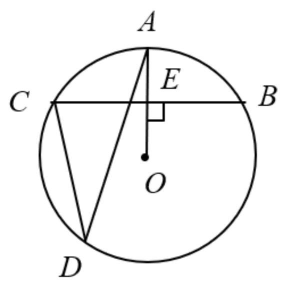
第 24 章 重点突破训练：垂径定理的应用举例

考点体系

考点 1：垂径定理的常规应用

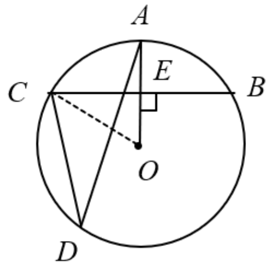
典例：（2020·湖北中考真题）如图，点 A,B,C,D 在 $\odot O$ 上，$OA\perp BC$，垂足为 E．若 $\angle ADC=30°$，$AE=1$，则 $BC=$（　　）



A．2　　　　B．4　　　　C．$\sqrt{3}$　　　　D．$2\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】解：连接 OC，



∵ $\angle ADC = 30°$，

∴ $\angle AOC = 60°$，

在 Rt△COE 中，$\dfrac{OE}{OC} = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$，

∴ $OE = \dfrac{1}{2}OC = \dfrac{1}{2}OA$，

∴ $AE = \dfrac{1}{2}OC = \dfrac{1}{2}OA$

∵ $AE = 1$，

∴ $OA = OC = 2$，

∴ $CE = \sqrt{3}$

∵ $OA \perp BC$，垂足为 E，

∴ $BC = 2\sqrt{3}$，

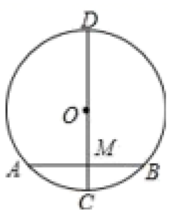
故选：D．

方法或规律点拨

本题考查圆周角定理和垂径定理，作出合适的辅助线是解题的关键．

巩固练习

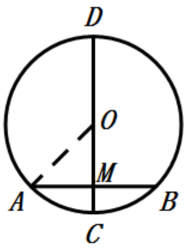
1．（2019·金昌市金川总校第五中学初三期中）如图，AB 是⊙O 的弦，AB=8，直径 CD⊥AB 于 M，且 DM=8，则⊙O 的半径为（　　）



A．3　　　　B．4　　　　C．5　　　　D．6

【答案】C

【解析】连接 OA，



设 OA=r，则 OM= DM-OD=8-r，

∵CD 为⊙O 的直径，CD⊥AB，AB=8，

∴AM=BM=$\frac{1}{2}$AB=4，

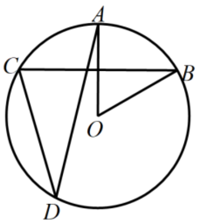
在 Rt△AOM 中，

$OA^2=AM^2+OM^2$，即 $r^2=4^2+(8-r)^2$，

解得 r=5．

故选：C．

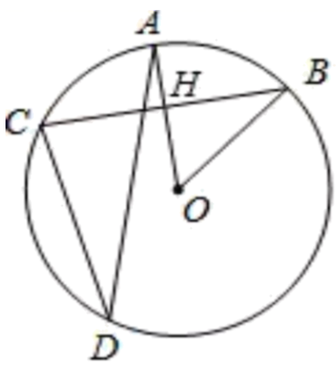
2．（2020·海南琼海初三其他）如图，点 *A*，*B*，*C*，*D* 都在半径为 4 的⊙O 上，若 *OA*⊥*BC*，∠*CDA*=30°，则弦 *BC* 的长为（　　）



A．4　　　　B．$4\sqrt{2}$　　　　C．$4\sqrt{3}$　　　　D．6

【答案】C

【解析】解：如图，设 OA 与 BC 交于点 H，



∵OA⊥BC，

∴CH＝BH，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AB}$，

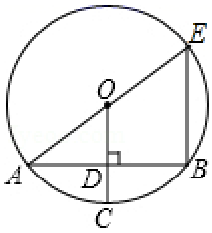
∴∠AOB＝2∠CDA＝60°，

∴BH＝OB•sin∠AOB＝$2\sqrt{3}$，

∴BC＝2BH＝$4\sqrt{3}$，

故选：C．

3．(2020·山东东明初三其他）如图，在⊙O 中，AE 是直径，半径 OC 垂直于弦 AB 于 D，连接 BE，若 AB=2$\sqrt{7}$，CD=1，则 BE 的长是(　　)



