# 重庆市第八中学校2023-2024学年高一下学期期中考试数学试题

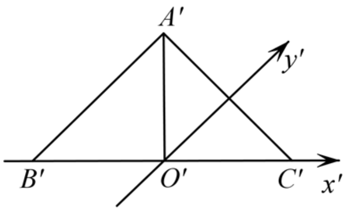
学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

## 一、单选题

1．已知i为虚数单位，复数$z$满足$z(1-\mathrm{i})^2=2$，则$z^{2024}=$（　）

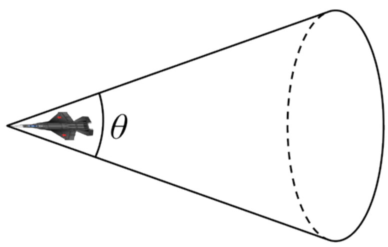
A．$-1$　　B．1　　C．$-\mathrm{i}$　　D．i

2．用斜二测画法画水平放置的V$ABC$的直观图，得到如图所示的等腰直角三角形$A'B'C'$．已知点$O'$是斜边$B'C'$的中点，且$O'A'=2$，则$\triangle ABC$的面积为（　）




A．$4\sqrt{2}$　　B．$8\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D．$6\sqrt{2}$

3．当飞机超音速飞行时，声波会形成一个以飞机前端为顶点，飞机的飞行方向为轴的圆锥（如图），称为“马赫锥”.马赫锥的轴截面顶角$\theta$与飞机的速度$v$、音速$c$满足关系式$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{c}{v}$.若一架飞机以2倍音速沿直线飞行，则该飞机形成的马赫锥在距离顶点30m处的截面圆面积为（　）



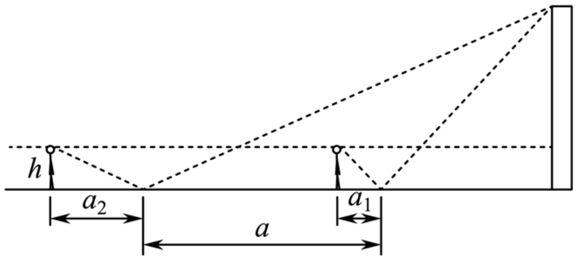

A．$100\pi\mathrm{m}^2$　　B．$300\pi\mathrm{m}^2$　　C．$600\pi\mathrm{m}^2$　　D．$900\pi\mathrm{m}^2$

4．在$\triangle ABC$中，$AB=3$，$BC=4$，$\angle B=60^\circ$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$（　）

A．12　　B．6　　C．$-6$　　D．$-12$

5．某班课外学习小组利用“镜面反射法”来测量学校内建筑物的高度.步骤如下：①将镜子（平面镜）置于平地上，人后退至从镜中能看到房顶的位置，测量出人与镜子的距离；②将镜子后移，重复①中的操作；③求建筑物高度.如图所示，前后两次人与镜子的距离分别

$a_1\text{m}, a_2\text{m}\left(a_2 > a_1\right)$，两次观测时镜子间的距离为$a$m，人的“眼高”为$h$m，则建筑物的高度为（　　）




A．$\dfrac{ah}{a_2-a_1}$m　　B．$\dfrac{\left(a_2-a_1\right)h}{a}$m　　C．$\dfrac{a\left(a_2-a_1\right)}{h}$m　　D．$\dfrac{ah^2}{a_2-a_1}$m

6．在$\triangle ABC$中，$AD$为$BC$边上的中线，$2\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ED}$，则$\overrightarrow{BE}=$（　　）

A．$-\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$　　B．$-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AC}$

C．$-\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$　　D．$-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AC}$

7．已知$\omega>0$，函数$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$满足$f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=-f\left(x\right)$，且在区间$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$上单调，则$\omega$为（　　）

A．$\dfrac{4}{3}$　　B．$\dfrac{8}{3}$　　C．4　　D．$\dfrac{20}{3}$

8．在锐角$\triangle ABC$中，角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，$S$为$\triangle ABC$的面积，且$3S=a^2-\left(b-c\right)^2$，则$\dfrac{b}{c}$的取值范围为（　　）

A．$\left(\dfrac{7}{25},\dfrac{25}{7}\right)$　　B．$\left(\dfrac{7}{25},+\infty\right)$　　C．$\left(\dfrac{24}{25},\dfrac{25}{24}\right)$　　D．$\left(\dfrac{24}{25},+\infty\right)$

