高职高考
数学
复习

§2.2　均值定理

【复习目标】

1.掌握均值定理.

2.会用均值定理求最值.

3.会解不等式的应用题.

【知识回顾】

1.均值定理

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$,其中$a,b\in\mathbf{R}_{+}$,当且仅当$a=b$时取等号.

2.利用均值定理求最值

(1)最小值.①$a>0,b>0$;②ab是定值;③当且仅当$a=b$时,$a+b$有最小值$2\sqrt{ab}$.

(2)最大值.①$a>0,b>0$;②$a+b$是定值;③当且仅当$a=b$时,$a\cdot b$有最大值$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

【说明】　注意运用均值定理求最值时,条件缺一不可.记忆时可记为一"正"、二"定"、三"等".

【例题精解】

【例1】 (1)若$x>0,y>0,x+y=8$,则xy的最大值是__________.

(2)若$x>0,y>0,xy=9$,则$x+y$的最小值是__________.

【解】 (1)$xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\left(\frac{8}{2}\right)^2=16$,当且仅当$x=y=4$时,$xy$取最大值16.

(2)$x+y\geq2\sqrt{xy}=2\sqrt{9}=6$,当且仅当$x=y=3$时,$x+y$取最小值6.

【点评】 ①若$x,y\in\mathbf{R}_+$,且$x+y=k$(常数),则$xy\leq\left(\frac{k}{2}\right)^2$.

②若$x,y\in\mathbf{R}_+$,且$xy=k$(常数),则$x+y\geq2\sqrt{k}$.

【对点练习1】 (1)若$x>0,y>0,x+y=12$,则xy的最大值是________

.

(2)若$x>0,y>0,xy=20$,则$x+y$的最小值是__________.

【答案】 (1)36

[$xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\left(\frac{12}{2}\right)^2=36$,当且仅当$x=y=6$时,$xy$取最大值36.]

(2)$4\sqrt{5}$

($x+y\geq2\sqrt{xy}=2\sqrt{20}=4\sqrt{5}$,当且仅当$x=y=2\sqrt{5}$时,$x+y$取最小值$4\sqrt{5}$.)

【例2】 当$0<x<4$时,求$x(4-x)$的最大值.

【解】 $\because 0<x<4$, $\therefore x>0, 4-x>0$.

$\therefore x(4-x)\le\left(\frac{x+4-x}{2}\right)^2=4$,

当且仅当$x=4-x$,即$x=2$时,$x(4-x)$取最大值4.

【点评】 由于$x+(4-x)=4$为定值,且依题意有$x>0, 4-x>0$,故可用均值定理求最值.

【对点练习2】 当$0<x<2$时,求$x(6-3x)$的最大值.

【解】 $\because 0<x<2$, $\therefore x>0$, $2-x>0$.

$\therefore x(6-3x)=3x(2-x)\leq 3\left(\frac{x+2-x}{2}\right)^2=3$,

当且仅当$x=2-x$,即$x=1$时,$x(6-3x)$取最大值3.

【例3】 当$x>0$时,求$x+\frac{3}{x}$的最小值.

【解】 $\because x>0,\therefore x+\frac{3}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{3}{x}}=2\sqrt{3}$,

当且仅当$x=\frac{3}{x}$,即当$x=\sqrt{3}$时,$x+\frac{3}{x}$取最小值$2\sqrt{3}$.

【点评】 当$x>0$时,$x\cdot\frac{3}{x}=3$为定值,故可用均值定理求最值.

【对点练习3】　当$x>0$时,求$3x+\frac{4}{x}$的最小值.

【解】　$\because x>0$,$\therefore 3x+\frac{4}{x}\geq 2\sqrt{3x\cdot\frac{4}{x}}=4\sqrt{3}$,

当且仅当$3x=\frac{4}{x}$,即$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$时,$3x+\frac{4}{x}$取最小值$4\sqrt{3}$.

【例4】 当$x>1$时,求 $x+\frac{1}{x-1}$的最小值.

【解】 $\because x>1, \therefore x-1>0.$

$\therefore x+\frac{1}{x-1}=x-1+\frac{1}{x-1}+1\geq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}+1=3,$

当且仅当$x-1=\frac{1}{x-1}$,即$x=2$时, $x+\frac{1}{x-1}$取最小值3.

【点评】 $x+\frac{1}{x-1}=x-1+\frac{1}{x-1}+1$.由于$(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}=1$为定值,且依题知$x-1>0$,故可用均值定理求最值.

【仿真训练】

一、选择题

1.若$x>0,y>0,x+y=4$,则xy的最大值是 (　　)

A.2　　B.3　　C.4　　D.5

【答案】 C

2.若$x>0,y>0,xy=16$,则$x+y$的最小值是　　(　　)

A.5　　B.6　　C.7　　D.8

【答案】　D

3.若$x\neq0$,则$2x^2+\frac{6}{x^2}$的最小值是　　(　　)

A.12　　B.24　　C.$2\sqrt{3}$　　D.$4\sqrt{3}$

【答案】　D

4.若$a>0,b>0,a+b=7$,则ab的最大值为　　(　　)

A.$\frac{7}{4}$　　B.$\frac{7}{2}$　　C.$\frac{49}{4}$　　D.$\frac{49}{2}$

【答案】　C