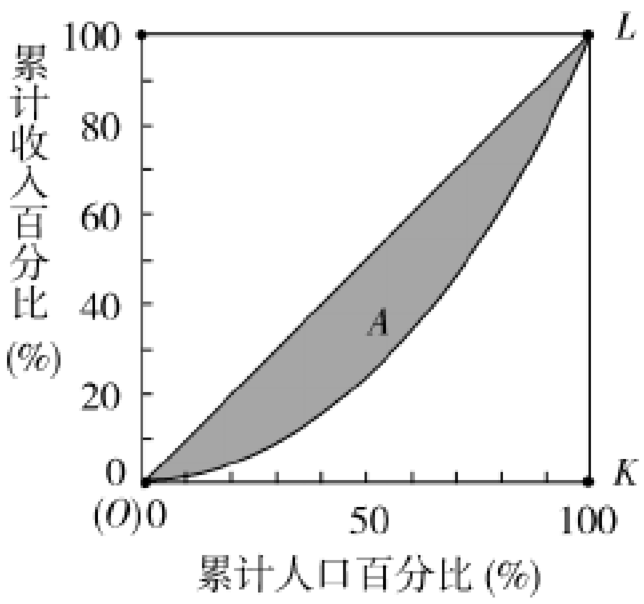
北京市第二十中学 2024 届下学期高三数学试题联考试卷

请考生注意：
1．请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0．5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2．答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．为了研究国民收入在国民之间的分配，避免贫富过分悬殊，美国统计学家劳伦茨提出了著名的劳伦茨曲线，如图所示.劳伦茨曲线为直线 OL 时，表示收入完全平等.劳伦茨曲线为折线 OKL 时，表示收入完全不平等.记区域 A 为不平等区域，a 表示其面积，S 为 $\triangle OKL$ 的面积，将 $\text{Gini}=\dfrac{a}{S}$ 称为基尼系数.



对于下列说法：

①Gini 越小，则国民分配越公平；

②设劳伦茨曲线对应的函数为 $y=f(x)$，则对 $\forall x\in(0,1)$，均有 $\dfrac{f(x)}{x}>1$；

③若某国家某年的劳伦茨曲线近似为 $y=x^2(x\in[0,1])$，则 $\text{Gini}=\dfrac{1}{4}$；

④若某国家某年的劳伦茨曲线近似为 $y=x^3(x\in[0,1])$，则 $\text{Gini}=\dfrac{1}{2}$.

其中正确的是：

A．①④　　**B**．②③　　**C**．①③④　　**D**．①②④

2．已知四棱锥 $S-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，$AD//BC$，$\angle BAD=120^\circ$，ΔSAD 是等边三角形，且 $SA=AB=2\sqrt{3}$；若点 P 在四棱锥 $S-ABCD$ 的外接球面上运动，记点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 d，若平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$，则 d 的最大值为（　　）

