重庆市西南大学附中、重庆育才中学、万州高级中学拔尖强基联盟2023-2024学年高二下学期5月联合考试数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知全集$U=\{x|x\le 6,x\in \mathrm{N}\}$，$A=\{-1,0,1,2,3\}$，$B=\{3,4,5\}$，则$A\cap(\complement_U B)=$（　）

A．$\{1,2\}$　　B．$\{0,1,2\}$　　C．$\{1,2,3\}$　　D．$\{1,2,3,6\}$

2．若随机变量$X\sim N(90,\sigma^2)$且$P(X\le 70)=0.12$，则$P(90\le X\le 110)=$（　）

A．0.12　　B．0.24　　C．0.28　　D．0.38

3．已知函数$f(x)=2f'(\mathrm{e})x+\dfrac{(\ln x)^2}{2}$，则$f'(\mathrm{e})=$（　）

A．-1　　B．$-\dfrac{1}{2}$　　C．$-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　　D．$-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$

4．“$x^2-x-2>0$”是“$\dfrac{1}{x}<2$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．既不充分又不必要条件　　D．充要条件

5．若“$\forall x\in[0,2]$，$2^{x-1}+2^{-x}-m<0$”为假命题，则m的取值范围为（　）

A．$(-\infty,\sqrt{2}]$　　B．$[\sqrt{2},+\infty)$　　C．$\left(-\infty,\dfrac{9}{4}\right]$　　D．$\left[\dfrac{9}{4},+\infty\right)$

6．已知$\left(x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^n$的展开式中仅第4项的二项式系数最大，则展开式中系数最大的项是第（　）项

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

7．某医院要派2名男医生和4名女医生去A，B，C三个地方义诊，每位医生都必须选择1个地方义诊.要求A，B，C每个地方至少有一名医生，且都要有女医生，同时男医生甲不去A地，则不同的安排方案为（　）

A．120种　　B．144种　　C．168种　　D．216种

8．已知定义在R上的函数$f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2+ax}$（$a\in \mathrm{R}$），设$f(x)$的最大值和最小值分别为$m$，$n$，则$mn$的取值范围是（　）

A．$(-\infty,-\frac{1}{2\mathrm{e}}]$　　B．$[-\frac{1}{2\mathrm{e}},0)$　　C．$(-\infty,-\frac{\mathrm{e}}{2}]$　　D．$[-\frac{\mathrm{e}}{2},0)$

二、多选题

9．下列说法中，正确的是（　）

A．若随机变量$X\sim B\left(4,\frac{1}{3}\right)$，则$P\left(X=3\right)=\frac{8}{81}$

B．变量x和变量y的样本相关系数r越大，它们的线性相关程度越强

C．变量x和变量y的经验回归方程为$\hat{y}=\hat{b}x+a$，残差$\hat{e}_i=y_i-y_i$，则$\sum_{i=1}^{n}\hat{e}_i=0$

D．若散点图中所有的散点都落在一条斜率为非0的直线上，则决定系数$R^2=1$

10．已知$a>0$，$b>0$，$a+2b=2$，则下列结论正确的有（　）

A．ab的最大值为$\frac{1}{2}$　　B．a^2+b^2的最小值为$\frac{4}{5}$

C．$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$的最小值为9　　D．$\frac{1}{2a+b}+\frac{3}{a+3b}$的最小值为$\frac{8}{5}$

11．对于一元三次函数$f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$（$a\neq 0$）图象上任一点$M$，若$f\left(x\right)$在点$M$处的切线与$f\left(x\right)$的图象交于另一点$N$，则称$N$为$M$的“伴随割点”，关于“伴随割点”，下列说法正确的有（　）

A．点$\left(-\frac{b}{3a},f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$没有“伴随割点”

B．若点$\left(x_0,y_0\right)$的“伴随割点”为点$\left(x_1,y_1\right)$，则$2x_0+x_1=-\frac{b}{a}$

C．若$f\left(x\right)$的图象上存在一点与其“伴随割点”关于原点对称，则$d=-\frac{b^3}{3a^2}$

D．若$f\left(x\right)$的图象与x轴的交点分别为A,B,C，它们的“伴随割点”存在且分别为D，E，F，则D，E，F三点共线

三、填空题

12．已知随机变量X服从两点分布，其中$P\left(X=1\right)=\frac{1}{4}$，若$Y=2X+3$，则$D\left(Y\right)=$___.

