2025届高考数学专项复习函数新定义：泰勒展开式、牛顿法、拉格朗日中值定理、行列式与矩阵含答案

函数新定义：泰勒展开式、牛顿法、拉格朗日中值定理、行列式与矩阵

目录

题型一 泰勒展开式

1. **泰勒展开式**：若函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的某个开区间 (a,b) 上具有任意阶的导数，那么对于任意 $x\in(a,b)$ 有 $g(x)=f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$，我们将 $g(x)$ 称为函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的泰勒展开式.

2. **麦克劳林公式**：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{f^n(0)}{n!}x^n+R_n(x)$.（泰勒展开式 $x=0$ 的特殊形式）

3. **常见的泰勒展开**

(1)$\dfrac{1}{1-x}\approx1+x+x^2+x^3+\cdots\ (|x|<1)$

(2)$\dfrac{1}{1+x}\approx1-x+x^2-x^3+\cdots\ (|x|<1)$

(3)$(1+x)^\alpha\approx1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots\ (|x|<1)$

(4)$e^x\approx1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots\ (x\in R)$

(5)$\cos x\approx1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots\ (x\in R)$

(6)$\sin x\approx x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots\ (x\in R)$

(7)$\tan x\approx x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5+\cdots$

(8)$\ln(1+x)\approx x-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}-\dfrac{x^4}{4!}+\cdots\ (-1<x\leqslant1)$

1. (2024·广东广州·模拟预测) 英国数学家泰勒发现了如下公式：$\mathrm{e}^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+\cdots$，其中 $n!=1\times2\times3\times4\times\cdots\times n$，e 为自然对数的底数，$\mathrm{e}=2.71828\cdots$．以上公式称为泰勒公式．设 $f(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}$，$g(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}$，根据以上信息，并结合高中所学的数学知识，解决如下问题：

(1) 证明：$\mathrm{e}^{x}\geqslant 1+x$；

(2) 设 $x\in(0,+\infty)$，证明：$\frac{f(x)}{x}<g(x)$；

(3) 设实数 k 使得 $f(x)>k\left(x+\frac{x^{3}}{6}\right)$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，求 k 的最大值．