合肥一中 2024~2025 学年度高三第二次教学质量检测

数学试题

（考试时间：120 分钟　满分：150 分）

注意事项：

1．答题前，务必在答题卡和答题卷规定的地方填写自己的姓名、准考证号和座位号后两位．

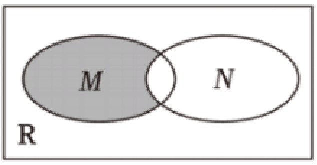
2．答题时，每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．

3．答题时，必须使用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔在答题卷上书写，要求字体工整、笔迹清晰．作图题可先用铅笔在答题卷规定的位置绘出，确认后再用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔描清楚．必须在题号所指示的答题区域作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上答题无效．

4．考试结束，务必将答题卡和答题卷一并上交．

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的．请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上．

1. 已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\{y|y=\log_2(x^2+1)\}$，则图中阴影部分所表示的集合是（　）



A. $\{-2,-1\}$　　B. $\{-2,-1,0\}$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{-1,0\}$

【答案】A

【解析】

【分析】先求集合 N，由题意可得图中阴影部分所表示的集合是 $M\cap(\complement_{R}N)$，进而运算求解即可．

【详解】$N=\{y|y\geq 0\}$，所以阴影部分 $M\cap(\complement_{R}N)=\{-2,-1\}$．

故选：A．

2. 命题"$\exists x\in\mathbf{R}$，使 $x^2+x-1\neq 0$"的否定是（　）

A. $\exists x\in\mathbf{R}$，使 $x^2+x-1=0$　　B. 不存在 $x\in\mathbf{R}$，使 $x^2+x-1\neq 0$

C. $\forall x\notin\mathbf{R}$，使 $x^2+x-1=0$　　D. $\forall x\in\mathbf{R}$，使 $x^2+x-1=0$

【答案】D

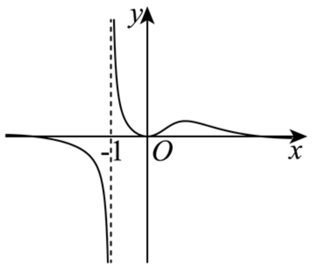
【解析】

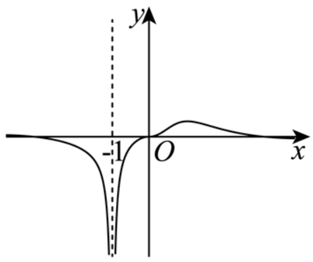
【分析】根据题意，由特称命题的否定是全称命题，即可得到结果.

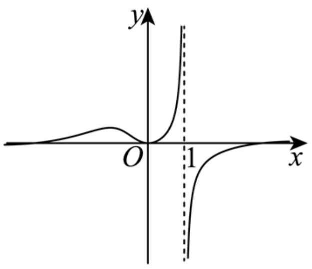
【详解】命题“$\exists x \in \mathbf{R}$，使 $x^2+x-1 \neq 0$”的否定是 $\forall x \in \mathbf{R}$，使 $x^2+x-1=0$.

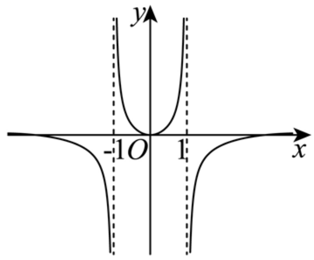
故选：D.

3. 函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x\sin x}{x^3+1}$ 的部分图象大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【解析】

【分析】由函数的定义域、特殊位置可排除法得出结果.

【详解】易知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x\sin x}{x^3+1}$ 的定义域为 $\left\{x \middle| x \neq -1\right\}$，故可排除 C，D；

又 $-\dfrac{\pi}{4}>-1, f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{-\dfrac{\pi}{4}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)^3+1}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{8}\pi}{\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)^3+1}>0$，所以可排除 B，

故选:A.

4. “曲线 $y=\ln x$ 恒在直线 $y=x+b$ 的下方”的一个充分不必要条件是（　　）

A. $b>-1$

B. $-\mathrm{e}<b<-1$

C. $-1<b<0$

D. $b<0$

【答案】C

【解析】

【分析】根据恒成立，分离参数，然后构造函数 $f\left(x\right)=\ln x-x, f'\left(x\right)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，利用导数求解单调性，进而可得最值求解充要条件，即可根据真子集关系求解充分不必要条件.