13．端午节即将来临，现有一个礼盒里装了3个肉粽，5个蛋黄粽，从礼盒中任取两个粽子，则在有一个是肉粽的条件下，另一个是蛋黄粽的概率为___.

14．已知$x>0$，$y>0$，$2x^3+2y^3=x-y$，则$\frac{1-2x^2}{y^2}$的最小值为___.

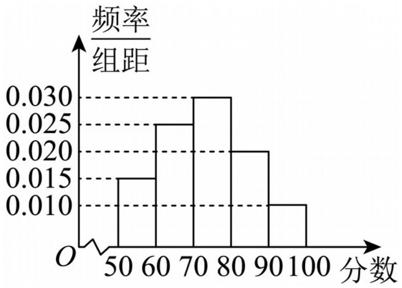
四、解答题

15．已知函数$f\left(x\right)=a\ln x+bx^2-7x+\frac{1}{2}$在点$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线方程为$2x+y+3=0$.

(1)求a，b；

(2)求 $f(x)$ 的单调区间和极值.

16．某中学举办中国传统文化知识问答测试，规定成绩不低于90分的为“优秀”，现从中随机抽取50名男生和50名女生共100名学生进行测试，得到如图所示的频率分布直方图.



(1)已知成绩优秀的学生中男生占$\frac{1}{5}$，请填写下面的 2×2 列联表，并根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，能否认为知识问答测试成绩是否优秀与性别有关；

性别	成绩		合计
	优秀	不优秀	
男			
女			
合计			

(2)从上述成绩 $[80,90)$，$[90,100]$ 的学生中按比例分层随机抽样选出9人，再从选出的9人中随机抽取3人，记其中成绩优秀的人数为 X，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$

临界值表：

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
χ^2	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

17．已知椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，焦点为$F_1\left(2,0\right)$，$F_2\left(-2,0\right)$，椭圆上有一点$P\left(1,\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$.

(1)求椭圆E的标准方程；

(2)过点F_1的直线交椭圆E于A，B两点，过B作x轴的垂线交椭圆于另一个点C，求证直线AC过定点.

18．某校开设了“五子棋”社团课，甲乙两位同学进行五子棋比赛，每局有一人先手（每局中先走第一颗棋），规则如下：每局输者下一局先手.已知甲先手时，甲赢的概率为$\frac{3}{4}$；乙先手时，乙赢的概率为$\frac{3}{5}$.假设每局无平局，且每局比赛的输赢相互独立，第一局甲先手.

(1)甲乙两位同学比赛两局，求甲至少赢1局的概率；

(2)记P_i为第i局比赛中甲赢的概率，求P_i，并计算连续比赛20局中，甲赢的概率大于$\frac{1}{2}$的局数.

19．已知函数$f\left(x\right)=x-\frac{a\left(\mathrm{e}^x-1\right)}{\mathrm{e}^x+1}\left(a>0\right)$.

(1)若函数$f\left(x\right)$有两个极值点，求a的取值范围；

(2)若对$\forall x\geq 0$，函数$f\left(x\right)\geq 0$恒成立，求a的取值范围；

(3)证明：对$\forall n\in \mathrm{N}^*$，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}<\ln 2$.

参考答案：

1．B

【分析】根据补集和交集的概念进行求解.

【详解】$U=\{0,1,2,3,4,5,6\}$，$\complement_U B=\{0,1,2,6\}$，

$A\cap\left(\complement_U B\right)=\{-1,0,1,2,3\}\cap\{0,1,2,6\}=\{0,1,2\}$.

故选：B

2．D

【分析】根据题意，利用正态分布曲线的对称性，即可求解.

【详解】因为随机变量$X\sim N\left(90,\sigma^2\right)$，则根据正态分布曲线的对称性，

可得$P(90\le X\le 110)=\dfrac{1-2P(X\le 70)}{2}=\dfrac{1-2\times 0.12}{2}=0.38$.

故选：D.

3．C

【分析】根据题意，求得$f'(x)=2f'(\mathrm{e})+\dfrac{\ln x}{x}$，令$x=\mathrm{e}$，即可求解.

