

第十六讲 数列递推及通项应用

目录

题型 01 递推基础：等差数列定义型	1
题型 02 递推基础：等比数列定义型	2
题型 03 累加法求通项	3
题型 04 累加法求通项：裂项型	3
题型 05 累加法求通项：换元型	4
题型 06 累积法求通项	5
题型 07 待定系数型等比求通项	6
题型 08 分式型求通项	6
题型 09 不动点方程求通项	7
题型 10 前 n 项和型求通项	8
题型 11 前 n 项积型求通项	8
题型 12 因式分解型求通项	9
题型 13 同除型构造等差数列求通项	10
题型 14 同除型构造等比数列求通项	10
题型 15 周期数列求通项：分段型	11
题型 16 周期数列求通项：三阶型	11
题型 17 奇偶各自独立型求通项	12
高考练场	13

热点题型归纳

题型 01 递推基础：等差数列定义型

【解题攻略】

等差数列的判定方法

- ① 定义法：“欲证等差，直接作差”，即证 $a_{n+1} - a_n = \text{定值}$ ；
- ② 等差中项法：即证 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ ；
- ③ 函数结论法：即 a_n 为一次函数或 S_n 为无常数项的二次函数。

【典例 1-1】 (2024 上·山东威海·高三统考) 已知数列 $\{a_n\}$ ，对 $\forall m, n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $a_m + a_n = a_{m+n}$ ，且 $a_1 = 1$ ，则 $a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【典例 1-2】 (2024 上·天津·高三天津市第一百中学校联考期末) 在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 6$ ，且 $na_{n+1} - (n+2)a_n = n(n+1)(n+2)$ ，则 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【变式 1-1】 (2023 下·全国·高三校联考阶段练习) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 3(n \in \mathbf{N}^*)$ ，则 $\frac{a_3}{a_2} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\frac{a_1 - a_n}{a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【变式 1-2】 (2024 上·海南海口·高三海南中学校考) 在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_n > 0, a_1 = \frac{1}{2}, \frac{2}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n} = 1$ ，则 $a_9 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【变式 1-3】 (2023 上·四川成都·高三校联考阶段练习) 已知各项均不为 0 的数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{a_n + 1}$ ，且

$a_1 = \frac{1}{2}$, 则 $a_{2023} =$ _____.

题型 02 递推基础：等比数列定义型

【解题攻略】

等比数列的判定方法：

(1) 定义法：“欲证等比，直接作比”，即证 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q (q \neq 0 \text{ 的常数}) \Leftrightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列；

(2) 等比中项法：即证 $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1} (a_n a_{n+1} a_{n+2} \neq 0, n \in \mathbf{N}^*) \Leftrightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列.

【典例 1-1】(2023·河南郑州·统考二模) 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 2, S_{n+1}(S_{n+1} - 3^n) = S_n(S_n + 3^n)$, 则 $S_{2023} =$ ()

- A. $3^{2023} - 1$ B. $3^{2023} + 1$ C. $\frac{3^{2023} + 1}{2}$ D. $\frac{3^{2022} + 1}{2}$

【典例 1-2】(2022·吉林长春·长春吉大附中实验学校校考模拟预测) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意的 $m, n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_m a_n = a_{m+n}$, 且 $a_2 = 3$, 则 $a_{20} =$ ()

- A. 3^{20} B. $\pm 3^{20}$ C. 3^{10} D. $\pm 3^{10}$

【变式 1-1】. (2022 上·山东日照·高三统考) 正项数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{n+1} = ka_n$ (k 为常数), 若 $a_{2021} + a_{2022} + a_{2023} = 3$, 则 $a_{2021}^2 + a_{2022}^2 + a_{2023}^2$ 的取值范围是 ()

- A. $[3, 9)$ B. $[3, 9]$ C. $[3, 15)$ D. $[3, 15]$

【变式 1-2】(2022·陕西·校联考模拟预测) 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 数列 $\left\{\frac{1}{a_n} + 1\right\}$ 是公比为 2 的等比数列, 设 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则下列结论错误的是 ()

- A. $a_n = \frac{1}{2^n - 1}$ B. $a_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}$
 C. 数列 $\{a_n\}$ 为递减数列 D. $S_3 > \frac{7}{8}$

【变式 1-3】(2022·山西吕梁·统考一模) 已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_1 = 1, a_{n+1} + a_n = 3 \times 2^n$, 则 $S_{100} =$ ()

- A. $2^{100} - 3$ B. $2^{100} - 2$ C. $2^{101} - 3$ D. $2^{101} - 2$

题型 03 累加法求通项

【解题攻略】

对于递推公式为 $a_n - a_{n-1} = f(n)$, 一般利用累加法求出数列的通项公式:

【典例 1-1】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 10$, $\frac{a_{n+1} - a_n}{n} = 2$, 则 $\frac{a_n}{n}$ 的最小值为 ()

- A. $2\sqrt{10} - 1$ B. $\frac{11}{2}$ C. $\frac{16}{3}$ D. $\frac{27}{4}$

【典例 1-2】已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, n \geq 2$ 时, $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_n =$ _____.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/207142021036006060>