A．5　　B．6　　C．7　　D．8

【答案】B

【解析】∵半径 OC 垂直于弦 AB，

∴AD=DB=$\frac{1}{2}$ AB=$\sqrt{7}$

在 Rt△AOD 中，$OA^2=(OC-CD)^2+AD^2$,即 $OA^2=(OA-1)^2+(\sqrt{7})^2$，

解得，OA=4

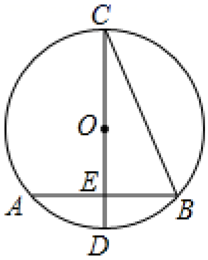
∴OD=OC-CD=3，

∵AO=OE,AD=DB,

∴BE=2OD=6

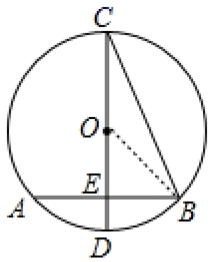
故选 B

4．(2019·景泰县第四中学初三一模）如图，在⊙O 中，CD 是直径，弦 AB⊥CD，垂足为 E，连接 BC．若 AB=2$\sqrt{2}$，∠BCD=30°，则⊙O 的半径为________．



【答案】$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

【解析】解： 连接 OB，



∵OC=OB，∠BCD=30°，

∴∠BCD=∠CBO=30°，

∴∠BOE=∠BCD+∠CBO=60°，

∵直径 CD⊥弦 AB，AB=$2\sqrt{2}$,

∴BE=$\dfrac{1}{2}$AB=$\sqrt{2}$，∠OEB=90°，

∴OB=$\dfrac{BE}{\sin 60^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$,

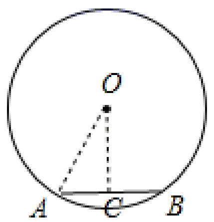
即⊙O 的半径为$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，

故答案为：$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

5.（2020·江苏南通中考真题）已知⊙O 的半径为 13cm，弦 AB 的长为 10cm，则圆心 O 到 AB 的距离为_____cm.

【答案】12

【解析】解：如图，作 OC⊥AB 于 C，连接 OA，



则 AC＝BC＝$\dfrac{1}{2}$AB＝5，

在 Rt△OAC 中，OC＝$\sqrt{13^2-5^2}$＝12，

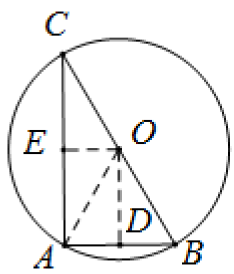
所以圆心 O 到 AB 的距离为 12cm.

故答案为：12.

6.（2020·江苏秦淮初三月考）在半径为 2 的圆中，弦 AB、AC 的长度分别是 2、$2\sqrt{3}$，则弦 BC 的长度是______.

【答案】4 或 2.

【解析】解: ①如下图所示，当弦 AB、AC 位于圆心的两侧时，分别将圆心 O 点与 A、B、C 相连，作 OD⊥AB，OE⊥AC，



∵圆的半径为 2，故 OA=OB=OC=2，且 AB=2，

∴△AOB 是等边三角形，∠OAB=60°，

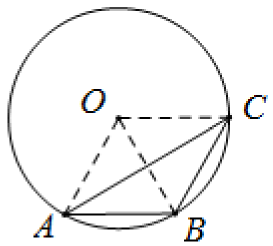
在等腰三角形 AOC 中，OE 为 AC 边上的高，OE 也是 AC 边的中线，

∴AE=CE=$\frac{1}{2}$AC=$\sqrt{3}$，且∠AEO=90°，$\cos\angle OAE=\frac{AE}{OA}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴∠OAE=30°，则∠BAC=∠OAB+∠OAC=60°+30°=90°，

∴弦 BC 为圆的直径，BC=4;

②如下图所示，当弦 AB、AC 位于圆心的同一侧时，分别将圆心 O 点与 A、B、C 相连，



同①中的分析相同，△AOB 是等边三角形，∠OAB=60°，

且∠OAC=30°，OA=OC，故△AOC 是等腰三角形，∠AOC=120°，

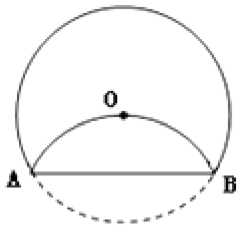
又∵∠AOC+∠OAB=180°，平行线间同旁内角互补，

∴OC∥AB，且 OC=OB=OA，故四边形 OABC 为菱形，

∴BC=OA=2，

故答案为：4 或 2．

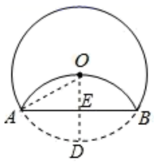
7．(2020·四川青羊初三二模）如图，将半径为$4cm$的圆折叠后，圆弧恰好经过圆心，则折痕的长为（　　）