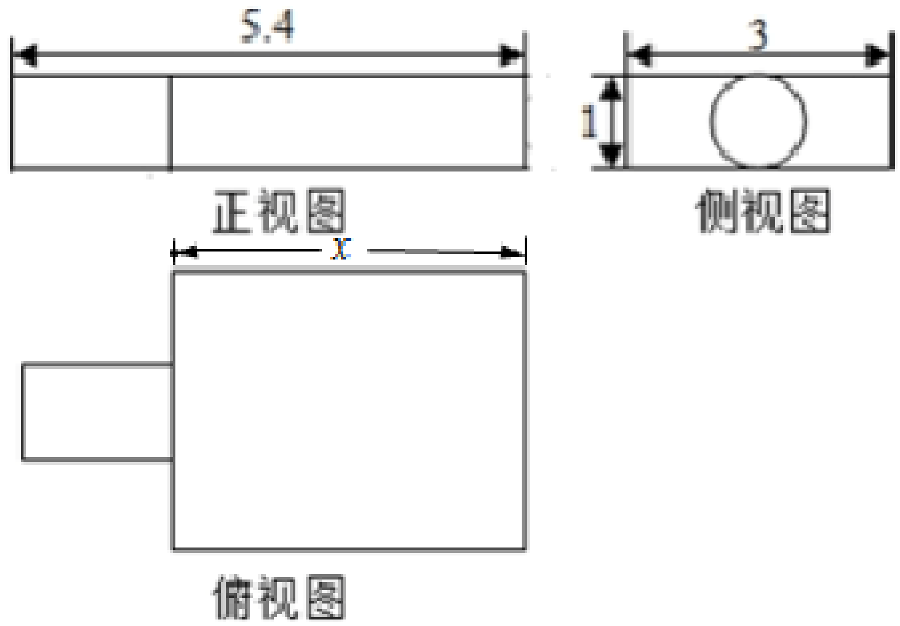
A．$\sqrt{13}+1$　　**B**．$\sqrt{13}+2$

C．$\sqrt{15}+1$　　**D**．$\sqrt{15}+2$

3．已知定义在$[0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足$f(x)=\frac{1}{2}f(x+2)$，且当$x\in[0,2)$时，$f(x)=-x^2+2x$.设$f(x)$在$[2n-2,2n)$上的最大值为a_n（$n\in N^*$），且数列$\{a_n\}$的前n项的和为S_n.若对于任意正整数n不等式$k(S_n+1)\geq 2n-9$恒成立，则实数k的取值范围为（　　）

A．$[0,+\infty)$　　**B．**$\left[\frac{1}{32},+\infty\right)$　　**C．**$\left[\frac{3}{64},+\infty\right)$　　**D．**$\left[\frac{7}{64},+\infty\right)$

4．中国古代数学名著《九章算术》中记载了公元前**344**年商鞅督造的一种标准量器——商鞅铜方升，其三视图如图所示（单位：寸），若π取**3**，当该量器口密闭时其表面积为**42.2**（平方寸），则图中x的值为(　　)



A．3　　**B．3.4**　　**C．3.8**　　**D．4**

5．若复数$z=(2+i)(1+i)$（i是虚数单位），则复数z在复平面内对应的点位于（　　）

A．第一象限　　**B．**第二象限　　**C．**第三象限　　**D．**第四象限

6．已知盒中有**3**个红球，**3**个黄球，**3**个白球，且每种颜色的三个球均按A，B，C编号，现从中摸出**3**个球（除颜色与编号外球没有区别），则恰好不同时包含字母A，B，C的概率为（　　）

A．$\frac{17}{21}$　　**B．**$\frac{19}{28}$　　**C．**$\frac{7}{9}$　　**D．**$\frac{23}{28}$

7．已知函数$f(x)=\begin{cases}0,x<1\\ \ln x,x\geq 1\end{cases}$，若不等式$f(x)\leq|x-k|$对任意的$x\in\mathbf{R}$恒成立，则实数$\boldsymbol{k}$的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,1]$　　**B．**$[1,+\infty)$　　**C．**$[0,1)$　　**D．**$(-1,0]$

8．定义$a\otimes b=\begin{cases}a, & a\geq b\\ b, & a<b\end{cases}$，已知函数$f(x)=\frac{1}{2-\sin^2 x}$，$g(x)=\frac{1}{2-\cos^2 x}$，则函数$F(x)=f(x)\otimes g(x)$的最小值为（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　**B．**1　　**C．**$\frac{4}{3}$　　**D．**2

9．已知复数$z=\frac{2i}{1-i}$，则z的共轭复数在复平面对应的点位于（　　）

A．第一象限　　　　**B**．第二象限　　　　**C**．第三象限　　　　**D**．第四象限

10．在ΔABC中，$C=30^\circ$，$\cos A=-\dfrac{2}{3}$，$AC=\sqrt{15}-2$，则AC边上的高为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　　　**B**．**2**　　　　**C**．$\sqrt{5}$　　　　**D**．$\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

11．已知复数$z=1-i$，$\bar{z}$为z的共轭复数，则$\dfrac{1+z}{\bar{z}}=$（　　）

A．$\dfrac{3+i}{2}$　　　　**B**．$\dfrac{1+i}{2}$　　　　**C**．$\dfrac{1-3i}{2}$　　　　**D**．$\dfrac{1+3i}{2}$