## 二、多选题

9．用一个平面去截一个三棱柱，可以得到的几何体是（　　）

A．四棱台　　B．四棱柱　　C．三棱柱　　D．三棱锥

10．设$z_1$，$z_2$为复数，则下列结论中正确的是（　　）

A．$\left|z_1z_2\right|=\left|z_1\overline{z_2}\right|$

B．$\left|z_1-z_2\right|\le\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$

C．若$\dfrac{1}{z_1}$为虚数，则$z_1$也为虚数

D．若$\left|z_1+\mathrm{i}\right|=1$，则$\left|z_1\right|$的最大值为$\sqrt{2}$

11．在$\triangle ABC$中，$a$，$b$，$c$分别是角$A$，$B$，$C$的对边，其外接圆半径为$R$，内切圆半径为$r=1$，满足$a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{R}{3}$，$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}=3$，则（　）

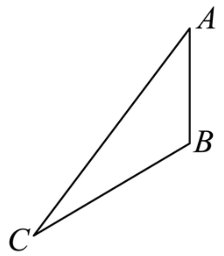
A．$a+b+c=6$　　B．$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\frac{1}{6}$

C．$R=2\sqrt{2}$　　D．$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$

## 三、填空题

12．已知$\vec{a}$，$\vec{b}$是两个不共线的向量，若$\vec{m}=\vec{a}-k\vec{b}$与$\vec{n}=2\vec{a}+3\vec{b}$共线，则实数$k$的值为_____.

13．如图所示，已知$AB=6$，$BC=10$，$\angle ABC=120^\circ$，将这个三角形以$AB$所在直线为轴旋转$180^\circ$得到一个几何体，则该几何体的表面积为_________.




14．在$\triangle ABC$中，$16b=21c$，$A=60^\circ$，其内切圆半径为$\sqrt{3}$，则其外接圆半径为_________.

## 四、解答题

15．已知$f\left(x\right)=\left(a^2-2a-2\right)\cdot a^x+b-9$（$a>0$且$a\neq 1$）是指数函数.

(1)求关于$x$的不等式$f\left(\log_{0.5}\left(x-a\right)+b-2a\right)>3$的解集；

(2)函数$F\left(x\right)=f\left(2x\right)-4f\left(x\right)-2$在区间$\left[-1,2\right)$上的值域.

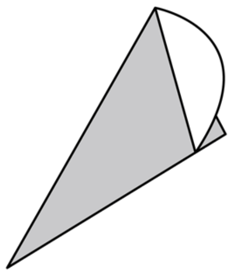
16．在直角梯形$ABCD$中，已知$AB//DC$，$AD\perp AB$，$CD=1$，$AD=2$，$AB=3$，动点$E$，$F$分别在线段$BC$和$DC$上，线段$AE$和$BF$相交于点$M$，且$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DF}=\left(1-\lambda\right)\overrightarrow{DC}$，$\lambda\in\mathrm{R}$.

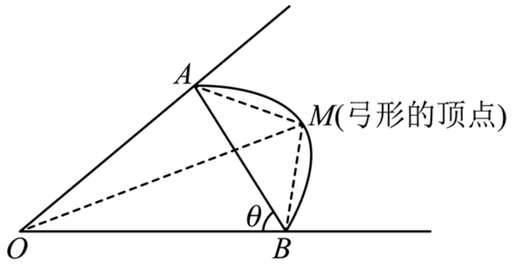
(1)当$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=-3$时，求$\lambda$的值；

(2)当$\lambda=\frac{2}{3}$时，求$\frac{FM}{MB}$的值；

17．重庆是我国著名的“火炉”城市之一，如图，重庆某避暑山庄$O$

为吸引游客，准备在门前两条小路 $OA$ 和 $OB$ 之间修建一处弓形花园，使之有着类似“冰淇淋”般的凉爽感，已知 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{4}$，弓形花园的弦长 $AB=2\sqrt{2}$，记弓形花园的顶点为 $M,\angle MAB=\angle MBA=\dfrac{\pi}{4}$，设 $\angle OBA=\theta\left(\theta\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.


“冰淇淋”设计图




(1)将 $|OA|,|OB|$ 用含有 $\theta$ 的关系式表示出来；

(2)该山庄准备在 $M$ 点处修建喷泉，为获取更好的观景视野，如何设计 $OA,OB$ 的长度，才使得喷泉 $M$ 与山庄 $O$ 的距离的值最大？

18．已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)-1$（$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$）的图像两相邻对称轴之间的距离是 $\dfrac{\pi}{2}$，若将 $f(x)$ 的图像上每个点先向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度，所得函数 $g(x)$ 为偶函数.