【详解】由函数$f(x)=2f'(\mathrm{e})x+\dfrac{(\ln x)^2}{2}$，

可得$f'(x)=2f'(\mathrm{e})+\dfrac{1}{2}\times 2\ln x\times\dfrac{1}{x}=2f'(\mathrm{e})+\dfrac{\ln x}{x}$，

令$x=\mathrm{e}$，可得$f'(\mathrm{e})=2f'(\mathrm{e})+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，所以$f'(\mathrm{e})=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

故选：C.

4．A

【分析】解不等式，得到两不等式的解集，根据包含关系得到答案.

【详解】$x^2-x-2>0\Rightarrow x>2$或$x<-1$，

$\frac{1}{x}<2 \Rightarrow x>2$ 或 $x<0$，

由于 $x>2$ 或 $x<-1$ 是 $x>2$ 或 $x<0$ 的真子集，

故“$x^2-x-2>0$”是“$\frac{1}{x}<2$”的充分不必要条件.

故选：A

5．C

【分析】转化为命题的否定为真命题，再分离参数，设新函数求出其最大值即可得到答案.

【详解】由题意得该命题的否定为真命题，

即“$\exists x\in[0,2]$，$2^{x-1}+2^{-x}-m\geq 0$”为真命题，

$2^{x-1}+2^{-x}-m\geq 0$ 即 $m\leq 2^{x-1}+2^{-x}$，

令 $t=2^x$，因为 $x\in[0,2]$，则 $t\in[1,4]$，

则存在 $t\in[1,4]$，使得 $m\leq \frac{1}{2}t+\frac{1}{t}$ 成立，

令 $f(t)=\frac{t}{2}+\frac{1}{t}$，令 $\frac{t}{2}=\frac{1}{t}$，则 $t=\sqrt{2}$（负舍），

则根据对勾函数的性质知 $f(t)$ 在 $[1,\sqrt{2})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{2},4]$ 上单调递增，

且 $f(1)=\frac{3}{2}$，$f(4)=\frac{9}{4}$，则 $f(t)_{\max}=f(4)=\frac{9}{4}$，则 $m\leq\frac{9}{4}$.

故选：C.

6．B

【分析】根据第 4 项的二项式系数最大求出 $n=6$，再通过通项公式得出展开式中项的系数

为 $2^{-r}C_6^r$ ，接着由 $\begin{cases}2^{-r}C_6^r \ge 2^{-(r-1)}C_6^{r-1}\\ 2^{-r}C_6^r \ge 2^{-(r+1)}C_6^{r+1}\end{cases}$ 即可求解.

【详解】由题意二项式系数仅 C_n^3 最大，故 $n=6$，

所以二项式为 $\left(x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^6$，其通项公式为 $T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^r=2^{-r}C_6^r x^{6-\frac{3}{2}r}, r=0,1,2,3,4,5,6$，

设二项式展开式中第 $r+1$ 项的系数最大，则有 $\begin{cases}2^{-r}C_6^r \ge 2^{-(r-1)}C_6^{r-1}\\ 2^{-r}C_6^r \ge 2^{-(r+1)}C_6^{r+1}\end{cases}$，

$\Rightarrow \begin{cases} r \le \frac{7}{3}\\ r \ge \frac{4}{3}\end{cases}$，即 $\frac{4}{3} \le r \le \frac{7}{3}$，故 $r=2$，经经验符合题意，

所以展开式中系数最大的项是第 3 项.

故选：B.

7．D

【分析】先求出 2 名男医生到 3 地的可能结果，再安排 4 名女医生，结合分步乘法计数原理计算即可求解.

【详解】设 2 名男医生分别为甲、乙，

若乙去 A，则甲可能去 B 或 C，有 2 种结果；

若乙去 B，则甲可能去 B 或 C，有 2 种结果；

若乙去 C，则甲可能去 B 或 C，有 2 种结果，

共有 6 种结果；

将 4 名女医生分配到 A，B，C 三个地方，分为 211 三组，

可能的结果有 $\frac{C_4^2C_2^1A_3^3}{A_2^2}=36$ 种，

所以满足题意的有$6\times 36=216$种结果.

