案;法二:利用弦化切的方法即可得到答案.

【详解】法一:由题意得 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{4}{1-(\sqrt{2}+1)}=-2\sqrt{2}$,

因为 $\alpha\in\left(2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right),\beta\in\left(2m\pi+\pi,2m\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $k,m\in Z$,

则 $\alpha+\beta\in((2m+2k)\pi+\pi,(2m+2k)\pi+2\pi)$, $k,m\in Z$,

又因为 $\tan(\alpha+\beta)=-2\sqrt{2}<0$,

则 $\alpha+\beta\in\left((2m+2k)\pi+\dfrac{3\pi}{2},(2m+2k)\pi+2\pi\right)$, $k,m\in Z$, 则 $\sin(\alpha+\beta)<0$,

则 $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=-2\sqrt{2}$,联立 $\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=1$,解得 $\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

法二: 因为 α 为第一象限角, β 为第三象限角, 则 $\cos\alpha>0,\cos\beta<0$,

$\cos\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$, $\cos\beta=\dfrac{\cos\beta}{\sqrt{\sin^2\beta+\cos^2\beta}}=\dfrac{-1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}$,

则 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta(\tan\alpha+\tan\beta)$

$=4\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{-4}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}\sqrt{1+\tan^2\beta}}=\dfrac{-4}{\sqrt{(\tan\alpha+\tan\beta)^2+(\tan\alpha\tan\beta-1)^2}}=\dfrac{-4}{\sqrt{4^2+2}}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

故答案为: $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

题目 10 (全国甲卷数学(文)) 函数 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值是 ______.

【答案】2

【分析】结合辅助角公式化简成正弦型函数,再求给定区间最值即可.

【详解】$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$, 当 $x\in[0,\pi]$ 时, $x-\dfrac{\pi}{3}\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right]$,

当 $x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ 时, 即 $x=\dfrac{5\pi}{6}$ 时, $f(x)_{\max}=2$.

故答案为: 2

2024
高考模拟题

一、单选题

题目 1 (2024·宁夏石嘴山·三模) 在平面直角坐标系中, 角 θ 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边经过点 $P(1,2)$, 则 $7\cos^2\theta-2\sin2\theta=$ (　　)

A. $-\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{1}{5}$　　C. -2　　D. 2

【答案】A

【分析】由题意可知：$\tan\theta=2$，根据倍角公式结合齐次化问题分析求解.

【详解】由题意可知：$\tan\theta=2$，

所以 $7\cos^2\theta-2\sin2\theta=\dfrac{7\cos^2\theta-4\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\dfrac{7-4\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\dfrac{7-4\times2}{2^2+1}=-\dfrac{1}{5}$.

故选：A.

题目 2 (2024·广东茂名·一模) 已知 $\cos(\alpha+\pi)=-2\sin\alpha$，则 $\dfrac{\sin^2\alpha-3\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos\alpha}{\cos2\alpha+1}=$ (　　)

A. -1　　B. $-\dfrac{2}{5}$　　C. $\dfrac{4}{5}$　　D. $\dfrac{7}{8}$

【答案】D

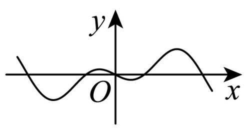
【分析】根据给定条件，求出 $\tan\alpha$，再结合诱导公式及二倍角的余弦公式，利用正余弦齐次式法计算得解.

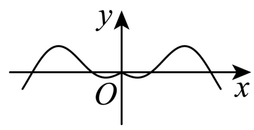
【详解】由 $\cos(\alpha+\pi)=-2\sin\alpha$，得 $\cos\alpha=2\sin\alpha$，则 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，

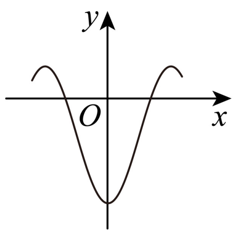
所以 $\dfrac{\sin^2\alpha-3\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos\alpha}{\cos2\alpha+1}=\dfrac{\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{2}\tan^2\alpha+\dfrac{3}{2}\tan\alpha=\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{8}$.

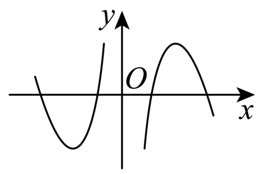
故选：D

题目 3 (2024·河北保定·二模) 函数 $f(x)=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\cos2x$ 的部分图象大致为 (　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【分析】根据函数的奇偶性判断即可.

【详解】设 $g(x)=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$，则 $g(-x)=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^x-1}{1+e^x}=-g(x)$，

所以 $g(x)$ 为奇函数，

设 $h(x)=\cos2x$，可知 $h(x)$ 为偶函数，

所以 $f(x)=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\cos2x$ 为奇函数，则 B，C 错误，

易知 $f(0)=0$，所以 A 正确，D 错误.

故选：A.

题目 4 (2024·山东济宁·三模) 已知函数 $f(x)=(\sqrt{3}\sin x+\cos x)\cos x-\frac{1}{2}$，若 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},m\right]$ 上的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$　　C. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{12}\right)$　　D. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{12}\right]$

【答案】D

【分析】利用二倍角公式、辅助角公式化简函数 $f(x)$，再借助正弦函数的图象与性质求解即得.

【详解】依题意，函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},m\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{3},2m+\frac{\pi}{6}\right]$，显然 $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\frac{\pi}{2}=1$，

且正弦函数 $y=\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{4\pi}{3}\right]$ 上单调递减，由 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},m\right]$ 上的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，

得 $\frac{\pi}{2}\leqslant 2m+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{4\pi}{3}$，解得 $\frac{\pi}{6}\leqslant m\leqslant\frac{7\pi}{12}$，

所以实数 m 的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{12}\right]$.

故选：D

题目 5 (2024·江西景德镇·三模) 函数 $f(x)=\cos\omega x(x\in\mathbf{R})$ 在 $[0,\pi]$ 内恰有两个对称中心，$|f(\pi)|=1$，将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图象. 若 $f(\alpha)+g(\alpha)=\frac{3}{5}$，则 $\cos\left(4\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=$（　　）

A. $\frac{7}{25}$　　B. $\frac{16}{25}$　　C. $-\frac{9}{25}$　　D. $-\frac{19}{25}$

【答案】A

【分析】根据 y 轴右边第二个对称中心在 $[0,\pi]$ 内，第三个对称中心不在 $[0,\pi]$ 内可求得 $\frac{3}{2}\leqslant\omega<\frac{5}{2}$，结合 $|f(\pi)|=1$ 可得 $\omega=2$，再利用平移变换求出 $g(x)$，根据三角变换化简 $f(\alpha)+g(\alpha)=\frac{3}{5}$ 可得 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，然后由二倍角公式可解.

【详解】由 $x\in[0,\pi]$ 得 $\omega x\in[0,\omega\pi]$，

因为函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 内恰有两个对称中心，所以 $\begin{cases}\frac{3\pi}{2}\leqslant\omega\pi\\ \frac{5\pi}{2}>\omega\pi\end{cases}$，解得 $\frac{3}{2}\leqslant\omega<\frac{5}{2}$，

又 $|f(\pi)|=|\cos\omega\pi|=1$，所以 $\omega\pi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $\omega=k,k\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=2$，

将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到函数 $y=\cos\left(2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$，

即 $g(x)=\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$，

因为 $f(\alpha)+g(\alpha)=\cos 2\alpha+\cos\left(2\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，