(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)若对任意 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$，$\left[f(x)\right]^2-(2+m)f(x)+2+m\le 0$ 恒成立，求实数 $m$ 的取值范围；

(3)若函数 $h(x)=2f(x)+1$ 的图像在区间 $[a,b]$（$a$，$b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$）至少有 10 个零点，在所有满足条件的区间 $[a,b]$ 中，求 $b-a$ 的最小值.

19．已知 $a,b,c$ 分别是 $\triangle ABC$ 对边，且 $\dfrac{\cos A}{2\cos B}=\sin\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)$. 点 $P$ 为三角形内部一点，且满足 $\angle BPA=\angle APC=\angle CPB=120^\circ$.

(1)求角 $B$；

(2)若 $b^2-(a-c)^2=6$，求 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$ 的值；

(3)若 $b=\sqrt{3}$，求 $|PA|-|PB|+|PC|$ 的最小值.

## 参考答案：

1．B

【分析】根据复数的运算性质即可求解.

【详解】由题意，$z(1-\mathrm{i})^2=2$，

可得$z=\frac{2}{(1-\mathrm{i})^2}=\frac{2}{1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}=-\frac{1}{\mathrm{i}}=\mathrm{i}$，

则$z^{2024}=\mathrm{i}^{2024}=\mathrm{i}^4=1$.

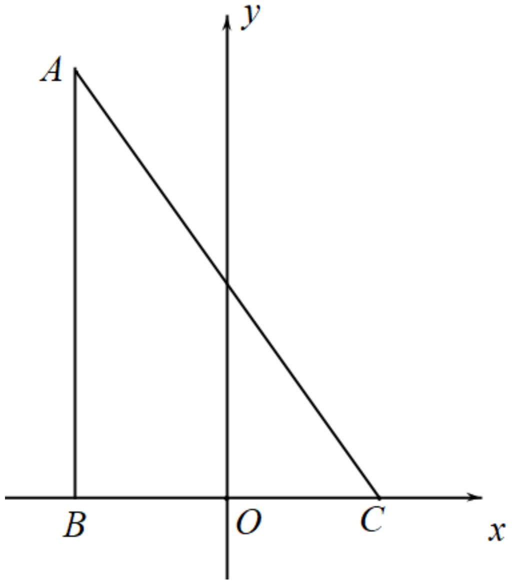
故选：B

2．B

【分析】根据斜二测画法，即直观图中平行于$x$轴的长度不变，平行于$y$轴的长度变为原来的一半，根据题中所给的数据以及图形，可知角形$ABC$为直角三角形，$\angle ABC=90°$，$BC=4$，$AB=4\sqrt{2}$，由此即可求出结果.

【详解】因为$\triangle A'B'C'$为等腰直角三角形且$O'A'=2$，所以$B'C'=4$，$A'B'=2\sqrt{2}$，

由斜二测画法可知$BC=4$，$AB=4\sqrt{2}$，且三角形$ABC$为直角三角形，$\angle ABC=90°$，



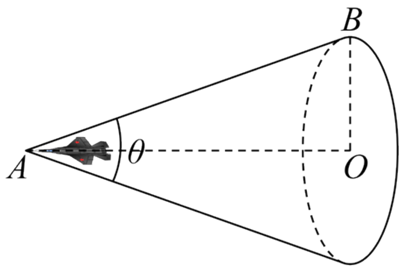

所以三角形$ABC$的面积为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.

故选：B.

3．B

【分析】作出半轴截面，解直角三角形得底面圆半径，进而即可得解.

【详解】如图所示：




该飞机形成的马赫锥在距离顶点$30\text{m}$处的截面圆圆心为$O$，$AB$为马赫锥的母线，

由题意$\sin\angle BAO=\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{c}{v}=\dfrac{c}{2c}=\dfrac{1}{2}$，

而$\angle BAO$是锐角，所以$\angle BAO=30^\circ$，

又$AO=30\text{m}$，所以$BO=AO\cdot\tan 30^\circ=10\sqrt{3}\text{m}$，

该飞机形成的马赫锥在距离顶点$30\text{m}$处的截面圆面积为$\pi\times\left(10\sqrt{3}\right)^2=300\pi\text{m}^2$.

故选：B.

