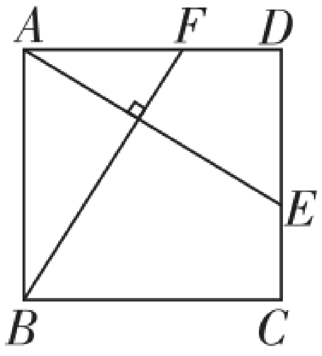
第二十二章 四边形

专项3 与正方形有关的三个常考模型——河北中考热点

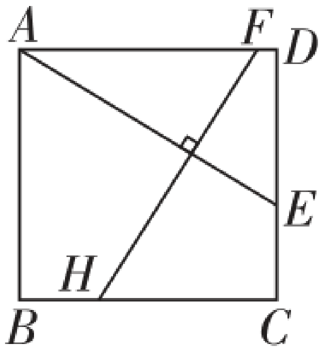
过专项 阶段强化专项训练

类型1 十字模型

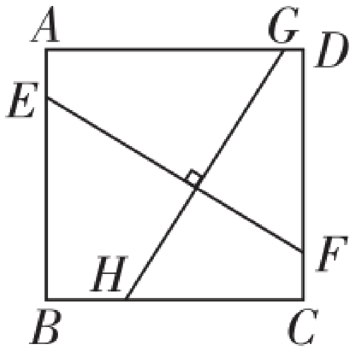
模型总结



$AE=BF$

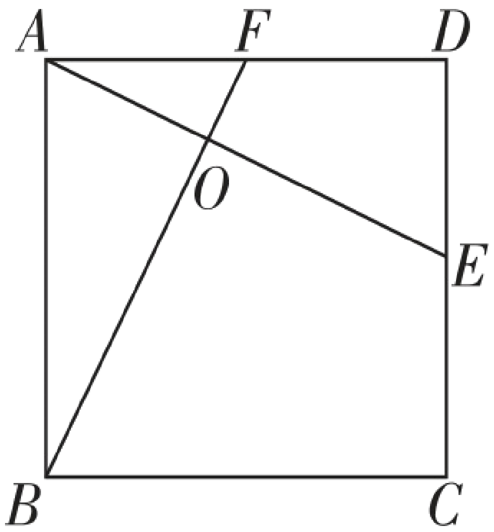


$AE=FH$



$EF=GH$

1.[2023枣庄市中区一模]如图，E，F分别是正方形$ABCD$的边CD，AD上的点，且$CE=DF$，AE，BF相交于点O，给出下列结论：①$AE=BF$；②$AE\perp BF$；③$AO=OE$；④$S_{\triangle AOB}=S_{四边形DEOF}$.其中正确结论的个数为(**B**)



A.4　　B.3　　C.2　　D.1

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore \angle BAF = \angle D = 90^\circ$，$AB = AD = CD$. $\because CE = DF$，$\therefore AD - DF = CD - CE$，$\therefore AF = DE$. 在 $\triangle ABF$ 与 $\triangle DAE$ 中，

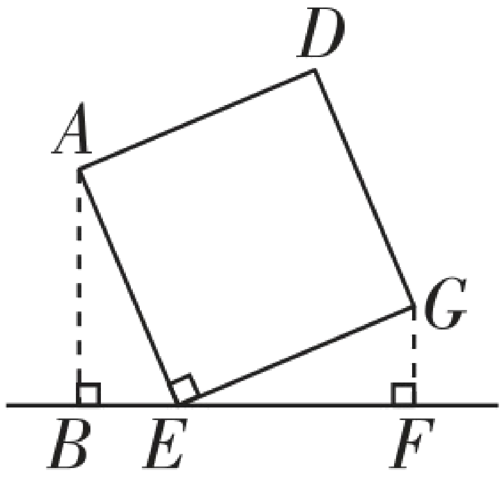
$$\begin{cases} AB = DA, \\ \angle BAF = \angle ADE, \\ AF = DE, \end{cases} \therefore \triangle ABF \cong \triangle DAE(\mathrm{SAS})，\therefore \angle ABF = \angle DAE，$$