12．已知直线$l:x+m^2y=0$与直线$n:x+y+m=0$则"$l//n$"是"$m=1$"的（　　）

A．充分不必要条件　　　　**B**．必要不充分条件

C．充分必要条件　　　　**D**．既不充分也不必要条件

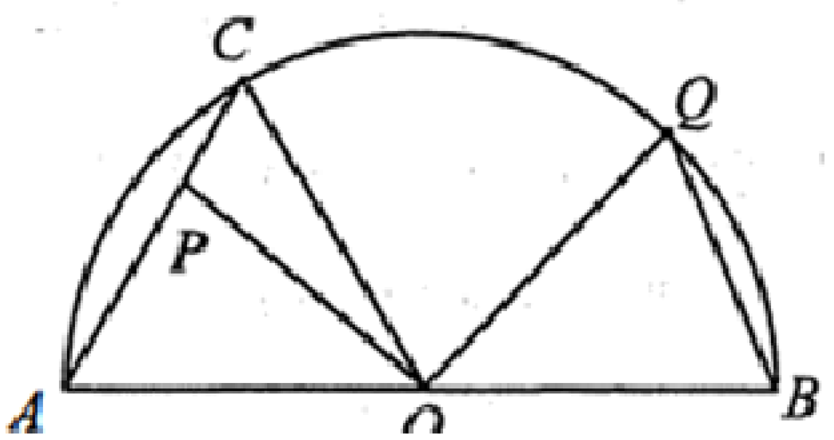
二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1+a_3=\dfrac{5}{2}$，且$a_2+a_4=\dfrac{5}{4}$，则$\dfrac{S_6}{a_6}=$__________.

14．等边ΔABC的边长为**2**，则$\overline{AB}$在$\overline{BC}$方向上的投影为________.

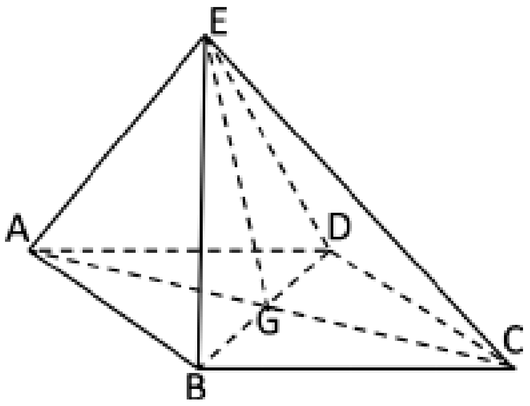
15．在平面直角坐标系xOy中，点P在直线$y=2x$上，过点P作圆C：$(x-4)^2+y^2=8$的一条切线，切点为T.若$PT=PO$，则PC的长是______.

16．如图，已知半圆O的直径$AB=8$，点P是弦AC（包含端点A，C）上的动点，点Q在弧BC上．若ΔOAC是等边三角形，且满足$\overline{OQ}\cdot\overline{OP}=0$，则$\overline{OP}\cdot\overline{BQ}$的最小值为__________.



三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12分）如图，四边形$ABCD$为菱形，G为AC与BD的交点，$BE\perp$平面$ABCD$.



（1）证明：平面 $AEC\perp$ 平面 BED；

（2）若 $\angle BAD=60^\circ$，$AE\perp EC$，三棱锥 $E-ACD$ 的体积为 $\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$，求菱形 $ABCD$ 的边长.

18.（12 分）已知椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点分别为 F_1 和 F_2，右顶点为 A，且 $\left|AF_1\right|=3$，短轴长为 $2\sqrt{3}$.

（1）求椭圆 E 的方程;

（2）若过点 A 作垂直 x 轴的直线 l，点 T 为直线 l 上纵坐标不为零的任意一点，过 F_2 作 TF_2 的垂线交椭圆 E 于点 P 和 Q，当 $\dfrac{\left|TF_2\right|}{|PQ|}=\dfrac{7\sqrt{2}}{24}$ 时，求此时四边形 TPF_1Q 的面积.

19.（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}t,\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+2,\end{cases}$（$t$ 为参数），在以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴，且与直角坐标系长度单位相同的极坐标系中，曲线 C 的极坐标方程是 $\rho=4\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)$.

（1）求直线 l 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程;

（2）若直线 l 与曲线 C 相交于两点 A，B，求线段 AB 的长.

