高二—人教A版—数学—选择性必修第一册—第二章

2.5.1 直线与圆的位置关系

一、学习目标

1．理解并掌握直线与圆的位置关系的判定方法，培养和提高数学直观想象、数学运算能力；

2．能用直线和圆的方程解决直线与圆的弦长及切线问题，体会用代数方法处理几何问题的思想，培养和提高直观想象、逻辑推理素养；

3．借助圆的知识解决实际问题，培养数学建模素养.

二、直线与圆的位置关系

1．我们知道，直线与圆有三种位置关系，它们分别是什么？

（1）直线与圆相交，有两个公共点；（2）直线与圆相切，有一个公共点；（3）直线与圆相离，没有公共点.

2．怎样判断直线与圆的位置关系？

在初中，我们是利用圆心到直线的距离与半径的关系，从而得到直线与圆的位置关系. 到了高中，我们可以利用直线和圆的方程判断它们之间的位置关系.

3．下面，我们通过具体例子进行研究.

二、典型例题

例 1 已知直线$l:3x+y-6=0$ $x^2+y^2-2y-4=0$

l l

分析：思路1：将判断直线与圆的位置关系转化为判断由它们的方程组成的方程组有无实数解、有几个实数解；若相交，可以由方程组解得两交点的坐标，利用两点间的距离公式求得弦长.

二、典型例题

例 1 已知直线$l:3x+y-6=0$ $x^2+y^2-2y-4=0$

l l

解法 1：联立直线l

$$\begin{cases} 3x+y-6=0 \\ x^2+y^2-2y-4=0 \end{cases}$$

$x^2-3x+2=0$ $x_1=2$，$x_2=1$

l

二、典型例题

例 1 已知直线 $l:3x+y-6=0$ $x^2+y^2-2y-4=0$

l l

把 $x_1=2$，$x_2=1$ $y_1=0$，$y_2=3$

l

$$|AB|=\sqrt{(1-2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$$

二、典型例题

例 1 已知直线 $l: 3x+y-6=0$ $x^2+y^2-2y-4=0$

l l

分析：思路2：依据圆心到直线的距离与半径的关系，判断直线与圆的位置关系；若相交，则可利用垂径定理求得弦长.

二、典型例题

例 1 已知直线$l:3x+y-6=0$ $x^2+y^2-2y-4=0$

l l

解法 2： 圆 C 的方程$x^2+y^2-2y-4=0$ $x^2+(y-1)^2=5$

$\sqrt{5}$

l $d=\dfrac{|3\times0+1-6|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}=\sqrt{\dfrac{25}{10}}<\sqrt{5}$

l

二、典型例题

例 1 已知直线 $l:3x+y-6=0$ $x^2+y^2-2y-4=0$

l l

如图 2.5-1，由垂径定理，得 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{10}$

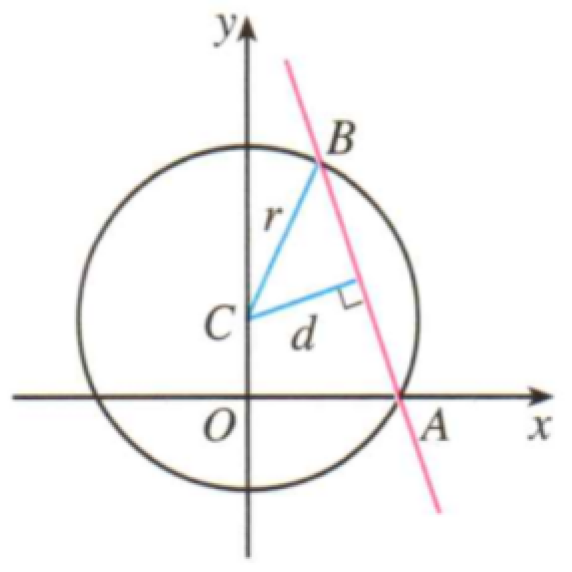

图 2.5-1

二、典型例题

【小结】:

1．（代数法）要判断直线$l: Ax+By+C=0$ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ (x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \end{cases}$$

二、典型例题

【小结】:

2．（综合法 d-r）我们还可以根据圆的方程求得圆心坐标与半径 r，从而求得圆心到直线的距离 d，通过比较 d 与 r 的大小，判断直线与圆的位置关系. 若相交，则可利用垂径定理和勾股定理求弦长.