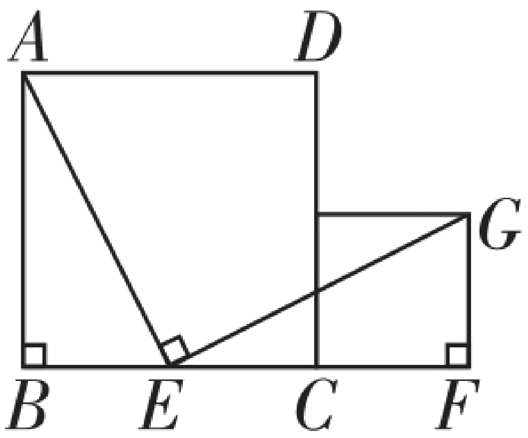
$AE = BF$，故①正确. $\because \angle ABF = \angle DAE$，$\angle DAE + \angle BAO = 90^\circ$，$\therefore \angle ABF + \angle BAO = 90^\circ$，$\therefore \angle AOB = 90^\circ$，$\therefore AE \perp BF$，故②正确.

假设 $AO=OE$ ，连接 BE ， $\because AE\perp BF$ ， $\therefore AB=BE$.在 Rt△BCE 中， $BE>BC$ ， $\therefore AB>BC$ ，这与正方形的边长 $AB=BC$ 矛盾， $\therefore$ 假设不成立，即 $AO\neq OE$ ，故③错误. $\because \triangle ABF\cong\triangle DAE$，$\therefore S_{\triangle ABF}=S_{\triangle DAE}$ ， $\therefore S_{\triangle ABF}-S_{\triangle AOF}=S_{\triangle DAE}-S_{\triangle AOF}$ ， $\therefore S_{\triangle AOB}=S_{四边形DEOF}$ ，故④正确.

类型2 一线三垂直模型

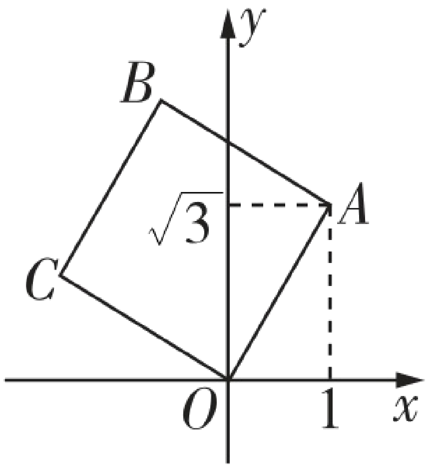
模型总结





①$\triangle ABE \cong \triangle EFG$；②$BE = FG = CF$.

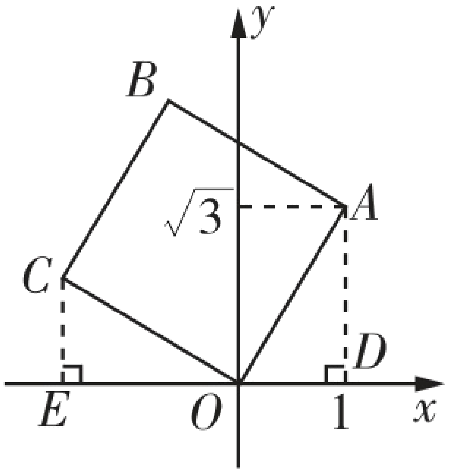
2.[2023邯郸峰峰一中期末]如图，将正方形$OABC$放在平面直角坐标系中，O是原点，点A的坐标为$(1,\sqrt{3})$，则点C的坐标为(　**A**　)