故选：D

8．A

【分析】求出函数$f(x)$的导数，利用导数求出m,n，结合韦达定理用a的函数表示mn，再求出指数函数的值域得解.

【详解】函数$f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2+ax}$，求导得$f(x)=\mathrm{e}^{-x^2+ax}+x(-2x+a)\mathrm{e}^{-x^2+ax}=(-2x^2+ax+1)\mathrm{e}^{-x^2+ax}$，

令$g(x)=-2x^2+ax+1$，显然函数$g(x)$的图象开口向下，且$g(0)=1>0$，

则函数$g(x)$必有两个异号零点x_1,x_2，不妨设$x_1<0<x_2$，有$x_1+x_2=\frac{a}{2}$，$x_1x_2=-\frac{1}{2}$，

而$\mathrm{e}^{-x^2+ax}>0$恒成立，则当$x<x_1$或$x>x_2$时，$f'(x)<0$，当$x_1<x<x_2$时，$f'(x)>0$，

因此函数$f(x)$在$(-\infty,x_1),(x_2,+\infty)$上单调递减，在$(x_1,x_2)$上单调递增，

又当$x<0$时，$f(x)<0$恒成立，当$x>0$时，$f(x)>0$恒成立，且$f(0)=0$，

于是$f(x)$的最大值$m=f(x_2)=x_2\mathrm{e}^{-x_2{}^2+ax_2}$，最小值$n=f(x_1)=x_1\mathrm{e}^{-x_1{}^2+ax_1}$，

则$mn=x_1x_2\mathrm{e}^{-(x_1^2+x_2^2)+a(x_1+x_2)}=x_1x_2\mathrm{e}^{-(x_1+x_2)^2+a(x_1+x_2)+2x_1x_2}=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{a^2}{4}-1}$，

由$a\in\mathrm{R}$，得$\frac{a^2}{4}-1\in[-1,+\infty),\mathrm{e}^{\frac{a^2}{4}-1}\in[\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty)$，则$-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{a^2}{4}-1}\in(-\infty,-\frac{1}{2\mathrm{e}}]$，

所以mn的取值范围是$(-\infty,-\frac{1}{2\mathrm{e}}]$.

故选：A

9．ACD

【分析】由二项分布概率公式$\mathrm{C}_n^k p^k\left(1-p\right)^{n-k}$可判断A；根据相关系数及决定系数可判断

BD 选项；利用残差的概念结合条件可判断 C.

【详解】对 A，二项分布 $X\sim B\left(4,\frac{1}{3}\right)$，$\therefore P\left(X=3\right)=\mathrm{C}_4^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$，故 A 正确.

对 B，$|r|\to 1$，线性相关程度越强，所以 B 错.

对 C，因为 $\hat{e}_i=y_i-\hat{y}_i$，$\therefore\sum_{i=1}^{n}\hat{e}_i=\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}\hat{y}_i=n\overline{y}-\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{b}x_i+a\right)=n\overline{y}-\left(b\sum_{i=1}^{n}x_i+na\right)$

$=n\overline{y}-\left(\hat{b}n\overline{x}+n\hat{a}\right)=n\overline{y}-n\left(b\overline{x}+a\right)=n\overline{y}-n\overline{y}=0$，所以 C 正确.

对 D，散点图中所有的散点都落在一条斜率为非 0 的直线上，则决定系数 $R^2=1$，所以 D 正确.

故选：ACD.

10．ABD

【分析】利用基本不等式、结合“1”的妙用计算判断 ACD；利用二次函数求出最小值判断 D.

【详解】对于 A，$2=a+2b\geq 2\sqrt{2ab}$，即 $ab\leq\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=2b=1$ 时取等号，A 正确；

对于 B，由 $a+2b=2$，得 $a=2-2b(0<b<1)$，

$a^2+b^2=(2-2b)^2+b^2=5b^2-8b+4=5(b-\frac{4}{5})^2+\frac{4}{5}\geq\frac{4}{5}$，当且仅当 $b=\frac{4}{5}$ 时取等号，B 正确；

对于 C，$\frac{1}{a}\ \ \frac{2}{b}\ \ \frac{1}{2}(a+2b)(\frac{1}{a}\ \ \frac{2}{b})\ \ \frac{1}{2}(5+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b})\geq\frac{1}{2}(5+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{2a}{b}})=\frac{9}{2}$，