【详解】由曲线 $y=\ln x$ 恒在直线 $y=x+b$ 下方，可得 $\ln x<x+b$，

$b>\ln x-x$ 恒成立，

记 $f\left(x\right)=\ln x-x, f'\left(x\right)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，

当 $x>1, f'\left(x\right)<0, f\left(x\right)$ 单调递减，当 $0<x<1, f'\left(x\right)>0, f\left(x\right)$ 单调递增，

故 $f\left(x\right)_{\max}=f\left(1\right)=-1$，故 $b>-1$，

所以"曲线 $y=\ln x$ 恒在直线 $y=x+b$ 的下方"的充要条件是 $b>-1$，

结合选项可知 $\left\{b\left|-1<b<0\right.\right\}$ □ $\left\{b\left|b>-1\right.\right\}$，

故 $-1<b<0$ 是"曲线 $y=\ln x$ 恒在直线 $y=x+b$ 的下方"的一个充分不必要条件，

故选：C.

5. 当阳光射入海水后，海水中的光照强度随着深度增加而减弱，可用 $I_D=I_0\mathrm{e}^{-KD}$ 表示其总衰减规律，其中 K 是消光系数，D（单位：米）是海水深度，I_D（单位：坎德拉）和 I_0（单位：坎德拉）分别表示在深度 D 处和海面的光强. 已知某海域 6 米深处的光强是海面光强的 40%，则该海域消光系数 K 的值约为（　）（参考数据：$\ln 2\approx 0.7$，$\ln 5\approx 1.6$）

A. 0.2　　B. 0.18　　C. 0.15　　D. 0.14

【答案】C

【解析】

【分析】理解题意，代值后，将指数式化成对数式，取近似值计算即得.

【详解】依题意得，$\frac{I_D}{I_0}=40\%=\mathrm{e}^{-6K}$，化成对数式，$-6K=\ln\frac{2}{5}=\ln 2-\ln 5\approx -0.9$，

解得，$K\approx 0.15$.

故选：C.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $a=2\sqrt{3}$，$\left(\sin A-\sin B\right)\left(b+2\sqrt{3}\right)=c\left(\sin B+\sin C\right)$，则 $\triangle ABC$ 外接圆的面积为（　）

A. π　　B. 3π　　C. 4π　　D. 5π

【答案】C

【解析】

【分析】将等式$\left(\sin A-\sin B\right)\left(b+2\sqrt{3}\right)=c\left(\sin B+\sin C\right)$中$2\sqrt{3}$用$a$替换得到边的齐次式，再利用正弦定理化角为边，利用余弦定理求角可得，结合正弦定理求得外接圆半径，进而求出面积.

【详解】因为$a=2\sqrt{3}$，且$\left(\sin A-\sin B\right)\left(b+2\sqrt{3}\right)=c\left(\sin B+\sin C\right)$，

所以$\left(\sin A-\sin B\right)\left(a+b\right)=c\left(\sin B+\sin C\right)$，

由正弦定理，可得$\left(a-b\right)\left(a+b\right)=c\left(b+c\right)$，

即$a^2=b^2+c^2+bc$，

所以$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{-bc}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$，

由$A\in\left(0,\pi\right)$，所以$A=\dfrac{2\pi}{3}$，

则$\triangle ABC$外接圆的半径为$\dfrac{a}{2\sin A}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=2$，

所以$\triangle ABC$外接圆的面积为$S=\pi\cdot 2^2=4\pi$.

故选：C.

7. 已知函数$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\omega>0\right)$的图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{6}$对称，且$f\left(x\right)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$上没有最小值，则$\omega$的值为（　）

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. 4　　C. $\dfrac{9}{2}$　　D. $\dfrac{15}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据对称轴，得到解得$\omega=\dfrac{3}{2}+6k$，再根据$f\left(x\right)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$上没有最小值，得到$k=0$，计算即可.

【详解】由$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\omega>0\right)$的图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{6}$对称可得$\omega\times\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}=\pm\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

而$\omega>0$，故$\omega=\dfrac{3}{2}+6k$，$k\in\mathbf{N}$.

若 $k\geq 1$，则 $\omega=\frac{3}{2}+6k>6k\geq 6$，故由 $0<\frac{5\pi}{4\omega}<\frac{5\pi}{4\times 6}<\frac{5\pi}{4\times 5}=\frac{\pi}{4}$ 可知 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上有最小值 $f\left(\frac{5\pi}{4\omega}\right)$.

所以 $k=0$，$\omega=\frac{3}{2}$.