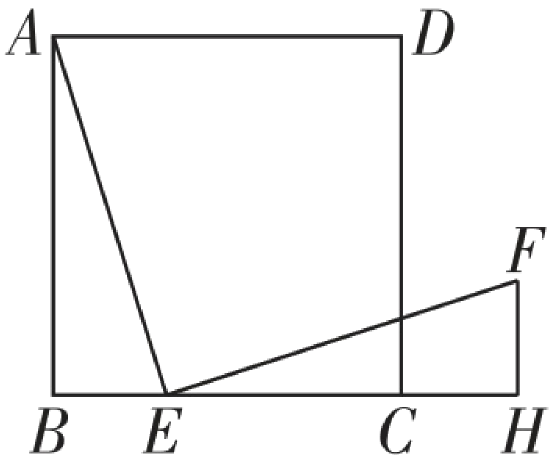
A. $(-\sqrt{3},1)$　　B. $(-1,\sqrt{3})$

C. $(\sqrt{3},1)$　　D. $(-\sqrt{3},-1)$

【解析】 如图,过点 A 作 $AD\perp x$ 轴于点 D，过点 C 作 $CE\perp x$ 轴于点 E，因为四边形 $OABC$ 是正方形，所以 $\angle AOC=90°$ ，$AO=CO$.根据同角的余角相等可得 $\angle OAD=\angle COE$，再利用“角角边”证明 $\triangle AOD\cong\triangle OCE$，可得 $OE=AD=\sqrt{3}$，$CE=OD=1$，再结合点 C 在第二象限内，可得点 C 的坐标为 $(-\sqrt{3},1)$.



3.[2021荆门中考]如图，点E是正方形$ABCD$的边BC上的动点，$\angle AEF=90^\circ$，且$EF=AE$，$FH\perp BH$.



（1）求证：$BE=CH$.

证明：$\because$ 四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore \angle ABE=90^\circ$，$AB=BC$.

$\because \angle AEF=90^\circ$，$\therefore \angle AEB+\angle FEH=90^\circ$.

$\because \angle AEB + \angle BAE = 90^\circ$，$\therefore \angle BAE = \angle HEF$，

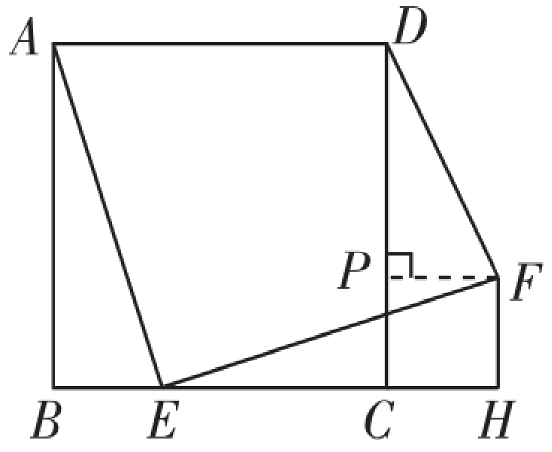
又$\because AE = EF$，$\angle ABE = \angle EHF = 90^\circ$，

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle EHF$，$\therefore BE = FH$，$AB = EH$，

$\therefore AB = BC = EH$，则$BC - EC = EH - EC$，

$\therefore BE = CH$.

（2）若 $AB=3$， $BE=x$，用 x 表示 DF 的长.



解：如图，过点 F 作 $FP\perp CD$ 于点 P.