二、典型例题

【小结】:

直线 $Ax+By+C=0$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的位置关系的判断方法如下表

位置关系		相交	相切	相离
公共点个数		2个	1个	0个
判定方法	综合法：设圆心到直线的距离 $d=\frac{\lvert Aa+Bb+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$	$d<r$	$d=r$	$d>r$
	代数法：由 $\begin{cases}Ax+By+C=0\\(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\end{cases}$ 消元得到一元二次方程根的判别式 Δ	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$

二、典型例题

例 2 过点 P（2, 1）作圆 $O: x^2+y^2=1$ 　　l 　　l

分析： 如图2.5-2，容易知道，点P（2, 1）位于圆O外，经过圆外一点有两条直线与这个圆相切.

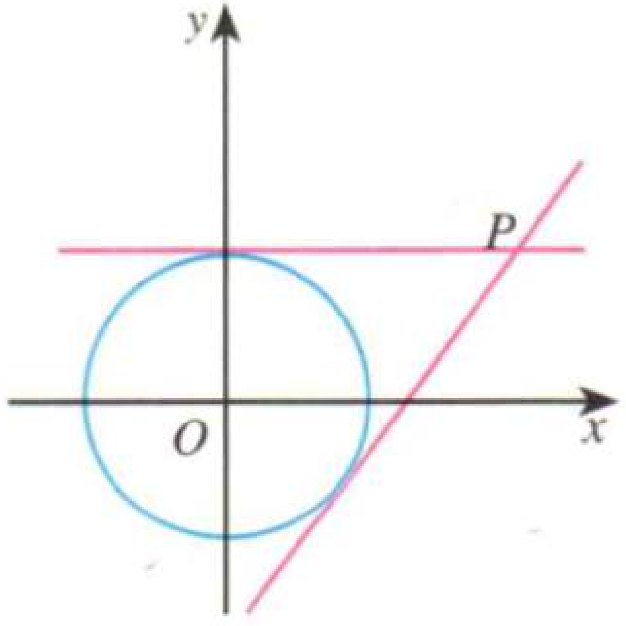

图 2.5-2

二、典型例题

例 2 过点 P（2, 1）作圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ l l

解法 1： 设切线 l l $y-1=k(x-2)$

$$kx-y+1-2k=0$$

$$\frac{|1-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$$

$k=0$ 或 $\frac{4}{3}$

$y=1$，或 $4x-3y-5=0$

二、典型例题

例 2 过点 $P（2,1）$ 作圆 $O: x^2+y^2=1$　　　l　　　l

分析：另一个思路：直线与圆相切，可以利用直线与圆的方程组成方程组，此时方程组只有一组解。

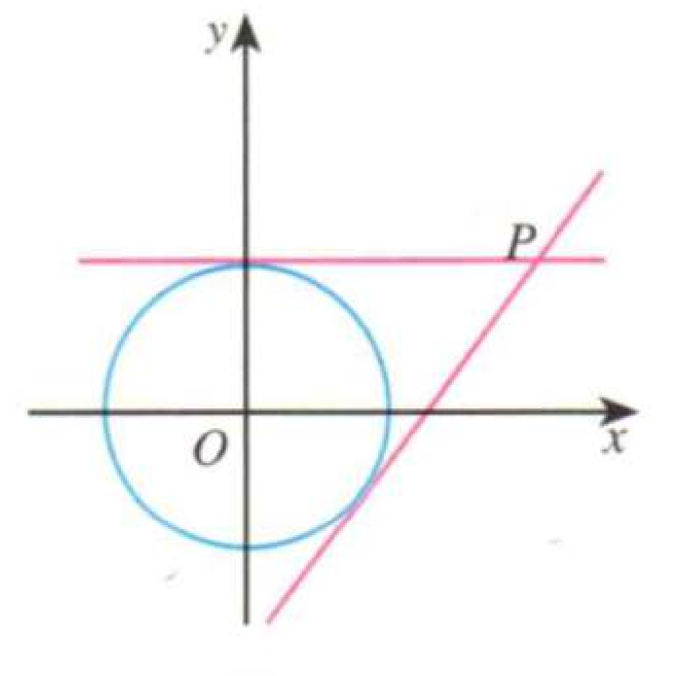

图 2.5-2

二、典型例题

例 2 过点 P（2, 1）作圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ l l

解法 2： 设切线 l l $y-1=k(x-2)$

$$\begin{cases} y-1=k(x-2) \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$(k^2+1)x^2+(2k-4k^2)x+4k^2-4k=0$$

$$\Delta=4k^2(1-2k)^2-16k(k^2+1)(k-1)=0$$

$k=0$ 或 $\dfrac{4}{3}$ $y=1$，或 $4x-3y-5=0$

二、典型例题

【小结】:

1．（综合法 d-r）根据图 2.5-2 容易知道，点 P（2,1）位于圆 $O: x^2+y^2=1$

$$y-1=k(x-2)$$

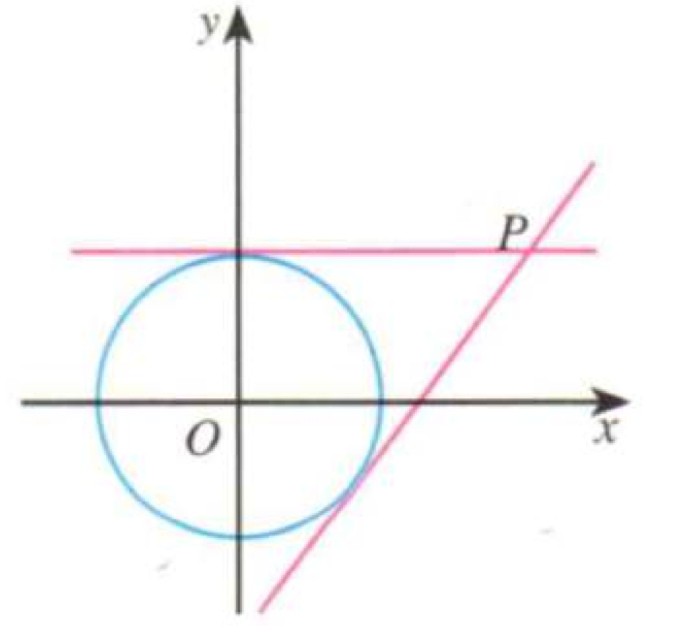

图 2. 5-2

二、典型例题

【小结】:

2.（代数法）直线$l: Ax+By+C=0$　　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ (x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \end{cases}$$

$A_1x^2+B_1x+C_1=0$　　$\Delta=0$

三、实际问题

例 3 图 2.5-3 是某圆拱形桥一孔圆拱的示意图. 圆拱跨度 AB=20m, 拱高 OP=4m, 建造时每隔 4m 需要用一根支柱支撑，求支柱 A_2P_2 的高度（精确到 0.01m）.

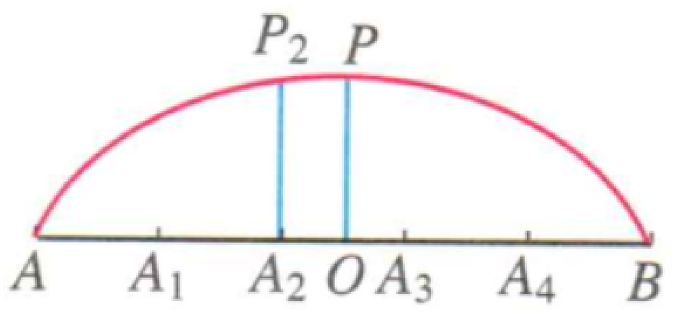

图 2.5-3

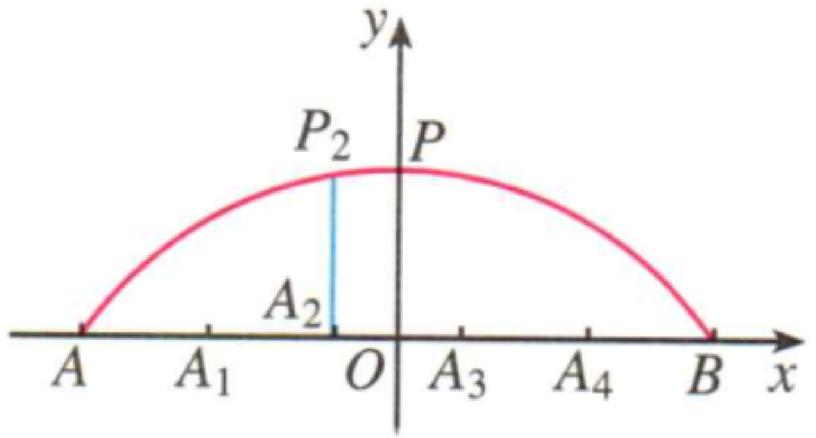

图 2.5-4

分析： 建立如图2.5-4所示的直角坐标系，要得到支柱A_2P_2的高度，只需求出点P_2的纵坐标.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
https://d.book118.com/215340031203012010