A．$4\sqrt{3}$ cm　　　B．$2\sqrt{3}$ cm　　　C．$\sqrt{3}$ cm　　　D．$\sqrt{2}$ cm

【答案】A

【解析】如图所示，连接 AO，过 O 作 OD⊥AB，交$\overset{\frown}{AB}$于点 D，交弦 AB 与点 E，



∵$\overset{\frown}{AB}$折叠后恰好经过圆心，

∴OE=DE,

∵半径为 4，

∴OE=2，

∵OD⊥AB，

∴AE=$\dfrac{1}{2}$AB，

在 Rt△AOE 中，AE=$\sqrt{OA^2-OE^2}$=2$\sqrt{3}$

∴AB=2AE=4$\sqrt{3}$

故选 A.

考点 2：平行弦问题

典例：（2019·山东金乡�初三期中）已知AB, CD是$\odot O$的两条弦，$AB//CD$．若$\odot O$的直径为$10, AB=8, CD=6$,则弦AB和CD之间的距离是__________．

【答案】1 或 7

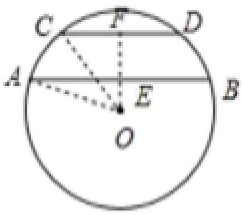
【解析】如图所示，连接 OA，OC．作直线 EF⊥AB 于 E，交 CD 于 F，

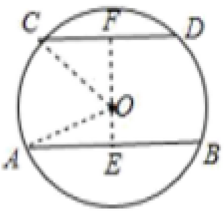
∵AB∥CD，

∴EF⊥CD．

∵ ⊙O 的直径为 10，

∴OA=OC=5





∵OE⊥AB，OF⊥CD，

∴AE＝$\frac{1}{2}$AB＝4，CF＝$\frac{1}{2}$CD＝3，

∴OE＝$\sqrt{OA^2-AE^2}$ ＝3, OF＝$\sqrt{OC^2-CF^2}$ ＝4

①当 AB 和 CD 在圆心的同侧时，则 EF＝OF−OE＝1；

②当 AB 和 CD 在圆心的两侧时，则 EF＝OE＋OF＝7.

则 AB 与 CD 间的距离为 1 或 7.

故答案为：1 或 7.

方法或规律点拨

本题考查了垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的弧．也考查了勾股定理．

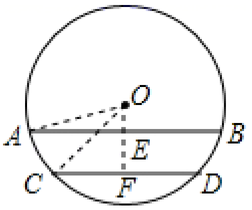
巩固练习

1．（2019·安徽庐江初三期末）已知 AB、CD 是⊙O 的两条弦，AB∥CD，AB＝6，CD＝8，⊙O 的半径为 5，则 AB 与 CD 的距离是（　　）

A．1　　　　B．7　　　　C．1 或 7　　　　D．无法确定

【答案】C

【解析】解：①当弦 AB 和 CD 在圆心同侧时，如图①，



图①

过点 O 作 $OF\perp CD$，垂足为 F，交 AB 于点 E，连接 OA，OC，

∵$AB\parallel CD$，

∴$OE\perp AB$，

∵$AB=8$，$CD=6$，

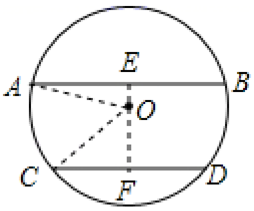
∴$AE=4$，$CF=3$，

∵$OA=OC=5$，

∴由勾股定理得：$EO=\sqrt{5^2-4^2}=3$，$OF=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

∴$EF=OF-OE=1$；

②当弦 AB 和 CD 在圆心异侧时，如图②，



图②

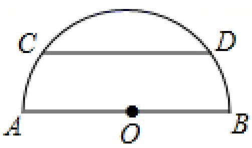
过点 O 作 $OE\perp AB$ 于点 E，反向延长 OE 交 AD 于点 F，连接 OA，OC，

$EF=OF+OE=7$，

所以 AB 与 CD 之间的距离是 1 或 7.

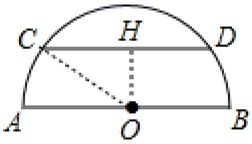
故选：C.

2.（2020·浙江中考真题）如图，已知 AB 是半圆 O 的直径，弦 $CD\parallel AB$，$CD=8$．$AB=10$，则 CD 与 AB 之间的距离是_____.