4．C

【分析】利用向量数量积的定义求解.

【详解】$\triangle ABC$中，$AB=3$，$BC=4$，$\angle B=60^\circ$，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角为角$B$的补角，

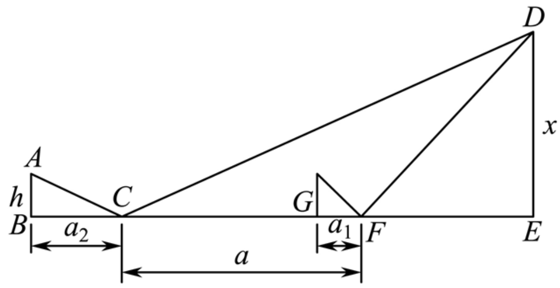
则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right\rangle=AB\cdot BC\cdot\cos 120^\circ=-6$.

故选：C

5．A

【分析】由相似三角形即可得到答案.

【详解】




设建筑物的高度为$x$，由于$\triangle HGF \sim \triangle DEF$得

$$\frac{HG}{DE}=\frac{GF}{EF}\Rightarrow EF=\frac{DE\cdot GF}{HG}=\frac{xa_1}{h}$$

由于$\triangle ABC \sim \triangle DEF$得

$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{CE}\Rightarrow\frac{h}{x}=\frac{a_2}{a+\frac{xa_1}{h}}$$

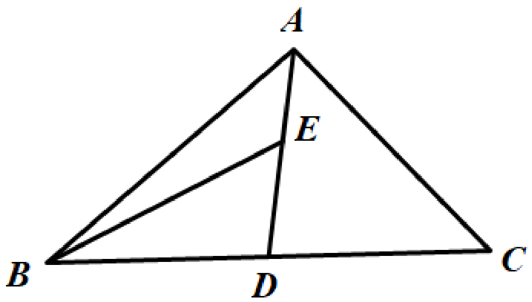
$$\Rightarrow ha+xa_1=xa_2\Rightarrow x\left(a_1-a_2\right)=-ha\Rightarrow x=\frac{ah}{a_2-a_1}$$

故选：A.

6．A

【分析】根据图形的几何性质，以及向量加减法、数乘运算的几何意义，即可得出答案.

【详解】




因为$2\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ED}$，所以$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

由已知可得，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，

所以，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，

所以，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{AB}=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

故选：A.

7．B

【分析】首先由$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-f\left(x\right)$得出$\omega=4k-\frac{4}{3},k\in Z$，再结合$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$上单调，即可求解.

【详解】因为$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-f\left(x\right)$，所以$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+f\left(x\right)=0$，即$f(x)$对称中心为$(\frac{\pi}{4},0)$，

所以$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{3}\right)=0$，即$\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in Z$，解得$\omega=4k-\frac{4}{3},k\in Z$，

又因为$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$上单调，所以$\frac{T}{2}>\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，即$\frac{2\pi}{2\omega}>\frac{\pi}{6}$，

所以$\omega<6$，又$\omega>0$且$\omega=4k-\frac{4}{3},k\in Z$，

所以$\omega=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$.

故选：B．

8．A

【分析】由$3S=a^2-\left(b-c\right)^2$，利用三角形面积公式与余弦定理，可得$3\sin A+4\cos A=4$，再根据同角三角函数的平方关系可得$\sin A=\dfrac{24}{25}$，$\cos A=\dfrac{7}{25}$，然后利用正弦定理与三角恒等变换公式化简可得$\dfrac{b}{c}=\dfrac{24}{25\tan C}+\dfrac{7}{25}$，结合条件可得$\tan C$取值范围，进而求得$\dfrac{b}{c}$的取值范围.

【详解】在$\triangle ABC$中，由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，且$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$，

由$3S=a^2-\left(b-c\right)^2$，得$\dfrac{3}{2}bc\sin A=2bc-2b\cos A$，化简得$3\sin A+4\cos A=4$，

又$A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\sin^2 A+\cos^2 A=1$，联立解得$\sin A=\dfrac{24}{25}$，$\cos A=\dfrac{7}{25}$，

所以$\dfrac{b}{c}=\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{\sin\left(A+C\right)}{\sin C}=\dfrac{\sin A\cos C+\cos A\sin C}{\sin C}=\dfrac{24}{25\tan C}+\dfrac{7}{25}$，

$\triangle ABC$为锐角三角形，有$0<C<\dfrac{\pi}{2}$，$B=\pi-A-C<\dfrac{\pi}{2}$，得$\dfrac{\pi}{2}-A<C<\dfrac{\pi}{2}$，

则有$\tan C>\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)=\dfrac{\cos A}{\sin A}=\dfrac{7}{24}$，可得$\dfrac{1}{\tan C}\in\left(0,\dfrac{24}{7}\right)$，所以$\dfrac{b}{c}\in\left(\dfrac{7}{25},\dfrac{25}{7}\right)$.