故选：A.

8. 已知 O 是 ΔABC 内一点，且 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，点 M 在 ΔOBC 内（不含边界），若 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda+2\mu$ 的取值范围是

A. $\left(1,\frac{5}{2}\right)$　　B. $(1,2)$　　C. $\left(\frac{2}{3},1\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},1\right)$

【答案】B

【解析】

【分析】

根据 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ 可知 O 为 ΔABC 的重心；根据点 M 在 ΔOBC 内，判断出当 M 与 O 重合时，$\lambda+2\mu$ 最小；当 M 与 C 重合时，$\lambda+2\mu$ 的值最大，因不含边界，所以取开区间即可.

【详解】因为 O 是 ΔABC 内一点，且 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

所以 O 为 ΔABC 的重心

M 在 ΔOBC 内（不含边界），且当 M 与 O 重合时，$\lambda+2\mu$ 最小，此时

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\times\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\right]=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

所以 $\lambda=\frac{1}{3},\mu=\frac{1}{3}$，即 $\lambda+2\mu=1$

当 M 与 C 重合时，$\lambda+2\mu$ 最大，此时

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}$

所以 $\lambda=0,\mu=1$，即 $\lambda+2\mu=2$

因为 M 在 ΔOBC 内且不含边界

所以取开区间，即 $\lambda+2\mu\in(1,2)$

所以选 B

【点睛】本题考查了向量在三角形中的线性运算，特殊位置法的应用，属于难题.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对得 6 分，部分选对的得部分分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知平面向量$\vec{a}=(2,m)$，$\vec{b}=(1,-1)$，且$|\vec{a}+2\vec{b}|=|\vec{a}-2\vec{b}|$，则（　　）

A. $m=2$　　B. $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$　　C. $\vec{a}\perp\vec{b}$　　D. $|\vec{a}|=2\sqrt{2}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】利用平面向量的坐标表示及数量积的坐标运算公式计算即可.

【详解】由题意可知$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}-2\vec{b}|^2\Rightarrow 4\vec{a}\cdot\vec{b}=-4\vec{a}\cdot\vec{b}$，即$\vec{a}\cdot\vec{b}=2-m=0\Rightarrow m=2$，

所以$\vec{a}=(2,2),|\vec{a}|=2\sqrt{2}$，即 A，C，D 正确，B 错误.

故选：ACD

10. 已知$b>1$，若对任意的$x\in(1,+\infty)$，不等式$ax^3+4x^2-abx-4b\le 0$恒成立，则（　　）

A. $a<0$

B. $a^2b=16$

C. a^2+16b的最小值为 32

D. $a^2+ab+4a+b$的最小值为-8

【答案】ABD

【解析】

【分析】依题意可得$(ax+4)(x^2-b)\le 0$恒成立，分析可得$0<x<\sqrt{b}$时，$ax+4\ge 0$，当$x>\sqrt{b}$时，$ax+4\le 0$，从而得到$a<0$且$a\sqrt{b}+4=0$，即可判断 A、B；利用基本不等式判断 C；利用基本不等式及二次函数的性质判断 D.

【详解】对于 A、B：因为$ax^3+4x^2-abx-4b\le 0$，即$(ax+4)(x^2-b)\le 0$恒成立，

又因为$b>1$，$x>1$，

所以当$1<x<\sqrt{b}$时，$x^2-b<0$，当$x>\sqrt{b}$时，$x^2-b>0$，

因为对任意的$x\in(1,+\infty)$，不等式$ax^3+4x^2-abx-4b\le 0$恒成立，

所以当$0<x<\sqrt{b}$时，$ax+4\ge 0$，当$x>\sqrt{b}$时，$ax+4\le 0$，

所以对于函数 $y=ax+4$，必有 $a<0$，单调递减，且零点为 $x=\sqrt{b}$，

所以 $a\sqrt{b}+4=0$，所以 $a^2b=16$，所以 A 正确，B 正确；

对于 C，因为 $a\sqrt{b}+4=0$，所以 $a=-\dfrac{4}{\sqrt{b}}$，

所以 $a^2+16b=\dfrac{16}{b}+16b\geq 2\sqrt{\dfrac{16}{b}\cdot 16b}=32$，

当且仅当 $\dfrac{16}{b}=16b$，即 $b=1$ 时取等号，与条件不符，所以 C 错误；

对于 D，$a^2+ab+4a+b=\dfrac{16}{b}-4\sqrt{b}-\dfrac{16}{\sqrt{b}}+b=\left(\dfrac{16}{b}+b\right)-\left(4\sqrt{b}+\dfrac{16}{\sqrt{b}}\right)$