20.（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=\left(x-2\right)e^x-a\left(x-1\right)^2$,其中 $a\in\mathbf{R}$, $g\left(x\right)=x-\ln x$.

(1)函数 $f\left(x\right)$ 的图象能否与 x 轴相切?若能,求出实数 a;若不能,请说明理由.

(2)若 $h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处取得极大值,求实数 a 的取值范围.

21.（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=ax+\ln x(a\in R)$ 有两个零点 x_1,x_2.

(1)求 a 的取值范围;

(2)是否存在实数 λ， 对于符合题意的任意 x_1,x_2，当 $x_0=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2>0$ 时均有 $f'\left(x\right)<0$？

若存在，求出所有 λ 的值；若不存在，请说明理由.

22．（10 分）若函数 $f\left(x\right)$ 在 x_0 处有极值，且 $f\left(x_0\right)=x_0$，则称 x_0 为函数 $f\left(x\right)$ 的“**F** 点”**.**

（**1**）设函数 $f\left(x\right)=kx^2-2\ln x$（$k\in\mathbf{R}$）**.**

①当 $k=1$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 的极值；

②若函数 $f\left(x\right)$ 存在“**F** 点”，求 ***k*** 的值；

（**2**）已知函数 $g\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx$（***a***，***b***，$c\in\mathbf{R}$，$a\neq 0$）存在两个不相等的“**F** 点”$x_1$，$x_2$，且 $\left|g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)\right|\geq 1$，求 ***a*** 的取值范围**.**

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．**A**

【解题分析】

对于①，根据基尼系数公式 $\text{Gini}=\dfrac{a}{S}$，可得基尼系数越小，不平等区域的面积 a 越小，国民分配越公平，所以①正确**.** 对于②，根据劳伦茨曲线为一条凹向横轴的曲线，由图得 $\forall x\in(0,1)$，均有 $f(x)<x$，可得 $\dfrac{f(x)}{x}<1$，所以②错误**.**对于③，因为 $a=\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x=(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3)|_0^1=\dfrac{1}{6}$，所以 $\text{Gini}=\dfrac{a}{S}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$，所以③错误**.**对于④，因为

$a=\int_0^1(x-x^3)\mathrm{d}x=(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{4}x^4)|_0^1=\dfrac{1}{4}$，所以 $\text{Gini}=\dfrac{a}{S}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$，所以④正确**.**故选 **A**.

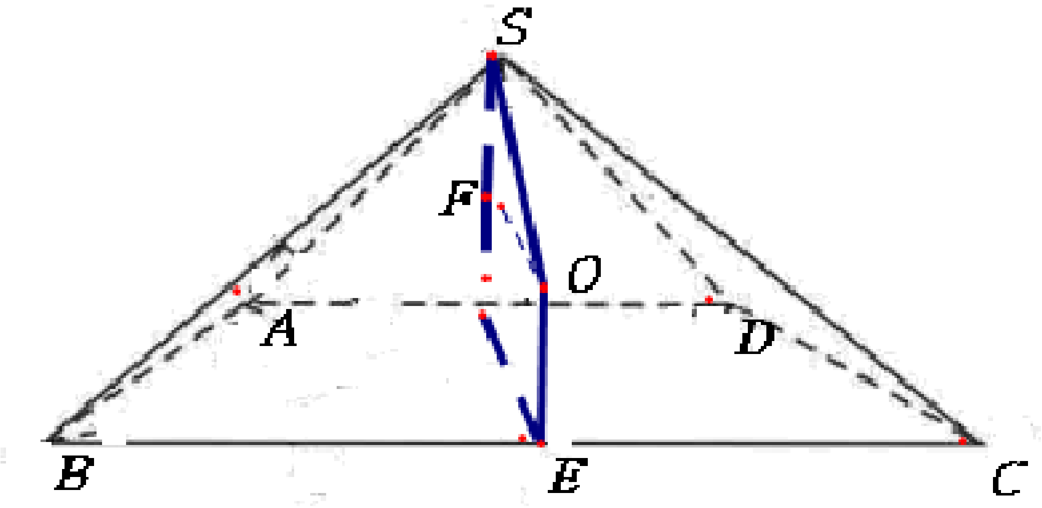
2．**A**

【解题分析】

根据平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，则球心在过 BC 的中点 E 的面的垂线上，又 ΔSAD 是等边三角形，所以球心也在过 ΔSAD 的外心 F 面的垂线上，从而找到球心，再根据已知量求解即可**.**