$\because \angle FPC=\angle PCH=\angle FHC=90^\circ$ ， $BE=CH=FH$，

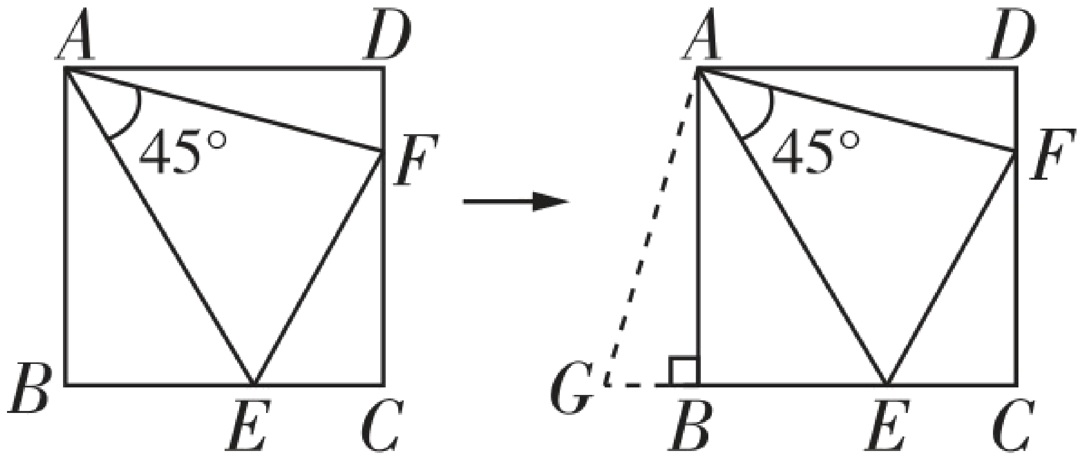
$\therefore$ 四边形 $PCHF$ 是正方形，

$\therefore CH=FH=FP=PC=x$， $\therefore PD=3-x$，

$\therefore DF=\sqrt{PF^2+PD^2}=\sqrt{x^2+(3-x)^2}=\sqrt{2x^2-6x+}$

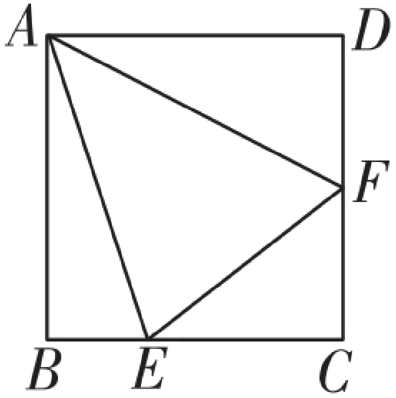
类型3 半角模型

模型总结



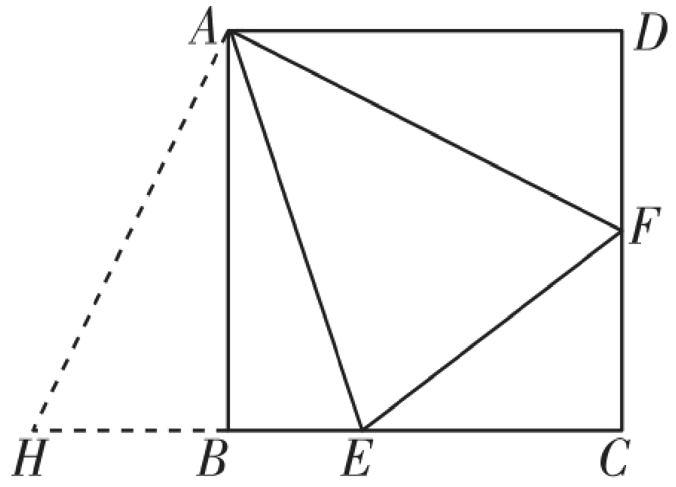
①$\triangle AEF \cong \triangle AEG$;②$EF = BE + DF$;③$\triangle CEF$的周长为$2AB$.

4.[2023重庆中考A卷]如图，在正方形$ABCD$中，点E，F分别在BC，CD上，连接AE，AF，EF，$\angle EAF=45^{\circ}$.若$\angle BAE=\alpha$，则$\angle FEC$一定等于(A)



A. 2α　　B. $90^{\circ}-2\alpha$　　C. $45^{\circ}-\alpha$　　D. $90^{\circ}-\alpha$

【解析】 如图，将$\triangle ADF$绕点A顺时针旋转90°至$\triangle ABH$，$\because$ 四边形$ABCD$是正方形，



$\therefore AB=AD$，$\angle ABC=\angle D=\angle BAD=\angle C=90^\circ$．

由旋转的性质可知，$\angle DAF=\angle BAH$，

$\angle D=\angle ABH=90^\circ$，$AF=AH$，$\therefore \angle ABH+\angle ABC=180^\circ$，$\therefore$ 点H，B，C三点共线．$\because \angle BAE=\alpha$，$\angle EAF=45^\circ$，

$\angle BAD=\angle HAF=90^\circ$，$\therefore \angle DAF=\angle BAH=45^\circ-\alpha$，

$\angle EAF=\angle EAH=45^\circ$．$\because \angle AHB+\angle BAH=90^\circ$，$\therefore \angle AHB=45^\circ+\alpha$．