【答案】3

【解析】解：过点 O 作 $OH\perp CD$ 于 H，



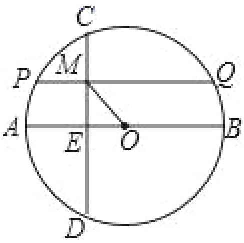
连接 OC，如图，则 $CH=DH=\frac{1}{2}CD=4$，

在 Rt△OCH 中，$OH=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

所以 CD 与 AB 之间的距离是 3．

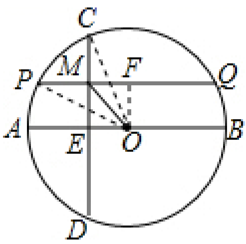
故答案为 3．

3．（2020·浙江德清初三期中）已知 AB 是⊙O 的直径，弦 CD⊥AB 于点 E，弦 PQ∥AB 交弦 CD 于点 M，BE=18，CD=PQ=24，则 OM 的长为______．



【答案】$5\sqrt{2}$

【解析】：作 OF⊥PQ 于 F，连接 OP，



∴$PF=\frac{1}{2}PQ=12$，

∵CD⊥AB，PQ∥AB，

∴CD⊥PQ，

∴四边形 MEOF 为矩形，

∵CD=PQ，OF⊥PQ，CD⊥AB，

∴OE=OF，

∴四边形 MEOF 为正方形，

设半径为 x，则 OF=OE=18-x，

在直角△OPF 中，

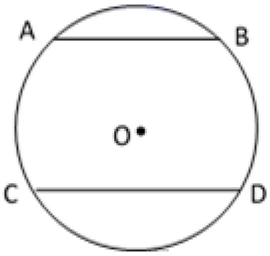
$x^2=12^2+（18-x）^2$，

解得 x=13，

则 MF=OF=OE=5，

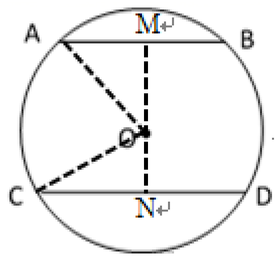
∴OM=$5\sqrt{2}$.

4．（2017·重庆开州初三期末）如图，已知⊙O 的半径长为 R=5，弦 AB 与弦 CD 平行，它们之间距离为 5，AB=6，求弦 CD 的长．



【答案】$4\sqrt{6}$

【解析】解：如图所示，因为 AB∥CD，所以过点 O 作 MN⊥AB 交 AB 于点 M，交 CD 于点 N，连接 OA，OC，



由垂径定理可得 AM=$\frac{1}{2}AB=3$，

∴在 Rt△AOM 中，$OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

∴ON=MN-OM=1，

∴在 Rt△CON 中，$CN=\sqrt{OC^2-ON^2}=\sqrt{5^2-1^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$，

∴ $CD=2CN=4\sqrt{6}$，

故答案为：$4\sqrt{6}$

考点 3：垂径定理的实际应用问题

典例：（2019·江苏镇江初三月考）（操作思考）画⊙O和⊙O的直径AB、弦CD，使$AB\perp CD$，垂足为P（如图 1）．猜想所画的图中有哪些相等的线段、相等的劣弧？（$OA=OB$除外）．

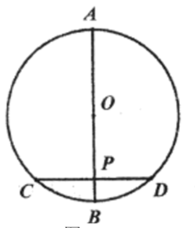


图 1

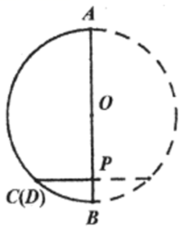


图 2

（1）猜想：①________；②________；③________.

操作: 将图 1 中的 $\overset{\frown}{ADB}$ 沿着直径 AB 翻折，因为圆是轴对称图形，过圆心的任意一条直线都是它的对称轴，所以 $\overset{\frown}{ADB}$ 与 $\overset{\frown}{ACB}$ 重合，又因为 $\angle APD=\angle APC=90^{\circ}$，所以射线 PD 与射线 PC 重合（如图 2），于是点 C 与点 D 重合，从而证实猜想.

（知识应用）图 3 是某品牌的香水瓶，从正面看上去（如图 4），它可以近似看作割去两个弓形后余下的部分与矩形 $ABCD$ 组合而成的图形（点 B、C 在 EF 上），其中 $EF\,//\,GH$.

图 3

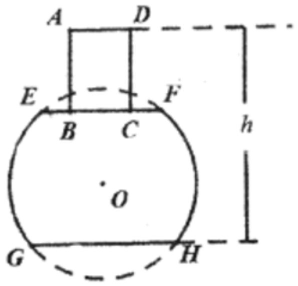


图 4

（2）已知⊙O 的半径为3cm，$AB=3cm$，$EF=3.6cm$，$GH=4.8cm$，求香水瓶的高度 h .