【题目详解】

依题意如图所示：



取 BC 的中点 E，则 E 是等腰梯形 $ABCD$ 外接圆的圆心，

取 F 是 ΔSAD 的外心，作 $OE \perp$ 平面 $ABCD, OF \perp$ 平面 SAB，

则 O 是四棱锥 $S-ABCD$ 的外接球球心，且 $OF=3, SF=2$，

设四棱锥 $S-ABCD$ 的外接球半径为 R，则 $R^2=SF^2+OF^2=13$，而 $OE=1$，

所以 $d_{\max}=R+OE=\sqrt{13}+1$，

故选：**A.**

【题目点拨】

本题考查组合体、球，还考查空间想象能力以及数形结合的思想，属于难题.

3．**C**

【解题分析】

由已知先求出 $f(x)_{\max}=2^{n-1}$，即 $a_n=2^{n-1}$，进一步可得 $S_n=2^n-1$，再将所求问题转化为 $k \geq \dfrac{2n-9}{2^n}$ 对于任意正整数 n 恒成立，设 $c_n=\dfrac{2n-9}{2^n}$，只需找到数列 $\{c_n\}$ 的最大值即可.

【题目详解】

当 $2n-2 \leq x < 2n$ 时，则 $0 \leq x+2-2n < 2$，$f(x+2-2n)=-(x+2-2n)(x-2n)$，

所以，$f(x)=2^{n-1}f[x-2(n-1)]=-2^{n-1}(x+2-2n)(x-2n)$，显然当 $x=2n-1$ 时，

$f(x)_{\max}=2^{n-1}$，故 $a_n=2^{n-1}$，$S_n=\dfrac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$，若对于任意正整数 n 不等式 $k\left(S_n+1\right) \geq 2n-9$ 恒成立，即 $k2^n \geq 2n-9$ 对于任意正整数 n 恒成立，即 $k \geq \dfrac{2n-9}{2^n}$ 对于任意正整数 n 恒成立，设 $c_n=\dfrac{2n-9}{2^n}$，$c_{n+1}-c_n=\dfrac{11-2n}{2^{n+1}}$，令 $\dfrac{11-2n}{2^{n+1}}>0$，解得 $n<\dfrac{11}{2}$，

令 $\dfrac{11-2n}{2^{n+1}}<0$，解得 $n>\dfrac{11}{2}$，考虑到 $n \in N^*$，故有当 $n \leq 5$ 时，$\{c_n\}$ 单调递增，

当$n \geq 6$时，有$\{c_n\}$单调递减，故数列$\{c_n\}$的最大值为$c_6 = \frac{3}{2^6} = \frac{3}{64}$，

所以$k \geq \frac{3}{64}$.

故选：**C.**

【题目点拨】

本题考查数列中的不等式恒成立问题，涉及到求函数解析、等比数列前 n 项和、数列单调性的判断等知识，是一道较为综合的数列题.

4．**D**

【解题分析】

根据三视图即可求得几何体表面积，即可解得未知数.

【题目详解】

由图可知，该几何体是由一个长宽高分别为$x,3,1$和

一个底面半径为$\frac{1}{2}$，高为$5.4-x$的圆柱组合而成.

该几何体的表面积为

$2(x+3x+3)+\pi\cdot(5.4-x)=42.2$，

解得$x=4$，

故选：**D.**

【题目点拨】

本题考查由三视图还原几何体，以及圆柱和长方体表面积的求解，属综合基础题.

5．**A**

【解题分析】

将z 整理成$a+bi$的形式，得到复数所对应的的点，从而可选出所在象限.

【题目详解】

解：$z=(2+i)(1+i)=2+i^2+3i=1+3i$，所以$z$所对应的点为$(1,3)$在第一象限

故选**:A.**

【题目点拨】

本题考查了复数的乘法运算，考查了复数对应的坐标.易错点是误把i^2 当成1进行计算.