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AEH$ 中，$\begin{cases} AF = AH, \\ \angle FAE = \angle HAE, \\ AE = AE, \end{cases}$ $\therefore \triangle AEF \cong \triangle AEH(\mathrm{SAS})$，

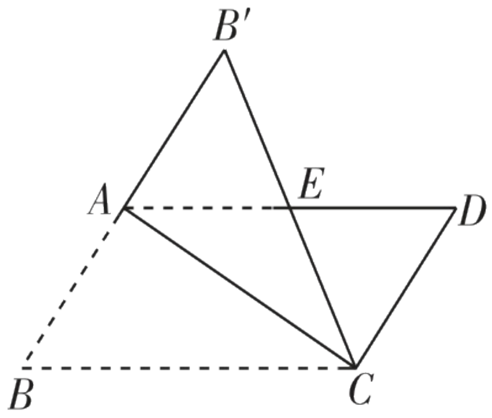
$\therefore \angle AHE = \angle AFE = \angle AFD = 45^\circ + \alpha$，$\therefore \angle DFE = \angle AFD + \angle AFE = 90^\circ + 2\alpha$. $\because \angle DFE = \angle FEC + \angle C = \angle FEC + 90^\circ$，$\therefore \angle FEC = 2\alpha$.

专项4 四边形的折叠问题——河北中考热点

过专项 阶段强化专项训练

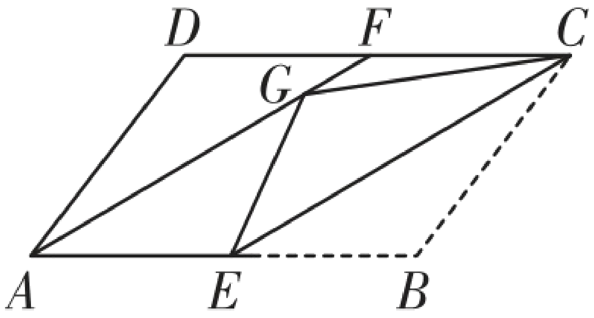
类型1　平行四边形的折叠问题

1.[2023临沂期末]如图，在▱$ABCD$中，$\angle BAC=90^{\circ}$，$AD=8$，将$\triangle ABC$沿直线AC翻折，得到$\triangle AB'C$，$B'C$与AD交于点E，则AE的长度为__4__.



【解析】 $\because$ 四边形$ABCD$是平行四边形，$\therefore AB//CD$，$AB=CD$.由翻折的性质，可得$\angle B'AC=\angle BAC=90°$，$AB'=AB$,$\therefore AB'=CD$,点$B$,$A$,$B'$三点共线，$\therefore AB'//CD$，$\therefore \angle B'=\angle ECD$，$\angle B'AE=\angle EDC$，$\therefore\triangle AEB'\cong\triangle DEC$，$\therefore AE=DE$,$\therefore AE=\frac{1}{2}AD=4$.

2.[2022上海静安区期中]如图，在▱$ABCD$中，点E为AB边的中点，连接CE，将△BCE沿CE翻折，使点B落在点G处，连接AG并延长，交CD于点F.



（1）求证：四边形$AECF$是平行四边形.

证明：∵ 四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $AE // FC$.

∵ 点E是AB边的中点，∴ $AE = BE$.

由折叠的性质，得 $BE=GE, \angle CEB=\angle CEG=\frac{1}{2}\angle BEG$，

$\therefore AE=GE, \therefore \angle FAE=\angle AGE$.

$\because \angle BEG=\angle FAE+\angle AGE$，

$\therefore \angle FAE=\frac{1}{2}\angle BEG, \therefore \angle FAE=\angle CEB$，

$\therefore AF//EC, \therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

（2）若 $CF=5$，$\triangle GCE$ 的周长为20，求四边形 $ABCF$ 的周长.

解：由折叠的性质，得 $GE=BE,GC=BC$.

$\because \triangle GCE$ 的周长为20，$\therefore GE+CE+GC=20$,

$\therefore BE+CE+BC=20$.