【答案】（1）CP=DP，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$；（2）7.2cm

【解析】（1）∵⊙O 的直径 AB 、弦 CD ，使 $AB\perp CD$ ，垂足为 P ，

∴相等的线段是：CP=DP，相等的劣弧是：$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$ ，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$，

故答案为：CP=DP，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$；

（2）作 OM⊥EF，延长 MO 角 GH 于 N，连接 OE、OG，

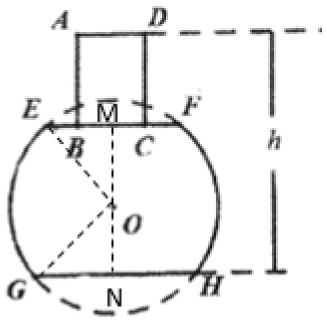
∵ $EF\,//\,GH$ ，

∴ON⊥GH，

∵EM=$\frac{1}{2}$EF=1.8cm，GN=$\frac{1}{2}$GH=2.4cm，⊙O 的半径为 3cm，

∴ $OM=\sqrt{3^2-1.8^2}=2.4cm$， $ON=\sqrt{3^2-2.4^2}=1.8cm$，

∴香水瓶的高度 h =AB+OM+ON=3+2.4+1.8=7.2cm.

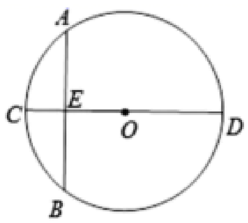


方法或规律点拨

此题考查轴对称图形和圆的相关知识，勾股定理，垂径定理正确掌握轴对称图形的定义，圆的轴对称关系，利用垂径定理进行计算是解题的关键.

巩固练习

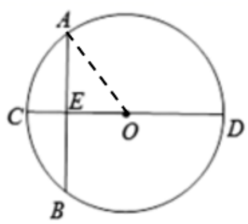
1．（2020·湖南新邵�）如图所示，“圆材埋壁”是我国古代著名的数学著作《九章算术》中的一个问题，“今有圆材，埋在壁中，不知大小，以锯锯之，深两寸，锯道长八寸，问径几何？”用现代的数学语言表述是：“CD 为⊙O 的直径，弦 $AB\perp CD$，垂足为点 E， $CE=2$ 寸， $AB=8$ 寸，求直径 CD 的长？”依题意 CD 的长为（　）



A．6 寸　　B．8 寸　　C．10 寸　　D．12 寸

【答案】C

【解析】如图，连接 AO，



设直径 CD 的长为 2x 寸，则半径 OA=OC=x 寸，

∵CD 为⊙O 的直径，弦 AB⊥CD，垂足为 E，AB=8 寸，

∴AE=BE=$\frac{1}{2}$AB=4 寸，

在 Rt△AOE 中，根据勾股定理可知：

$AO^2=AE^2+EO^2$，

∴ $x^2=4^2+(x-2)^2$，

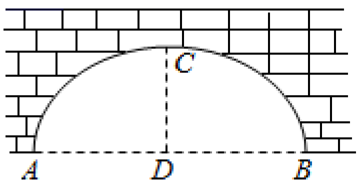
解得：$x=5$，

∴ $2x=10$，

即 CD 长为 10 寸.

故选：C

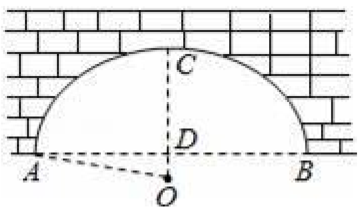
2．(2020·安徽相山初三月考）如图，圆弧形拱桥的跨径 $AB=12$ 米，拱高 $CD=4$ 米，则拱桥的半径为（　　）米



A．6.5　　　　B．9　　　　C．13　　　　D．15

【答案】A

【解析】根据垂径定理的推论，知此圆的圆心在 CD 所在的直线上，设圆心是 O．连接 OA　　.



根据垂径定理和勾股定理求解．得 AD=6 设圆的半径是 r，　根据勾股定理，　得 $r^2=36+(r-4)^2$，解得 r=6.5

3．（2020·广西南宁初三二模）下图是“明清影视城”的一扇圆弧形门，小红到影视城游玩，他了解到这扇门的相关数据：这扇圆弧形门所在的圆与水平地面是相切的，$AB=CD=0.25$ 米，$BD=1.5$ 米，且 AB、CD 与水平地面都是垂直的.根据以上数据，请你帮小红计算出这扇圆弧形门的最高点离地面的距离是（　　）