6．**B**

【解题分析】

首先求出基本事件总数，则事件“恰好不同时包含字母A，B，C”的对立事件为“取出的 **3** 个球的编号恰好为字母A，

B，C”， 记事件“恰好不同时包含字母A，B，C”为E，利用对立事件的概率公式计算可得；

【题目详解】

解：从**9**个球中摸出**3**个球，则基本事件总数为$C_9^3=84$（个），

则事件“恰好不同时包含字母A，B，C”的对立事件为“取出的**3**个球的编号恰好为字母A，B，C”

记事件“恰好不同时包含字母A，B，C”为E，则$P(E)=1-\frac{3^3}{C_9^3}=\frac{19}{28}$.

故选：**B**

【题目点拨】

本题考查了古典概型及其概率计算公式，考查了排列组合的知识，解答的关键在于正确理解题意，属于基础题.

7．**A**

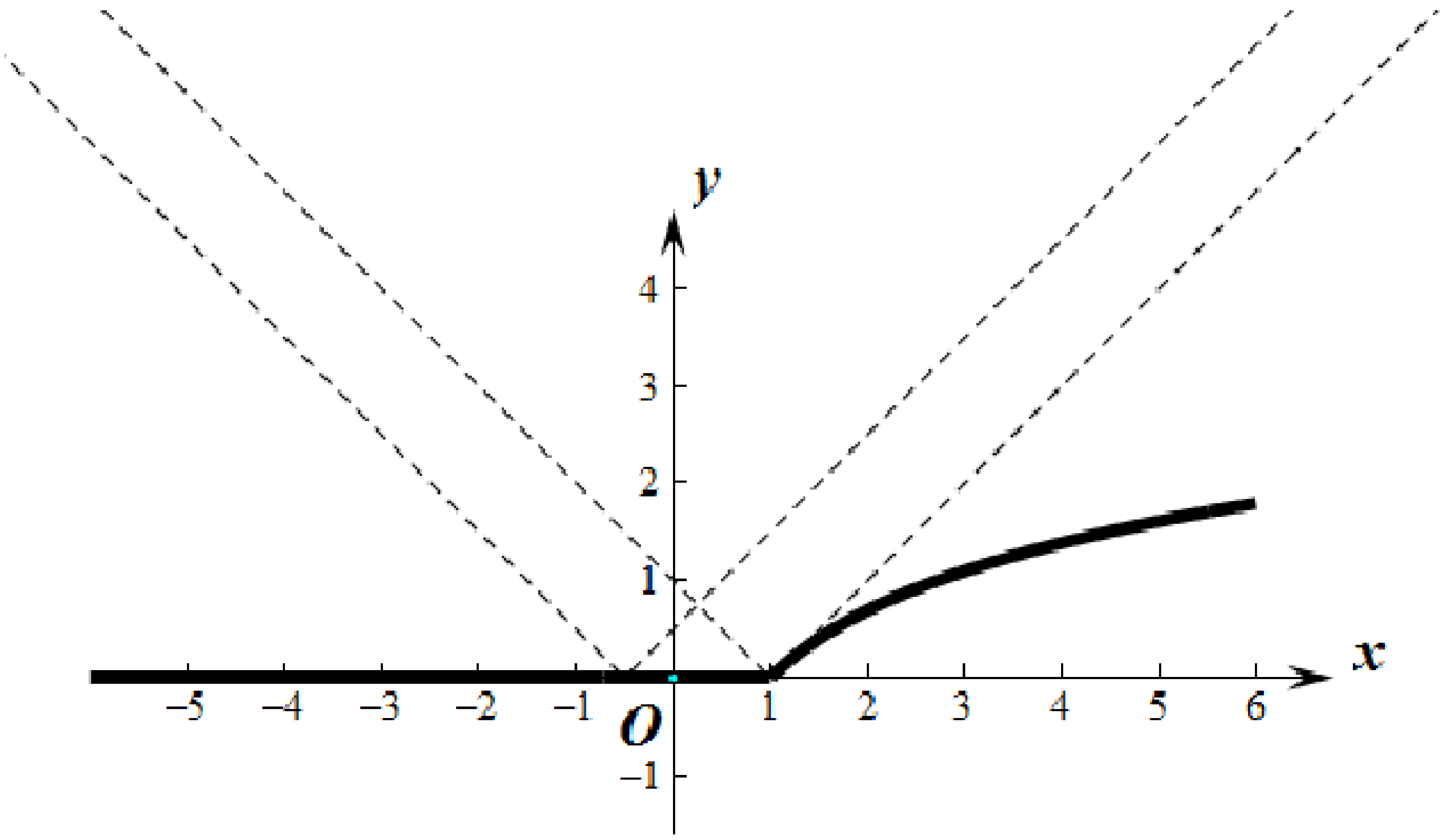
【解题分析】

先求出函数$f\left(x\right)$在$(1,0)$处的切线方程，在同一直角坐标系内画出函数$f\left(x\right)=\begin{cases}0, x<1\\ \ln x, x\ge 1\end{cases}$和$g(x)=|x-k|$的图象，利用数形结合进行求解即可.

【题目详解】

当$x\ge 1$时，$f\left(x\right)=\ln x,\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f'(1)=1$，所以函数 $f\left(x\right)$在$(1,0)$处的切线方程为：$y=x-1$，令$g(x)=|x-k|$，它与横轴的交点坐标为$(k,0)$.

在同一直角坐标系内画出函数$f\left(x\right)=\begin{cases}0, x<1\\ \ln x, x\ge 1\end{cases}$和$g(x)=|x-k|$的图象如下图的所示：



利用数形结合思想可知：不等式$f\left(x\right)\le\left|x-k\right|$对任意的$x\in\mathbf{R}$恒成立，则实数$\boldsymbol{k}$的取值范围是$k\le 1$.

故选：**A**

【题目点拨】

本题考查了利用数形结合思想解决不等式恒成立问题，考查了导数的应用，属于中档题.

8．**A**

【解题分析】