故知：A

9．BCD

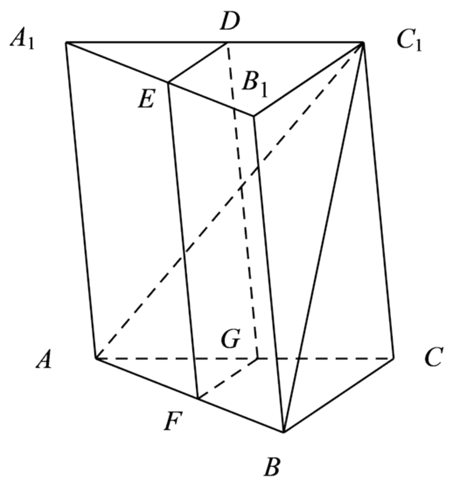
【分析】根据棱柱，棱锥和棱台的定义结合图形分析判断即可

【详解】如图三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$，连接$BC_1,AC_1$，则可得平面$ABC_1$截三棱柱，得到一个三棱锥$C_1-ABC$，所以D正确，

若用一个平行于平面$BCC_1B_1$的平面去截三棱柱，如图平面$DEFG$，则得到一个三棱柱和一个四棱柱，所以BC正确，

因为四棱台的上下底面要平行，所以要得到四棱台，则截面要与三棱柱的上下底面相交，而四棱台的侧棱延长后交与一点，棱柱的侧棱是相互平行的，所以用一个平面去截一个三棱柱，不可能得到一个四棱台，所以A错误，

故选：BCD




10．ABC

【分析】根据复数代数形式的乘法运算及复数的模判断 A；根据复数的向量表示及向量三角不等式，即可判断 B；根据复数代数形式的除法运算及复数的概念判断 C；根据复数模的几何意义判断 D.

【详解】设 $z_1=a+b\mathrm{i}\ ,z_2=c+d\mathrm{i}\left(a,b,c,d\in\mathrm{R}\right)$，

则 $z_1z_2=\left(a+b\mathrm{i}\right)\cdot\left(c+d\mathrm{i}\right)=\left(ac-bd\right)+\left(ad+bc\right)\mathrm{i}$，

$z_1\overline{z_2}=\left(a+b\mathrm{i}\right)\cdot\left(c-d\mathrm{i}\right)=\left(ac+bd\right)+\left(bc-ad\right)\mathrm{i}$，

得 $\left|z_1z_2\right|=\sqrt{\left(ac-bd\right)^2+\left(ad+bc\right)^2}=\sqrt{\left(ac\right)^2+\left(bd\right)^2+\left(ad\right)^2+\left(bc\right)^2}$，

$\left|z_1\overline{z_2}\right|=\sqrt{\left(ac+bd\right)^2+\left(bc-ad\right)^2}=\sqrt{\left(ac\right)^2+\left(bd\right)^2+\left(ad\right)^2+\left(bc\right)^2}$，

所以 $\left|z_1z_2\right|=\left|z_1\overline{z_2}\right|$，故 A 正确，

设 $z_1,z_2$ 对应的向量分别为 $\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$，则由向量三角不等式得 $\left|\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}\right|\le\left|\overrightarrow{OZ_1}\right|+\left|\overrightarrow{OZ_2}\right|$，

所以 $\left|z_1-z_2\right|\le\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$ 恒成立，所以 B 正确，

因为 $\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{\overline{z_1}}{z_1\cdot\overline{z_1}}$ 为虚数，$z_1\cdot\overline{z_1}$ 为实数，所以 $\overline{z_1}$ 为虚数，则 $z_1$ 也为虚数，故 C 正确；

设 $z_1=x+y\mathrm{i}$，由 $\left|z_1+\mathrm{i}\right|=1$，则在复平面内点 $(x,y)$ 表示以 $(0,-1)$ 为圆心，1 为半径的圆，则 $\left|z_1\right|_{\max}=2$，故 D 错误.

故选：ABC

11．AD