$=\left(\dfrac{16}{b}+b\right)-4\left(\sqrt{b}+\dfrac{4}{\sqrt{b}}\right)=\left(\sqrt{b}+\dfrac{4}{\sqrt{b}}\right)^2-4\left(\sqrt{b}+\dfrac{4}{\sqrt{b}}\right)-8$，

令 $m=\sqrt{b}+\dfrac{4}{\sqrt{b}}$，则 $m=\sqrt{b}+\dfrac{4}{\sqrt{b}}\geq 2\sqrt{\sqrt{b}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{b}}}=4$，当且仅当 $b=4$ 时，等号成立.

则原式 $=m^2-4m-8\left(m\geq 4\right)$，

由二次函数的性质可得 $y=m^2-4m-8\left(m\geq 4\right)$ 的最小值为 -8，

此时 $b=4$，$a=-2$，所以 D 正确，

故选：ABD.

11. 已知函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为R，函数 $F\left(x\right)=f\left(1+x\right)-\left(1+x\right)$ 为偶函数，函数 $G\left(x\right)=f\left(2+3x\right)-1$ 为奇函数，则下列说法正确的是（　）

A. 函数 $f\left(x\right)$ 的一个对称中心为(2,1)

B. $f\left(0\right)=-1$

C. 函数 $f\left(x\right)$ 为周期函数，且一个周期为 4

D. $f\left(0\right)+f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+f\left(4\right)=5$

【答案】ABD

【解析】

【分析】先应用函数为奇函数代入化简得出对称中心判断 A，根据函数 $F\left(x\right)=f\left(1+x\right)-\left(1+x\right)$

为偶函数结合赋值法判断 B, 特殊值法 $f(0) \neq f(4)$ 判断 C，赋值法得出函数值判断 D.

【详解】对于 A，因为 $G(x)=f(2+3x)-1$ 为奇函数，所以 $G(-x)=-G(x)$，

即 $f(2-3x)-1=-[f(2+3x)-1]$，所以 $f(2-3x)+f(2+3x)=2$，

所以 $f(2-x)+f(2+x)=2$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,1)$ 对称，所以 A 正确，

对于 B，在 $f(2-x)+f(2+x)=2$ 中，令 $x=0$，得 $2f(2)=2$，得 $f(2)=1$，

因为函数 $F(x)=f(1+x)-(1+x)$ 为偶函数，所以 $F(-x)=F(x)$，

所以 $f(1-x)-(1-x)=f(1+x)-(1+x)$，所以 $f(1+x)-f(1-x)=2x$，

令 $x=1$，则 $f(2)-f(0)=2$，所以 $1-f(0)=2$，得 $f(0)=-1$，所以 B 正确，

对于 C，因为函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,1)$ 对称，$f(0)=-1$，

所以 $f(4)=3$，所以 $f(0) \neq f(4)$，所以 4 不是 $f(x)$ 的周期，所以 C 错误，

对于 D，在 $f(2-x)+f(2+x)=2$ 中令 $x=1$，则 $f(1)+f(3)=2$，

令 $x=2$，则 $f(0)+f(4)=2$，因为 $f(0)=-1$，所以 $f(4)=3$，

因为 $f(2)=1$，所以 $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=5$，所以 D 正确，

故选：ABD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12. 已知 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4}{3}$，则 $\cos 2\alpha=$__________.

【答案】$-\frac{24}{25}$ ##-0.96

【解析】

【分析】根据两角和的正切公式求得 $\tan\alpha=7$，利用三角恒等变换将 $\cos 2\alpha$ 化为 $\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$，即可求得答案.

【详解】由 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4}{3}$ 得：$\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=-\frac{4}{3}$，

即得 $\tan\alpha=7$，

故 $\cos 2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{1-49}{1+49}=-\dfrac{24}{25}$,

故答案为：$-\dfrac{24}{25}$

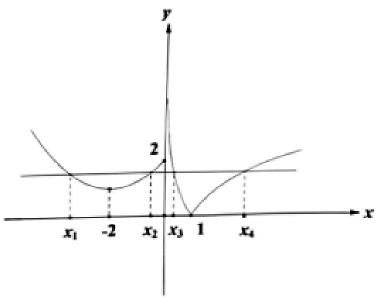
13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\log_2 x|, x>0\\ \dfrac{1}{4}x^2+x+2, x\le 0\end{cases}$，方程 $f(x)=a$ 有四个不同根 x_1，x_2，x_3，x_4，且满足 $x_1<x_2<x_3<x_4$，则 $\dfrac{x_4}{x_3}-\dfrac{x_3^2(x_1+x_2)}{2}$ 的最大值为______.