根据分段函数的定义得$F(x)\ge f(x)$，$F(x)\ge g(x)$，则$2F(x)\ge f(x)+g(x)$,再根据基本不等式构造出相应的所需的形式，可求得函数的最小值.

【题目详解】

依题意得$F(x)\ge f(x)$，$F(x)\ge g(x)$，则$2F(x)\ge f(x)+g(x)$,

$$f(x)+g(x)=\frac{1}{2-\sin^2 x}+\frac{1}{2-\cos^2 x}=\frac{1}{3}(\frac{1}{2-\sin^2 x}+\frac{1}{2-\cos^2 x})[(2-\sin^2 x)+(2-\cos^2 x)]$$

$=\frac{1}{3}(2+\frac{2-\cos^2 x}{2-\sin^2 x}+\frac{2-\sin^2 x}{2-\cos^2 x})\ge\frac{1}{3}(2+2\sqrt{\frac{2-\cos^2 x}{2-\sin^2 x}\cdot\frac{2-\sin^2 x}{2-\cos^2 x}})=\frac{4}{3}$(当且仅当$\frac{2-\cos^2 x}{2-\sin^2 x}=\frac{2-\sin^2 x}{2-\cos^2 x}$，即$\sin^2 x=\cos^2 x=\frac{1}{2}$时“＝”成立.此时,$f(x)=g(x)=\frac{2}{3}$，$\therefore 2F(x)\ge\frac{4}{3}$，$\therefore F(x)$的最小值为$\frac{2}{3}$，

故选：**A.**

【题目点拨】

本题考查求分段函数的最值，关键在于根据分段函数的定义得出$2F(x)\ge f(x)+g(x)$，再由基本不等式求得最值，属于中档题.

9．**C**

【解题分析】

分析：根据复数的运算，求得复数z，再利用复数的表示，即可得到复数对应的点，得到答案.

详解：由题意，复数$z=\frac{2i}{1-i}=\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-1+i$，则$\bar{z}=-1-i$

所以复数$\bar{z}$在复平面内对应的点的坐标为$(-1,-1)$，位于复平面内的第三象限，故选**C**.

点睛：本题主要考查了复数的四则运算及复数的表示，其中根据复数的四则运算求解复数z是解答的关键，着重考查了推理与运算能力.

10．**C**

【解题分析】

结合正弦定理、三角形的内角和定理、两角和的正弦公式，求得BC边长，由此求得AC边上的高.