当且仅当 $a=b=\frac{2}{3}$ 时取等号，C 错误；

对于D，$2=a+2b=\frac{1}{5}(5a+10b)=\frac{1}{5}[(2a+b)+3(a+3b)]$，

则$\frac{1}{2a+b}+\frac{3}{a+3b}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}[(2a+b)+3(a+3b)](\frac{1}{2a+b}+\frac{3}{a+3b})$

$=\frac{1}{10}[10+\frac{3(a+3b)}{2a+b}+\frac{3(2a+b)}{a+3b}]\geq\frac{1}{10}[10+2\sqrt{\frac{3(a+3b)}{2a+b}\cdot\frac{3(2a+b)}{a+3b}}]=\frac{8}{5}$，

当且仅当$\frac{3(a+3b)}{2a+b}=\frac{3(2a+b)}{a+3b}$，即$a=2b=1$时取等号，D正确.

故选：ABD

11．ACD

【分析】对于A，由$f\left(x-\frac{b}{3a}\right)+f\left(-x-\frac{b}{3a}\right)=2f\left(-\frac{b}{3a}\right)$得点$\left(-\frac{b}{3a},f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$为一元三次函数的对称中心，再探究曲线$y=f\left(x\right)$在其上任意点$P$处的切线与曲线公共点只有一个时的解即可判断；对于B，联立曲线方程和$f\left(x\right)$在$\left(x_0,y_0\right)$处的切线方程即可求解；对于C，根据点$\left(x_0,y_0\right)$的“伴随割点”为点$\left(x_1,y_1\right)$且两者关于原点对称，结合B选项，求出x_1,x_0再代入$f\left(x_0\right)+f\left(x_1\right)=0$即可求解判断；对于D，由题意建立曲线三点式且

$f\left(x\right)=a\left(x-x_A\right)\left(x-x_B\right)\left(x-x_C\right)=ax^3+bx^2+cx+d$求出$x_A+x_B+x_C=-\frac{b}{a}$，再结合选项B推出$x_D+x_E+x_F=-\frac{b}{a}$，接着构造函数$g\left(x\right)=f\left(x\right)-a\left(x-x_D\right)\left(x-x_E\right)\left(x-x_F\right)$得$g\left(x\right)$是一条直线和点$D$，$E$，$F$均在$g\left(x\right)$的图象上即可判断.

【详解】对于A选项，由题

$$f\left(x-\frac{b}{3a}\right)+f\left(-x-\frac{b}{3a}\right)=a\left(x-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(x-\frac{b}{3a}\right)^2+c\left(x-\frac{b}{3a}\right)+d$$

$$+a\left(-x-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(-x-\frac{b}{3a}\right)^2+c\left(-x-\frac{b}{3a}\right)+d=\frac{4b^3}{27a^2}-\frac{2bc}{3a}+2d,$$

又 $f\left(-\frac{b}{3a}\right)=a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2+c\left(-\frac{b}{3a}\right)+d$

$$=-\frac{b^3}{27a^2}+\frac{b^3}{9a^2}-\frac{bc}{3a}+d=\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d,$$

所以 $f\left(x-\frac{b}{3a}\right)+f\left(-x-\frac{b}{3a}\right)=2f\left(-\frac{b}{3a}\right)$，

故点 $\left(-\frac{b}{3a},f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ 是一元三次函数 $f(x)$ 的对称中心，

设 $P(x_0,y_0)$ 是曲线 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$（$a\neq 0$）上任意一点，

则曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线斜率为 $k=f'(x_0)=3ax_0^2+2bx_0+c$，

则切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$，

即 $y=\left(3ax_0^2+2bx_0+c\right)(x-x_0)+ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d$，

与 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 联立，消去 y,y_0 得 $ax^3+bx^2+\left(2bx_0-3ax_0^2\right)x+2ax_0^3+bx_0^2=0$，

整理得一元三次方程 $(x-x_0)^2(ax+2ax_0+b)=0$，

则切线与曲线 $y=f(x)$ 有唯一的公共点 $\Leftrightarrow$ 一元三次方程有三个相等实数根

$\Leftrightarrow$ $x=x_0=-\frac{b}{3a}$，