【答案】$\dfrac{129}{8}$

【解析】

【分析】作出函数的图象，可得出当直线与函数的图象有四个交点时的各根取值范围，求出实数 t 的取值范围，将代数式转化为关于 t 的函数，利用双勾函数的基本性质求出的取值范围.

【详解】作出函数图像可得 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=-2$，$-\log_2 x_3=\log_2 x_4$



从而得 $x_3x_4=1$，且 $-\log_2 x_3\in(1,2]$，从而得 $\dfrac{1}{x_3}\in(2,4]$,

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{1}{x_3^2}-\dfrac{x_3^2(x_1+x_2)}{2}=\dfrac{1}{x_3^2}+2x_3^2$,

Q 令 $y=\dfrac{1}{x_3^2}+2x_3^2$，Q $\dfrac{1}{x_3}\in(2,4]$，$\therefore \dfrac{1}{x_3^2}\in(4,16]$,

令 $t=\dfrac{1}{x_3^2}$，则 $f(t)=t+\dfrac{2}{t}$，$t\in(4,16]$,

Q $f(t)$ 在 $(\sqrt{2},+\infty)$ 单调递增，$\therefore f(t)\in\left(\dfrac{9}{2},\dfrac{129}{8}\right]$,

$\therefore$ 最大值为 $\dfrac{129}{8}$.

故答案为：$\frac{129}{8}$.

14. 定义 $\max\{x,y\}$ 表示实数 x，y 中的较大者，若 a，b，c 是正实数，则 $\max\left\{a,\frac{1}{b}\right\}+\max\left\{b,\frac{2}{c}\right\}+\max\left\{c,\frac{3}{a}\right\}$ 的最小值是______.

【答案】$2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】讨论 c 与 $\frac{3}{a}$ 的大小关系，在每种情况中分别用基本不等式和不等式的性质确定 M 的范围，即可得解.

【详解】按 $c\le\frac{3}{a}$ 和 $c\ge\frac{3}{a}$ 分类：记 $M=\max\left\{a,\frac{1}{b}\right\}+\max\left\{b,\frac{2}{c}\right\}+\max\left\{c,\frac{3}{a}\right\}$，

当 $c\le\frac{3}{a}$ 时，$\frac{2}{c}\ge\frac{2a}{3}$，$M\ge a+\frac{2}{c}+\frac{3}{a}\ge a+\frac{2a}{3}+\frac{3}{a}=\frac{5a}{3}+\frac{3}{a}\ge 2\sqrt{\frac{5a}{3}\cdot\frac{3}{a}}=2\sqrt{5}$，

当且仅当 $a=\frac{3}{\sqrt{5}}$，$\frac{\sqrt{5}}{3}\le b\le\frac{2}{\sqrt{5}}$，$c=\sqrt{5}$ 时，等号成立；

当 $c\ge\frac{3}{a}$ 时，$a\ge\frac{3}{c}$，$M\ge a+\frac{2}{c}+c\ge\frac{3}{c}+\frac{2}{c}+c=\frac{5}{c}+c\ge 2\sqrt{\frac{5}{c}\cdot c}=2\sqrt{5}$，

当且仅当 $a=\frac{3}{\sqrt{5}}$，$\frac{\sqrt{5}}{3}\le b\le\frac{2}{\sqrt{5}}$，$c=\sqrt{5}$ 时，等号成立.

综上所述，M 的最小值是 $2\sqrt{5}$.

故答案为：$2\sqrt{5}$.

【点睛】关键点点睛：本题的关键点是在利用基本不等式和不等式的性质时，特别注意同向不等式的应用和基本不等式成立的条件.

四、解答题：本题共 5 小题，第 15 题满分 13 分，第 16 题、第 17 题满分 15 分，第 18 题、第 19 题满分 17 分，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a，b，c，已知 $(c-2b)\cos A+\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}=0$.

（1）若 $a=4$，$b+c=8$，求 $\triangle ABC$ 的面积；

（2）若角 C 为钝角，求 $\frac{c}{b}$ 的取值范围.