$\because$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形，

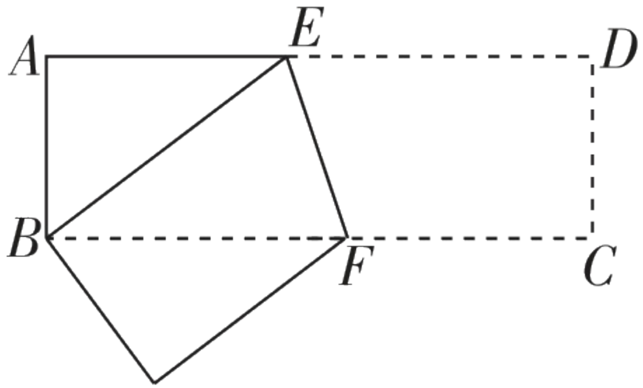
$\therefore AF=CE,AE=CF=5$,

$\therefore$ 四边形 $ABCF$ 的周长为

$AB+BC+CF+AF=AE+BE+BC+CF+CE=5+20+5=30$.

类型2 矩形的折叠问题

3.如图，在矩形$ABCD$中，$AB=3$，$AD=9$，将此矩形折叠，使点D与点B重合，折痕为EF，则$\triangle ABE$的面积为(C)



A.3　　B.4　　C.6　　D.12

【解析】 由折叠的性质，可知 $ED = BE$.设 $AE = x$，则 $BE = ED = 9 - x$，在 Rt $\triangle ABE$ 中，$AB^2 + AE^2 = BE^2$，即 $3^2 + x^2 = (9 - x)^2$，解得 $x = 4$，$\therefore \triangle ABE$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$.

4.[2022孝感孝南区期中]如图1，将矩形$ABCD$沿DE折叠，使顶点A落在DC上的点A'处,然后将矩形展平，沿EF折叠，使顶点A落在折痕DE上的点G处,再将矩形$ABCD$沿CE折叠，此时顶点B恰好落在DE上的点H处,如图2.

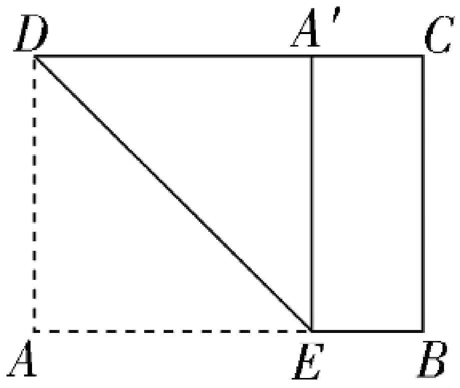


图 1

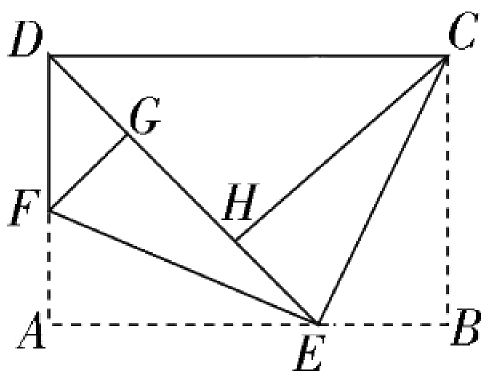


图 2

（1）求证：$EG=CH$.

证明：如题图1，易知四边形$AEA'D$是正方形，$\therefore AD=AE$.

如题图2，由折叠的性质知$AE=EG$，$BC=CH$.

$\because$ 四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore AD=BC$，$\therefore EG=CH$.

（2）已知 $AF=\sqrt{2}$，求 AD 和 AB 的长.

解：如题图2，由题意知，$\angle ADE=45°$，$\angle FGE=\angle A=90°$，

$FG=AF=\sqrt{2}$，

$\therefore DG=FG=\sqrt{2}$，$\therefore DF=2$，$\therefore AD=AF+DF=\sqrt{2}+2$.

由折叠的性质知 $\angle AEF=\angle GEF$，$\angle BEC=\angle HEC$，

$\therefore \angle AEF+\angle BEC=90°$.