【题目详解】

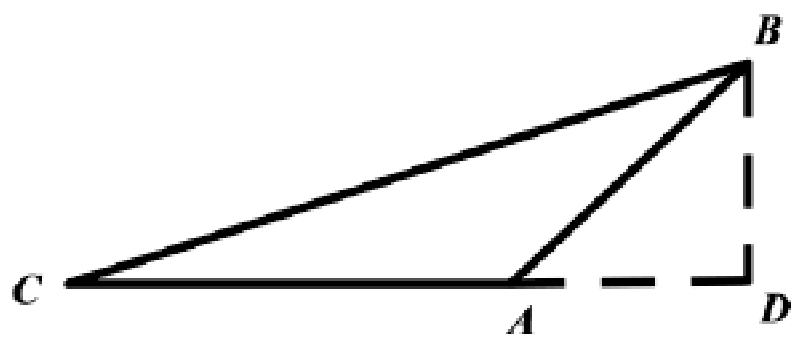
过 B 作 $BD \perp CA$，交 CA 的延长线于 D.由于 $\cos A=-\frac{2}{3}$，所以 A 为钝角，且 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，所以

$\sin\angle CBA=\sin(\pi-\angle CBA)=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{15}-2}{6}$.在三角形

ABC 中，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即 $\frac{BC}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{\sqrt{15}-2}{\frac{\sqrt{15}-2}{6}}$，所以 $BC=2\sqrt{5}$.在 $Rt\Delta BCD$ 中有

$BD=BC\sin C=2\sqrt{5}\times\frac{1}{2}=\sqrt{5}$，即 AC 边上的高为 $\sqrt{5}$.

故选：**C**



【题目点拨】

本小题主要考查正弦定理解三角形，考查三角形的内角和定理、两角和的正弦公式，属于中档题.

11．**C**

【解题分析】

求出 $\overline{z}$，直接由复数的代数形式的乘除运算化简复数.

【题目详解】

$\frac{1+z}{\overline{z}}=\frac{2-i}{1+i}=\frac{1-3i}{2}$.

故选：**C**

【题目点拨】

本题考查复数的代数形式的四则运算，共轭复数，属于基础题.

12．**B**

【解题分析】

利用充分必要条件的定义可判断两个条件之间的关系.

【题目详解】

若 $l//n$，则 $1\times1=m^2\times1$，故 $m=1$ 或 $m=-1$，

当 $m=1$ 时，直线 $l:x+y=0$，直线 $n:x+y+1=0$ ，此时两条直线平行；

当$m=-1$时，直线$l:x+y=0$，直线$n:x+y-1=0$，此时两条直线平行.

所以当$l//n$时，推不出$m=1$，故“$l//n$”是“$m=1$”的不充分条件，

当$m=1$时，可以推出$l//n$，故“$l//n$”是“$m=1$”的必要条件，

故选：**B.**

【题目点拨】

本题考查两条直线的位置关系以及必要不充分条件的判断，前者应根据系数关系来考虑，后者依据两个条件之间的推出关系，本题属于中档题.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．63

【解题分析】

由题意知$q=\frac{a_2+a_4}{a_1+a_3}=\frac{1}{2}$，继而利用等比数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$的公式代入求值即可.

【题目详解】

解：由题意知$q=\frac{a_2+a_4}{a_1+a_3}=\frac{1}{2}$，所以$\frac{S_6}{a_6}=\frac{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}}{a_1q^5}=\frac{1-q^6}{q^5(1-q)}=\frac{1-(\frac{1}{2})^6}{(\frac{1}{2})^6}=63$.

故答案为：63.

【题目点拨】

本题考查了等比数列的通项公式和求和公式，属于中档题.

14．-1

【解题分析】

建立直角坐标系，结合向量的坐标运算求解$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{BC}$方向上的投影即可.

【题目详解】

建立如图所示的平面直角坐标系，由题意可知：$A(0,0)$，$B(2,0)$，$C(1,\sqrt{3})$，

则：$\overrightarrow{AB}=(2,0)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-2$

且$|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{10}$，

据此可知$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{BC}$方向上的投影为$\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{-2}{2}=-1$.